พีชคณิตเชิงเส้น

สำหรับเศรษฐศาสตร์

ทองใหญ่ อัยยะวรากูล

พีชคณิตเชิงเส้นสำหรับเศรษฐศาสตร์

ทองใหญ่ อัยยะวรากูล

สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์

พีชคณิตเชิงเส้นสำหรับเศรษฐศาสตร์

พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2567 จำนวน เล่ม

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ
ทองใหญ่ อัยยะวรากูล.
พีชคณิตเชิงเส้นสำหรับเศรษฐศาสตร์.- กรุงเทพฯ: บริษัท จำกัด, 2567.
480 หน้า.
1. พีชคณิตเชิงเส้น. 2. เศรษฐศาสตร์. I. ชื่อเรื่อง.

ISBN

พิมพ์ที่: บริษัท จำกัด

แด่ พ่อกับแม่

สารบัญ

สารบัญรูป

สารบัญตาราง

ประมวลสัญลักษณ์

1	แบบอักษรสำหรับตัวเลขที่เป็นค่าเฉพาะ เช่น บทที่ 1 นิยามที่ 2.1
1	แบบอักษรสำหรับตัวเลขที่นำมาคำนวณได้ เช่น 1.5×2^2
$1, \ldots, n$	ตั้งแต่ 1 ถึง n
a, b, c	สัมประสิทธิ์หรือพารามิเตอร์หรือค่าคงที่
α, β, γ	สัมประสิทธิ์หรือพารามิเตอร์
a_i	สัมประสิทธิ์ a ที่ตำแหน่ง i
a_{ij}	สัมประสิทธิ์ a ที่แถว i และคอลัมน์ j
$(a_{ij})_{m \times n}$	เมตริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งมีค่าภายในเมตริกซ์คือ a_{ij}
$\boldsymbol{a}$	เวคเตอร์ของสัมประสิทธิ์
$\boldsymbol{A}$	เมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์
argmax	ตัวแปรที่ทำให้ฟังก์ชั่นมีค่าสูงสุด
argmin	ตัวแปรที่ทำให้ฟังก์ชั่นมีค่าต่ำสุด
$\mathbb{C}$	เซตของจำนวนเชิงซ้อน
$\mathsf{cos}(x)$	ฟังก์ชั่น cosine ของ x
$\mathsf{cov}(X_1, X_2)$	ค่าความแปรปรวนร่วมของตัวแปรสุ่ม X_1 และ X_2
$\mathsf{diag}(a_1, \ldots, a_n)$	เมตริกซ์แกนขนาด $n \times n$
$e^x, \mathsf{exp}(x)$	ฟังก์ชั่นเอกซ์โปเนนท์ของ x
$\mathsf{E}(X)$	ค่าความคาดหวังของตัวแปรสุ่ม X
i	จำนวนจินตภาพ โดยที่ $i^2 = -1$
$f(x), \phi(x)$	ฟังก์ชั่นของ x
$f(\boldsymbol{x})$	ฟังก์ชั่นของ $\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{i}_n$	เวคเตอร์ขนาด $n \times 1$ ที่ทุกค่าเท่ากับ 1
$\boldsymbol{I}_n$	เมตริกซ์อัตลักษณ์ขนาด $n \times n$
$\mathbb{I}$	เซตของจำนวนเต็ม
$\mathbb{I}_+$	เซตของจำนวนเต็มบวก
$\mathbb{I}_-$	เซตของจำนวนเต็มลบ
$\mathbb{R}$	เซตของจำนวนจริง
$\mathbb{R}^n$	เซตของจำนวนจริงใน n มิติ
$\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_{--}$	เซตของจำนวนจริงบวก (จริงลบ) ซึ่งรวม 0
$\mathbb{R}_{++}, \mathbb{R}_{--}$	เซตของจำนวนจริงบวก (จริงลบ) ซึ่งไม่รวม 0
$\widehat{M}_{(k)}$	ไมเนอร์หลักที่ระดับ k
$\widehat{\widehat{M}}_{(k)}$	ไมเนอร์หลักแบบเรียงที่ระดับ k
$\mathsf{max} f(x)$	การหาค่า x ที่ทำให้ $f(x)$ มีค่าสูงสุด
$\mathsf{min} f(x)$	การหาค่า x ที่ทำให้ $f(x)$ มีค่าต่ำสุด
$\mathsf{lim}_{x \to a} f(x)$	ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าสู่ค่า a
$\mathsf{ln}(x)$	ฟังก์ชั่นลอกการิธึมฐาน e ของ x
$\mathsf{log}_a(x)$	ฟังก์ชั่นลอกการิธึมฐาน a ของ x
$\lambda(\boldsymbol{X})$	ค่าเฉพาะของเมตริกซ์จัตุรัส $\boldsymbol{X}$
π	อัตราส่วนของเส้นรอบวงหารด้วยเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม
$\mathbb{Q}$	เซตจำนวนตรรกยะ
$\rho(\boldsymbol{X})$	อันดับของเมตริกซ์ $\boldsymbol{X}$
$\mathsf{sin}(x)$	ฟังก์ชั่น cosine ของ x
$\mathsf{sgn}(x)$	เครื่องหมายของ x
$\mathsf{tan}(x)$	ฟังก์ชั่น tangent ของ x
$\mathsf{tr}(\boldsymbol{X})$	เทรสของเมตริกซ์ $\boldsymbol{X}$
$\boldsymbol{u}$	เวคเตอร์ $\boldsymbol{u}$
x	ตัวแปร x
x_i	ตัวแปร x ที่ตำแหน่ง i
x_{ij}	ตัวแปร x ที่แถว i และคอลัมน์ j
$(x_{ij})_{m \times n}$	เมตริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งมีค่าภายในเมตริกซ์คือ x_{ij}
$\boldsymbol{x}$	เวคเตอร์ของสัมประสิทธิ์
X	ตัวแปรสุ่ม X
$\boldsymbol{X}$	เมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์

$\boldsymbol{X}_{n\times m}$	เมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ที่มี n แถวและ m คอลัมน์
$\boldsymbol{X}'$	ทรานส์โพสของเมตริกซ์ $\boldsymbol{X}$
$\boldsymbol{X}^{-1}$	อินเวอร์สของเมตริกซ์ $\boldsymbol{X}$
$\boldsymbol{X}^{+}$	อินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรสของเมตริกซ์ $\boldsymbol{X}$
$\mathsf{var}(X)$	ค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X
$\mathbb{Z}$	เซตของจำนวนนับ
$=$	มีค่าเท่ากับ
$\equiv$	มีนิยามเท่ากับ
$\forall x$	สำหรับทุกค่าของ x
$\exists x$	สำหรับบางค่าของ x, มีค่า x ซึ่ง
$\in, \notin$	เป็นสมาชิกของ, ไม่เป็นสมาชิกของ
$\subset, \not\subset$	เป็นเซตย่อยของ, ไม่เป็นเซตย่อยของ
$\bigcup$	การยูเนียนของเซต
$\bigcap$	การอินเตอร์เซคของเซต
$\setminus$	การหาส่วนต่างของเซต
$\rightarrow$	เป็นเงื่อนไขเพียงพอที่นำไปสู่
$\leftrightarrow$	เป็นเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอที่นำไปสู่
$\overleftrightarrow{i,j}$	การสลับที่ i และ j
$+, -, \times, \div$	การบวก ลบ คูณ และหารจำนวนหรือตัวแปร
$\cdot$	การคูณของจำนวนหรือตัวแปร
$\otimes$	การคูณแบบโครเนกเกอร์
$\odot$	การคูณแบบอาร์ดามาร์ด
$(a, b]$	ช่วงจำนวนซึ่งมากกว่า a แต่น้อยกว่าหรือเท่ากับ b
$\|a\|$	ค่าสัมบูรณ์ของ x
$\|\boldsymbol{A}\|, \mathsf{det}(\boldsymbol{A})$	ตัวกำหนดของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$
$\|\boldsymbol{A}_j\|$	ตัวกำหนดของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ เมื่อคอลัมน์ที่ j ของ $\boldsymbol{A}$ ถูกแทนที่ด้วย $\boldsymbol{b}$ โดยที่ $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$
$\parallel \boldsymbol{x} \parallel$	ขนาดของเวคเตอร์ $\boldsymbol{x}$
Δx	การเปลี่ยนแปลงของ x
dx	การเปลี่ยนแปลงของ x ที่มีขนาดเล็กมาก
$\frac{df(x)}{dx}$	อนุพันธ์ของ $f(x)$ ต่อการเปลี่ยนแปลงของ x

$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$	อนุพันธ์ของ $f(\boldsymbol{x})$ ต่อการเปลี่ยนแปลงของ x_i เมื่อ $x_j, j \neq i$ คงที่
$\int_a^b f(x)dx$	อินทิกรอลของฟังก์ชั่น $f(x)$ เมื่อ $a \leq x \leq b$
∞	ค่าอนันต์
$\propto$	เป็นสัดส่วนกับ
$\sim$	มีการกระจายแบบ
$\prod_{i=1}^{n} x_i$	$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

คำนำ

แม้ผู้เขียนจะเป็นคนชอบอ่านหนังสือมากมาตั้งแต่อายุยังน้อย แต่กลับไม่กระตือรือร้นที่จะเขียนหนังสือสักเท่าไรนัก ยิ่งหากเป็นหนังสือวิชาการด้วยแล้ว ยิ่งไม่รู้สึกอยากจะเขียนเอาเสียเลยด้วยเหตุผลสำคัญสองประการด้วยกัน เหตุผลประการแรก คือ ความประหม่ากริ่งเกรงว่า เมื่อเวลาผ่านพ้นไปภายหน้า หนังสือที่ตนเองเขียนอาจเป็นหลักฐานบันทึกความไร้เดียงสา หรือความรู้ที่ไม่สมบูรณ์ของตนเองในอดีต ยิ่งเป็นหนังสือขนาดใหญ่เช่นหนังสือเล่มนี้ ก็ยิ่งมีพื้นที่สำหรับความผิดพลาดที่กว้างขวางมากขึ้น อันความผิดพลาดบางอย่าง เช่น การสะกดคำผิดนั้น แม้ผู้แต่งจะพอให้อภัยตนเองให้ในภายหลัง ก็ยังย่อมสะกิดให้รู้สึกรำคาญใจอยู่ทุกครั้งที่ได้หยิบหนังสือของตนเองขึ้นมาอ่าน แต่ความผิดพลาดบางอย่าง เช่น การคำนวณที่ผิดพลาดหรือเยิ่นเย้อ ซึ่งลดทอนความสง่างามในทางคณิตศาสตร์ที่พึงมีนั้น ย่อมเปรียบเสมือนบาปหนักที่ผู้แต่งหนังสือน้อยคนจะให้อภัยตนเองได้ สำหรับความหวาดพะวงในเรื่องนี้นั้น ผู้เขียนได้พยายามก้าวข้ามด้วยการลดอัตตาของตัวเองลงมาจนถึงจุดที่ได้ตระหนักว่า ทุกช่วงของชีวิตล้วนเป็นเวลาแห่งการเรียนรู้ ความผิดพลาดใดๆ ในหนังสือเล่มนี้ที่จะได้เปิดเผยต่อสาธารณชน ก็ขอให้ท่านผู้รู้แจ้งเตือนให้ผู้เขียนได้รับทราบ เสมือนหนึ่งเป็นคำติติงในความผิดพลาดของการบ้าน ที่เด็กนักศึกษาคนหนึ่งจะได้นำไปปรับปรุงให้ดีขึ้นในอนาคต

เหตุผลประการที่สองที่พอเรียกได้ว่าเป็นเหตุผลที่ควรแก่การพิจารณาอย่างลึกซึ้งยิ่งไปกว่าสิ่งที่อาจดูเป็นแต่เพียงความกังวลที่ไม่มีสาระดังเช่นเหตุผลข้อแรกก็คือ หนังสือคณิตศาสตร์ที่มีคุณค่าสูงควรอ่านในปัจจุบันนั้นนับว่ามีมาก ยิ่งเป็นหนังสือที่แต่งเป็นภาษาอังกฤษด้วยแล้ว ก็อาจกล่าวได้มีมากมายเกินกว่าจะสำรวจได้หมด ดังนี้ การจะเขียนหนังสือในเรื่องเดียวกันขึ้นมาอีกเล่มหนึ่งย่อมควรหาเหตุผลรองรับอย่างเพียงพอเสียก่อนว่า หนังสือเล่มนี้มีคุณค่าอย่างไร และได้บุกเบิกสิ่งใหม่ซึ่งมิอาจหาได้จากหนังสือก่อนๆ ไว้อย่างไร อันที่จริงแล้วความลังเลของคนรุ่นหลังที่จะ

กล้าสร้างสรรค์สิ่งใหม่ๆ เนื่องจากความกลัวว่างานของตนจะไม่อาจเทียบกับงานของบรรพชนผู้ซึ่งเป็นอัจฉริยะได้นั้น แลดูจะเป็นเรื่องปกติ ซึ่งท่านที่สนใจเรื่องดนตรีสากลคงอาจเคยได้ทราบเรื่องราวของเบโธเฟน (Ludwig van Beethoven, 1770-1827) ที่ได้กล่าวถึงฮานเดล (George Frederick Handel, 1685-1759) เอาไว้ว่า ฮานเดลเป็นนักดนตรีที่ยิ่งใหญ่ที่สุดเท่าที่โลกนี้เคยมีมา ที่เบโธเฟนจะต้องยอมคุกเข่าลงต่อหน้าหลุมฝังศพของฮานเดล และครั้นเบโธเฟนได้ล่วงลับไปแล้ว บรามส์ (Johannes Brahms, 1833-1897) ก็มีความรู้สึกต่อเบโธเฟนไม่ต่างไปจากความรู้สึกของเบโธเฟนที่เคยมีต่อฮานเดล จนถึงกับไม่กล้าประพันธ์เพลงประเภทซิมโฟนีอยู่ช่วงหนึ่ง ด้วยความคิดที่ว่าซิมโฟนีที่เบโธเฟนแต่งเอาไว้นั้น ถึงจุดสมบูรณ์ที่งดงามสูงสุดเท่าที่จะเป็นไปได้แล้ว และหากอัจฉริยะทางดนตรีเหล่านั้นยังมีความรู้สึกเช่นนั้นได้ ประสาอะไรกับผู้เขียนผู้ซึ่งไม่ใช่อัจฉริยะทางคณิตศาสตร์ การจะเขียนหนังสือทางคณิตศาสตร์สักเล่มหนึ่งจึงย่อมสร้างความประหม่าลังเลเป็นธรรมดา

และด้วยเหตุผลข้างต้นนี้ ความคาดหวังใดๆ ที่ผู้เขียนพึงประสงค์จากหนังสือเล่มนี้จึงย่อมไม่ใช่ความคาดหวังอย่างเพ้อฝันที่จะให้หนังสือเล่มนี้เป็นหนังสือทางคณิตศาสตร์ที่มีความสมบูรณ์เทียบเคียงได้กับหนังสือเกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้นในภาษาอังกฤษหลายเล่มที่เป็นที่รู้จักกันดี ไม่ว่าจะเป็นตำรารุ่นคลาสสิกดังเช่น Linear algebra ของ Shilov (1977) ตำราสมัยใหม่ดังเช่น Introduction to linear algebra ของ Strang (2016) หรือแม้แต่หนังสือทางคณิตศาสตร์สำหรับเศรษฐศาสตร์ที่มีเนื้อหาเกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้นที่กระชับและกะทัดรัดดังเช่น Mathematics for economists ของ Simon and Blume (1994) แต่จะเป็นเพียงความคาดหวังในขอบเขตที่เป็นไปได้อยู่บ้างต่อคุณค่าที่พึงมีจากหนังสือเล่มนี้ให้โลกได้มีหนังสือทางพีชคณิตเชิงเส้นในภาษาไทยอีกเล่มหนึ่งที่ปัจจุบันยังคงมีอยู่ไม่มากนัก และให้เป็นหนังสือทางพีชคณิตเชิงเส้นสำหรับนักเศรษฐศาสตร์และผู้ศึกษาวิชาเศรษฐศาสตร์ที่ถูกเขียนขึ้นเป็นภาษาไทย ซึ่งเท่าที่ผู้เขียนได้ทราบมานั้นยังไม่เคยมีมาก่อนแม้แต่เล่มเดียว

พีชคณิตเชิงเส้นคืออะไร

หากจะให้อธิบายว่าเนื้อหาภายในหนังสือเล่มนี้เกี่ยวกับอะไรก็พอจะสรุปอย่างสั้นได้ว่า หนังสือที่มีความยาวเกือบห้าร้อยหน้าเล่มนี้เกี่ยวข้องกับการหาคำตอบของสมการ ด้วยคำสรุปเช่นนี้ แม้ผู้อ่านที่มีความรู้คณิตศาสตร์แต่เพียงระดับพื้นฐานในระดับประถมศึกษาตอนปลายที่น่าจะเคยเรียนรู้วิธีการแก้สมการอย่างง่ายมาบ้างแล้ว ก็คงไม่รู้สึกแปลกแยกจากสิ่งที่จะได้ศึกษาต่อไปในหนังสือเล่มนี้เท่าใด

ในความเป็นจริงแล้ว วิชาคณิตศาสตร์ที่แม้จะดูทั้งซับซ้อนและลึกซึ้งในสายตาของบางคนนั้น

ล้วนเกี่ยวพันกับสองสิ่งด้วยกัน คือ ตัวเลข และตัวแปร โดยหากไล่เรียงกันตามวิวัฒนาการของแต่ละสาขาทางคณิตศาสตร์ แขนงความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นในลำดับแรกเห็นจะเป็นความรู้ในการนับ ถัดมาจึงเป็นการคำนวณ (arithmetics) ต่างๆ อันได้แก่ การบวก ลบ คูณ หาร ตัวเลข ซึ่งถือเป็นความรู้ทางคณิตศาสตร์พื้นฐานที่สำคัญต่อการดำรงชีวิตของทุกคนโดยไม่จำกัดวิชาชีพ และภายหลังจากที่มนุษย์เข้าใจการคำนวณตัวเลขในรูปแบบต่างๆ แล้ว ต่อมาจึงได้เรียนรู้การนำตัวแปรเข้ามาใช้ร่วมกับการคำนวณตัวเลข การนำแนวคิดเรื่องตัวแปรมาใช้ในทางคณิตศาสตร์นั้นถือได้ว่าเป็นการขยายขอบเขตวิชาคณิตศาสตร์ให้กว้างขวางออกไปมาก จากสถานะความเป็นวิชาที่ว่าด้วยตัวเลขซึ่งดูจะมีความเป็นรูปธรรมอยู่มาก ไปสู่สถานะของวิชาคณิตศาสตร์ในปัจจุบันที่ถือได้ว่ามีความเป็นนามธรรมสูง อีกทั้งยังได้ขยายประโยชน์ และความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ไปยิ่งกว่าเดิม เช่น หากสมมติให้เด็กคนหนึ่ง ออมเงินในกระปุกออมสินทุกวัน โดยในวันแรกออม 1 บาท วันที่สอง 2 บาท และวันที่สาม 3 บาท หากต้องการทราบเงินที่เด็กคนนี้สามารถออมได้ในกระปุกออมสินเมื่อครบสามวัน ก็สามารถใช้เครื่องมือทางการคำนวณตัวเลข คือ การบวก คำนวณออกมาได้เป็น $1 + 2 + 3 = 6$ เป็นต้น อย่างไรก็ดี หากได้ปรับโจทย์ในข้อนี้ให้ซับซ้อนขึ้น เช่น สมมติให้เด็กคนนี้ออมเงินทุกวัน และออมเงินในแต่ละวันมากกว่าเมื่อวาน 1 บาทไปเรื่อยๆ หากเด็กคนนี้ต้องการให้เงินออมเมื่อครบ 4 วันเท่ากับ 26 บาท จะต้องเริ่มออมเงินวันแรกเท่ากับเท่าใด จะเห็นได้ว่าการหาคำตอบในกรณีนี้มีความซับซ้อนกว่าในกรณีแรกอยู่พอสมควร และจะต้องเริ่มจากการตั้งโจทย์ที่นำเอาแนวคิดเรื่องตัวแปรมาประกอบ เช่น หากให้ x คือเงินที่เริ่มออมในวันแรก ความสัมพันธ์ทั้งหมดข้างต้นจะสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ คือ

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 26$$

ซึ่งให้คำตอบของสมการ คือ $x = 5$ กล่าวคือ เงินที่ออมวันแรกจะต้องเท่ากับ 5 บาท

การนำตัวแปรเข้ามาใช้อธิบายความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์เช่นนี้ ถือเป็นจุดกำเนิดของวิชาพีชคณิต (algebra) โดยหากความสัมพันธ์นั้นอยู่ในรูปของสมการเส้นตรง (linear) ที่ตัวแปรในสมการจะถูกนำมาบวกหรือลบกันเท่านั้น ก็สามารถกำหนดรายละเอียดให้ชี้ชัดลงไปได้อีกว่า เป็นวิชาพีชคณิตเชิงเส้น (linear algebra) อันวิชาพีชคณิตนั้นนับเป็นอีกแขนงหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ที่มีความเป็นมาอย่างยาวนาน อีกทั้งยังนับได้ว่าเป็นความรู้ที่เป็นสากล กล่าวคือ นักคณิตศาสตร์ทั้งจากยุโรปและเอเชียต่างได้ศึกษาพีชคณิตมาแต่โบราณ[1] อย่างไรก็ตาม การที่รูปแบบ

[1]แม้แต่คำว่า algebra นั้นก็มีรากศัพท์มาจากภาษาอาราบิค คือ al-jabr ซึ่งหมายถึง การย้ายค่าใดค่าหนึ่งจากด้านหนึ่ง ไปยังอีกด้านหนึ่งของสมการ ยิ่งในประเทศจีนด้วยแล้วนั้น ความรู้เกี่ยวกับพีชคณิตได้ถูกพัฒนาขึ้นมานับพันปี ดังปรากฏหลักฐานในคัมภีร์ทั้งเก้าว่าด้วยศิลปะแห่งตัวเลข (Nine chapters on mathematical art) ซึ่งถูกแต่งขึ้นราวหนึ่งพันถึงสองร้อยปีก่อนสากลศักราช (1,000-200 B.C.) หรือย้อนไปจากปัจจุบันราวสามพันปีมาแล้ว โดยเนื้อหา

และเนื้อหาทางพีชคณิตในหนังสือเล่มนี้ได้ถูกเรียบเรียงขึ้นตามแบบอย่างความรู้ทางตะวันตกนั้น หาใช่เพราะผู้เขียนเจตนาจะละเลยความรู้จากฝั่งตะวันออกแต่อย่างใดไม่ ด้วยว่าความรู้ทางพีชคณิตจากทั้งสองฝั่งต่างก็มีข้อเด่นดีที่แตกต่างกันออกไป โดยหากจะนับเอาหลักฐานทางเอกสารที่ปรากฏแล้ว ก็ดูเหมือนว่านักคณิตศาสตร์จากฝั่งตะวันออกนั้น ได้ตั้งคำถามที่น่าสนใจ และค้นพบแนวคิดที่สำคัญเกี่ยวกับพีชคณิตก่อน แต่หากจะพิจารณาการพัฒนาความรู้ในเรื่องต่างๆ ทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นระบบแล้ว ความรู้ทางคณิตศาสตร์จากฝั่งตะวันตกกลับดูจะมีวิวัฒนาการที่ต่อเนื่อง และตั้งอยู่บนพื้นฐานการคิดวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ที่ลึกซึ้งซึ่งน่าจะเหมาะกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์มากกว่า ด้วยว่าเนื้อหาในหนังสือหรือตำราคณิตศาสตร์จากฝั่งตะวันออกนั้นมักเป็นการรวบรวมผลลัพธ์ซึ่งเป็นข้อเท็จจริงเฉพาะที่มักปราศจากการพิสูจน์ ต่างจากปรัชญาคณิตศาสตร์จากฝั่งตะวันตกซึ่งนับจากยุคของยูคลิดแห่งอเล็กซานเดรีย (Euclid of Alexandria) แล้ว ข้อเสนอ (proposition) ทางคณิตศาสตร์ใดๆ ต่างล้วนต้องถูกพิสูจน์เสียก่อน จึงจะได้รับการยอมรับว่าเป็นจริง ดังนี้ แม้นักคณิตศาสตร์จีนจะได้ค้นพบว่า

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$$

มานานเกือบพันปีมาแล้ว แต่ก็เป็นเพียงข้อเสนอที่ปราศจากการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และถูกยอมรับว่าเป็นจริงเพียงเพราะไม่มีผู้ใดสามารถหาตัวอย่างมาหักล้างข้อเสนอนี้ได้เท่านั้น ต่างจากการพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ทางตะวันตก ซึ่งข้อเสนอใดๆ จะต้องมีการพิสูจน์ก่อน และต่อเมื่อผ่านการพิสูจน์แล้วจึงจะยอมรับว่าเป็นจริงในทุกกรณี

เนื้อหา

ผู้เขียนเรียบเรียงหนังสือเล่มนี้จากเอกสารคำสอนวิชา Linear algebra สำหรับนักศึกษาในหลักสูตรวิศวกรรมการเงิน ซึ่งเป็นหลักสูตรร่วมระหว่างนิด้าและลาดกระบัง หัวข้อที่เลือกใส่ไว้ในหนังสือเล่มนี้ จึงมุ่งเน้นเนื้อหาเกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้น ที่เป็นประโยชน์แก่ผู้ศึกษาวิชาเศรษฐศาสตร์ การบริหารธุรกิจ และการเงินเป็นหลัก และอยู่ในระดับที่เหมาะสมกับนักศึกษาปริญญาตรีที่มีพื้นฐานทางคณิตศาสตร์อยู่บ้าง อีกสามารถสอนให้จบได้ภายในหนึ่งภาคการศึกษา ในความเป็นจริงนั้น หนังสือพีชคณิตเชิงเส้นสำหรับเศรษฐศาสตร์ออกจะพิเศษกว่าหนังสือพีชคณิตเชิงเส้นทั่วไปในแง่ที่ว่า ทั้งตัวเนื้อหาและลำดับของเนื้อหาเกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้นที่เหมาะสมกับเศรษฐศาสตร์นั้นดูจะมีความเฉพาะเจาะจง และแตกต่างจากการศึกษาพีชคณิตเชิงเส้นทั่วไปค่อนข้างมาก ดังนี้ แม้

ในคัมภีร์บทที่เจ็ดนั้น ได้กล่าวถึงการหาคำตอบระบบสมการเชิงเส้น ที่ประกอบด้วยตัวแปรตั้งแต่สองถึงห้าตัวแปร และแนวทางการหาคำตอบของระบบสมการในลักษณะเดียวกันกับวิธีต่างๆ ทางตะวันตก เช่น การหาคำตอบด้วยวิธีลดทอนตัวแปรแบบเกาส์ ดังจะได้พิจารณาโดยละเอียดในบทต่อไป

หนังสือเกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้นส่วนใหญ่จะเริ่มจากการอธิบายแนวคิดเรื่องจุด จากนั้นจึงขยายแนวคิดเรื่องจุด ไปสู่แนวคิดเรื่องเส้นตรง ระนาบ และปริภูมิ แนวคิดเหล่านี้แม้เป็นแนวคิดพื้นฐานทางคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ที่นักคณิตศาสตร์มักกล่าวถึงเป็นลำดับแรก แต่อาจไม่ได้ยึดโยงกับแนวคิดทางเศรษฐศาสตร์ที่ผู้ศึกษาเศรษฐศาสตร์ระดับต้นคุ้นเคยนัก การจัดเรียงลำดับเนื้อหาเกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้นที่เริ่มจากการอธิบายแนวคิดเรื่องปริภูมิ จึงอาจไม่สามารถเหนี่ยวรั้งความสนใจจากผู้อ่านได้เพียงพอ หนังสือพีชคณิตเชิงเส้นที่ถูกเขียนขึ้นสำหรับผู้ศึกษาเศรษฐศาสตร์เป็นการเฉพาะดังเช่นหนังสือเล่มนี้ จึงจะได้จัดเรียงลำดับเนื้อหาเสียใหม่ โดยเริ่มจากเรื่องระบบสมการเชิงเส้นอันเป็นเครื่องมือสำคัญที่ใช้อธิบายแนวคิดทางเศรษฐศาสตร์ระดับพื้นฐานที่ผู้ศึกษาวิชาเศรษฐศาสตร์ทุกคนย่อมคุ้นเคย ทั้งแนวคิดทางเศรษฐศาสตร์จุลภาคเรื่องการหาดุลยภาพปริมาณและดุลยภาพราคาในตลาด แนวคิดทางเศรษฐศาสตร์มหภาคเรื่องการหาดุลยภาพของรายได้และผลกระทบจากตัวคูณ ตลอดจนแนวคิดทางเศรษฐมิติเรื่องการหาค่าของตัวประมาณการด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

การกล่าวถึงเรื่องระบบสมการเชิงเส้นในบทแรกยังมีข้อดีอีกประการหนึ่ง คือ แนวคิดเรื่องระบบสมการเชิงเส้นแบบง่าย เช่น สมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย 1 สมการและ 1 ตัวแปรนั้น นับเป็นแนวคิดพื้นฐานซึ่งเป็นที่คุ้นเคยกันอยู่โดยทั่วกันที่แม้ผู้มีความรู้ทางคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาก็สามารถหาคำตอบได้ไม่ยาก จึงเป็นการง่ายที่จะได้ขยายแนวคิดพื้นฐานดังกล่าวให้ครอบคลุมแนวคิดที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น เช่น ระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย 1 สมการและ 2 ตัวแปร จนกระทั่งสู่ระบบสมการเชิงเส้นทั่วไปที่ประกอบด้วย m สมการและ n ตัวแปรในที่สุด โดยผู้อ่านจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีต่างๆ ทั้งวิธีการแทนค่าตัวแปรซึ่งเป็นวิธีหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่ถูกสอนอย่างแพร่หลายในระดับมัธยมศึกษา และวิธีการลดทอนตัวแปรในแบบต่างๆ เช่น วิธีของเกาส์และวิธีของเกาส์และจอร์แดน เนื้อหาส่วนต่อไปในบทจะได้กล่าวถึงแนวคิดเรื่องอันดับซึ่งเป็นแนวคิดทางพีชคณิตเชิงเส้นที่สำคัญที่สุดเรื่องหนึ่งที่ตอบคำถามสำคัญต่างๆ ทางพีชคณิตเชิงเส้นแทบทั้งหมด ทั้งคำถามที่ว่า ระบบสมการเชิงเส้นใดๆ จะมีคำตอบหรือไม่ และหากมีคำตอบจะมีคำตอบเพียงชุดเดียวหรือมากมายไม่จำกัด โดยในส่วนท้ายของบทจะได้เชื่อมโยงแนวคิดเกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นที่ได้พิจารณาทั้งหมดเข้ากับการประยุกต์ทางเศรษฐศาสตร์ที่คุ้นเคยกันดี อาทิ การคำนวณหาจุดคุ้มทุน การหาดุลยภาพบางส่วน และดุลยภาพทั่วไปทางเศรษฐศาสตร์ ตารางปัจจัยการผลิต และผลผลิต ตลอดจนแนวคิดเรื่องดุลยภาพของรายได้และการบริโภคในเศรษฐศาสตร์มหภาค

เนื้อหาในบทที่สองจะได้กล่าวถึงพีชคณิตของเมตริกซ์ ทั้งการบวก ลบ และการคูณเมตริกซ์ในรูปแบบต่างๆ ตลอดจนนิยามและคุณสมบัติของตัวกำหนด และอินเวอร์สของเมตริกซ์จัตุรัส โดยในทางหนึ่งนั้นพีชคณิตของเมตริกซ์นับเป็นเครื่องมือสำคัญหนึ่ง ในการหาคำตอบของระบบ

สมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย m สมการและ n ตัวแปรในกรณีเฉพาะที่ $m = n$ ซึ่งนับเป็นการเชื่อมโยงแนวคิดเรื่องการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ที่ได้กล่าวถึงในบทที่หนึ่งได้อย่างต่อเนื่อง ส่วนในอีกทางหนึ่งนั้นความรู้เกี่ยวกับพีชคณิตของเมตริกซ์ ถือเป็นภาษาทางคณิตศาสตร์ระดับสูงที่ใช้ติดต่อและแลกเปลี่ยนความคิดกันระหว่างนักคณิตศาสตร์ ซึ่งมีความสำคัญเปรียบได้กับความสามารถในการสื่อสารด้วยภาษาสากล เช่น ภาษาอังกฤษเลยทีเดียว เนื่องด้วยแนวคิดทางคณิตศาสตร์ระดับสูงต่างๆ ทั้งแคลคูลัส การวิเคราะห์เชิงจริงและเชิงซ้อน ตลอดจนความน่าจะเป็นและสถิติ ที่ต้องการขยายแนวคิดใดๆ ในระดับพื้นฐานจากตัวแปรเดียว ไปสู่หลายตัวแปรนั้น มักนิยมแสดงในรูปเมตริกซ์ซึ่งสามารถสื่อความหมายได้อย่างกว้างขวางและกระชับกว่าการแจงแจงตัวแปรทีละตัวเป็นอย่างมาก เนื้อหาส่วนท้ายในบทที่สองยังครอบคลุมความรู้เกี่ยวกับพีชคณิตของเมตริกซ์ในระดับสูงขึ้น อันได้แก่ การหาอินเวอร์สของมอร์และเพนโรส และเชื่อมโยงแนวคิดสำคัญต่างๆ ในบทกับการประยุกต์ทางสถิติ และเศรษฐมิติ

เนื้อหาในบทที่สาม คือ เรื่องค่าเฉพาะของเมตริกซ์ แม้อาจถือเป็นความรู้ระดับสูงที่คาบเกี่ยวกับเนื้อหาในระดับหลังปริญญาตรี แต่ถือเป็นเครื่องมือสำคัญที่จำเป็นสำหรับนักศึกษาปริญญาตรีในหลักสูตรวิศวกรรมการเงิน ซึ่งไม่ช้าก็เร็วก็จะต้องศึกษาเกี่ยวกับการวิเคราะห์ในเชิงพลวัตและการหาคำตอบของสมการผลต่างเชิงเส้นต่อไป โดยเนื้อหาในบทนี้จะเริ่มกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉพาะและคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่มีลักษณะเหมือนกัน (homogeneous system of equations) จากนั้นจึงอธิบายนิยาม และการหาค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะของเมตริกซ์จัตุรัส คุณสมบัติของค่าเฉพาะ ตลอดจนการประยุกต์เรื่องค่าเฉพาะ เพื่อแปลงเมตริกซ์จัตุรัสทั่วไปให้เป็นเมตริกซ์แกน การหาคำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้น ตลอดจนนิยามและคุณสมบัติของเมตริกซ์ของมาร์คอฟ ทั้งนี้ ผู้เขียนได้เพิ่มเติมเนื้อหาเกี่ยวกับค่าเฉพาะเอาไว้ในบทนี้ของหนังสืออย่างเป็นเอกเทศ โดยไม่ได้นำเอาเนื้อหาในบทอื่นของหนังสือมาปะปนกับเรื่องค่าเฉพาะแต่อย่างใด ผู้อ่านที่มุ่งศึกษาความรู้เกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้นในระดับพื้นฐานย่อมสามารถข้ามเนื้อหาในบทนี้ได้ และสามารถศึกษาเนื้อหาในบทอื่นๆ ได้อย่างไม่ติดขัด

บทที่สี่ของหนังสือเป็นการเชื่อมโยงแนวคิดทางเรขาคณิต เช่น เส้น ระนาบ และปริภูมิ กับแนวคิดทางพีชคณิตเชิงเส้น เรื่องเวคเตอร์ สมการเชิงเส้น และระบบสมการเชิงเส้น [1] ความสัมพันธ์ระหว่าง

---

[1] ผู้อ่านที่เคยได้ศึกษาวิชาพีชคณิตเชิงเส้นจากหนังสือเล่มอื่น อาจสังเกตได้ว่าหนังสือพีชคณิตเชิงเส้นส่วนใหญ่ โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับผู้อ่านในสาขาคณิตศาสตร์หรือวิศวกรรมศาสตร์เป็นหลักนั้น มักจัดเอาเนื้อหาความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิดทางเรขาคณิต และพีชคณิตเชิงเส้นไว้เป็นลำดับแรก ผิดจากลำดับในหนังสือเล่มนี้ ซึ่งมีกลุ่มผู้อ่านหลักคือนักศึกษาเศรษฐศาสตร์และการเงิน เนื้อหาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างเรขาคณิตและพีชคณิตเชิงเส้นดังกล่าว จึงจะถูกจัดไว้เป็นลำดับสุดท้าย ความแตกต่างที่ออกจะดูสุดโต่งเช่นที่ว่านี้ ดูจะคล้องจองกันไปกับข้อเท็จจริงที่ว่า การประยุกต์เครื่องมือทางพีชคณิตเชิงเส้นในทางวิศวกรรมศาสตร์และเศรษฐศาสตร์นั้น มีความแตกต่างกันค่อนข้างมาก โดยในทางวิศวกรรมศาสตร์นั้น แนวคิดเรื่องเวคเตอร์เป็นเครื่องมือเพื่ออธิบายแนวคิดเรื่อง มวลและกำลังในทางฟิสิกส์ การอธิบายความสัมพันธ์

เรขาคณิตและพีชคณิตเชิงเส้นนั้นเป็นสิ่งที่จะถูกละเลยไปไม่ได้สำหรับนักเศรษฐศาสตร์ โดยในทางหนึ่งความรู้เกี่ยวกับเส้น ระนาบ และปริภูมิเป็นสิ่งสำคัญที่เสริมความเข้าใจเรื่องระบบสมการเชิงเส้นและช่วยฉายภาพเกี่ยวกับแนวคิดเรื่องคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในบทก่อนๆ ได้ชัดเจนขึ้น อาทิ คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น 2 สมการและ 3 ตัวแปรซึ่งมีได้เพียง 2 กรณีคือไม่มีคำตอบหรือมีคำตอบมากมายไม่จำกัดนั้น หากจะตีความในเชิงเรขาคณิตแล้วก็เปรียบได้กับระนาบ 2 แผ่นใน 3 มิติ ซึ่งหากทั้งสองระนาบนี้ขนานกันก็จะไม่มีคำตอบ แต่หากทาบกันจะมีคำตอบมากมายไม่จำกัดเท่ากับทุกจุดที่อยู่บนระนาบ หรือหากตัดกันก็จะมีคำตอบมากมายไม่จำกัดเท่ากับทุกจุดที่อยู่บนเส้นที่เกิดจากการตัดกันของทั้งสองระนาบดังนี้เป็นต้น กรณีดังกล่าวยังแสดงให้เห็นอย่างเป็นรูปธรรมว่าเงื่อนไขที่จำเป็นที่ระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรจะมีคำตอบเพียงชุดเดียวหรือตัดกันเพียงหนึ่งจุดได้นั้น จะต้องมีสมการอย่างน้อย 3 สมการซึ่งสร้างระนาบขึ้น 3 ระนาบ และเงื่อนไขที่เพียงพอที่ทั้งสามระนาบจะตัดกันได้เพียงหนึ่งจุดจะต้องกำหนดให้ระนาบสองระนาบตัดกันเป็นเส้นตรงขึ้นมาหนึ่งเส้น จากนั้นจึงกำหนดให้อีกระนาบหนึ่งตัดกับเส้นตรงดังกล่าวเพียงหนึ่งจุด

ความรู้เรื่องเรขาคณิตยังช่วยฉายภาพเกี่ยวกับแนวคิดสำคัญทางเศรษฐศาสตร์ให้เด่นชัดยิ่งขึ้น เช่น แนวคิดเรื่องเส้นงบประมาณ (budget line) ในเศรษฐศาสตร์จุลภาคที่คุ้นเคยกันนั้น หากพิจารณาด้วยความรู้ทางเรขาคณิตวิเคราะห์จะเห็นได้ว่า เส้นงบประมาณเป็นแนวคิดในกรณีที่มีสินค้าเพียง 2 ประเภท และหากขยายแนวคิดเรื่องนี้ให้กว้างขึ้นครอบคลุมสินค้า 3 ประเภท คำที่เหมาะสมย่อมควรเป็นระนาบงบประมาณ (budget plane) หรือหากเป็นกรณีทั่วไปสำหรับสินค้า n ประเภทก็ควรเป็นระนาบบนงบประมาณ (budget hyperplane) เสียมากกว่า ผู้เข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างเรขาคณิตวิเคราะห์และพีชคณิตเชิงเส้นจึงย่อมทราบว่าการใช้คำว่าเส้นงบประมาณในทางเศรษฐศาสตร์นับเป็นเพียงการเรียกแบบลำลอง ซึ่งผู้ที่มุ่งเน้นความถูกต้องในทางคณิตศาสตร์อย่างเคร่งครัดอาจพิจารณาปรับคำเรียกให้สอดคล้องกับแนวคิดทางเรขาคณิตต่อไป อนึ่ง แม้เนื้อหาเรื่องปริภูมิและปริภูมิย่อยในบทที่สี่จะจัดเป็นความรู้ชั้นสูงทางพีชคณิตเชิงเส้นที่จำเป็นสำหรับผู้ศึกษาวิชาเศรษฐศาสตร์ทฤษฎี ทฤษฎีเกม คณิตเศรษฐศาสตร์ และเศรษฐมิติในระดับปริญญาเอก แต่ผู้ศึกษาวิชาเศรษฐศาสตร์ที่มุ่งศึกษาเศรษฐศาสตร์ประยุกต์แขนงต่างๆ ย่อมสามารถพิจารณาข้ามเนื้อหาในส่วนนี้ไปได้

เนื้อหาในบทที่ห้าซึ่งเป็นบทสุดท้ายของหนังสือเล่มนี้เป็นการแนะนำให้ผู้อ่านรู้จักการใช้คำสั่งต่างๆ ในโปรแกรม R เพื่อประกอบการศึกษาวิชาพีชคณิตเชิงเส้น การใช้โปรแกรมทางคอมพิวเตอร์

ระหว่างเรขาคณิตและพีชคณิตเชิงเส้นแต่เนิ่นๆ จึงดูเป็นการเหมาะสมกว่า ส่วนในทางเศรษฐศาสตร์ซึ่งมุ่งเน้นการใช้แนวคิดทางพีชคณิตเชิงเส้น ในฐานะเครื่องมือเพื่อหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นหรือดุลยภาพของระบบเศรษฐกิจนั้น การกล่าวถึงระบบสมการเชิงเส้นเป็นลำดับแรก ย่อมดูจะช่วยผนวกความสนใจของผู้ศึกษาเข้ากับเนื้อหาในหนังสือได้ดีกว่า

ประกอบการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์บริสุทธิ์แม้ดูเป็นความคิดที่ค่อนข้างแปลกใหม่เมื่อเทียบกับการใช้โปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ประกอบการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ เช่น วิชาสถิติ ทั้งนี้อาจด้วยเหตุผลหนึ่งที่ว่าคณิตศาสตร์บริสุทธิ์มักมุ่งเน้นผลลัพธ์ในเชิงนามธรรม ต่างจากคณิตศาสตร์ประยุกต์ซึ่งอาจมุ่งเน้นผลลัพธ์ในเชิงที่เป็นรูปธรรมกว่า อาทิ ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นนั้น คำถามในเชิงคณิตศาสตร์บริสุทธิ์อาจมุ่งเน้นไปที่การศึกษาเงื่อนไขที่นำไปสู่การได้คำตอบในลักษณะต่างๆ ต่างจากคำถามในเชิงประยุกต์ซึ่งอาจสนใจแต่เพียงคำตอบที่ได้ ด้วยเหตุผลเช่นนี้ การศึกษาวิชาคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ในแขนงต่างๆ ที่ผ่านมาจึงอาจไม่ได้ให้ความสำคัญกับการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทางคณิตศาสตร์เพื่อประกอบการศึกษาเท่าที่ควร ซึ่งอย่างไรก็ตามหากจะพิจารณาประเด็นนี้ให้ถี่ถ้วนแล้วย่อมเห็นได้ไม่ยากว่า ความรู้เกี่ยวกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทางคณิตศาสตร์สามารถมีส่วนช่วยในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ เช่น พีชคณิตเชิงเส้นได้อย่างมากด้วยเหตุผลหลายประการด้วยกัน โดยในประการแรกโปรแกรมทางคณิตศาสตร์สามารถใช้เป็นเครื่องตรวจทานความถูกต้องของคำตอบในแบบฝึกหัดที่มุ่งเน้นการคำนวณ เช่น การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่มีค่าสัมประสิทธิ์เป็นตัวเลข ตลอดจน การบวก ลบ คูณ การหาตัวกำหนด อินเวอร์สและค่าเฉพาะของเมตริกซ์ นอกจากนี้ การใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ยังเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการคำนวณที่ยุ่งยากและซับซ้อน เช่น จากตัวแบบทางเศรษฐมิติ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$ เมื่อ $\boldsymbol{y}$ คือ เวคเตอร์ของตัวแปรตาม $\boldsymbol{X}$ คือ เมตริกซ์ของตัวแปรอิสระซึ่งมีเวคเตอร์ของพารามิเตอร์คือ $\boldsymbol{\beta}$ และ $\boldsymbol{\epsilon}$ คือ เวคเตอร์ของค่าความคลาดเคลื่อน แม้การแสดงให้เห็นว่าตัวประมาณการด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด คือ

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \text{argmin } \boldsymbol{\epsilon}'\boldsymbol{\epsilon}$$

จะเป็นคำถามในเชิงวิเคราะห์ ซึ่งมีคำตอบ คือ

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y})$$

แต่การคำนวณเพื่อให้ได้ค่า $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ที่เป็นตัวเลขนั้นกลับเป็นเรื่องซับซ้อนมาก โดยเฉพาะในกรณีที่ $\boldsymbol{y}$ และ $\boldsymbol{X}$ มีขนาดใหญ่ ดังนี้ การใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์เพื่อการคำนวณจึงเป็นสิ่งจำเป็นที่เชื่อมโยงและต่อยอดผลที่ได้จากการหาคำตอบในเชิงวิเคราะห์สู่การประยุกต์ต่างๆ นอกจากนี้ ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ยังเป็นพื้นฐานสำคัญของวิธีการในเชิงตัวเลข (numerical method) ซึ่งเป็นเครื่องมือทางเศรษฐศาสตร์ที่แพร่หลายมากในปัจจุบันที่นักเศรษฐศาสตร์ควรคุ้นเคยตามสมควร

ส่วนท้ายของหนังสือเล่มนี้ประกอบด้วยภาคผนวกสองส่วน ส่วนแรกจะเป็นการรวบรวมความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นสำหรับศึกษาวิชาพีชคณิตเชิงเส้นในหนังสือเล่มนี้ซึ่งครอบคลุมเนื้อหา

อาทิ เซต ฟังก์ชั่น แคลคูลัสเบื้องต้น และจำนวนเชิงซ้อน ทั้งนี้ การที่ผู้เขียนได้ตัดสินใจเอาเนื้อหาเรื่องแคลคูลัสผสมเข้ากับเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นไปด้วยนั้นก็ด้วยว่าแคลคูลัสเป็นเครื่องมือที่สำคัญยิ่งของวิชาเศรษฐศาสตร์ การกล่าวถึงพีชคณิตเชิงเส้นและแคลคูลัสไปพร้อมกันจึงน่าจะช่วยเชื่อมโยงให้เห็นทั้งความสำคัญและความสัมพันธ์ระหว่างทั้งสองแนวคิดนี้เข้าด้วยกัน และส่วนที่สองจะเป็นการเฉลยแบบฝึกหัดท้ายบททุกข้อโดยละเอียด ซึ่งอาจถือเป็นข้อแตกต่างที่สำคัญประการหนึ่งของหนังสือเล่มนี้เมื่อเทียบกับหนังสือทางคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ที่มักไม่เฉลยแบบฝึกหัดไว้อย่างสมบูรณ์

อนึ่ง โดยที่ผู้เขียนมุ่งหวังให้เนื้อหาในหนังสือเล่มนี้สอดคล้องกับชื่อของหนังสือ คือ พีชคณิตเชิงเส้นสำหรับเศรษฐศาสตร์ จึงได้พยายามสอดแทรกการประยุกต์ทางเศรษฐศาสตร์ สำหรับแต่ละหัวข้อทางพีชคณิตเชิงเส้นเท่าที่เป็นไปได้ ซึ่งแม้จะมีข้อดีที่ช่วยชี้ให้ผู้ศึกษาสามารถเห็นได้โดยทันทีว่า หัวข้อดังกล่าวสามารถประยุกต์กับแนวคิดทางเศรษฐศาสตร์เรื่องใดได้บ้าง แต่อาจมีข้อจำกัดอยู่บ้างในแง่ที่ว่าผู้ที่สามารถอ่านหนังสือเล่มนี้ทั้งเล่มได้อย่างไม่ติดขัดนั้น เห็นจะต้องมีความรู้ทั้งทางคณิตศาสตร์และเศรษฐศาสตร์ระดับหนึ่ง อย่างไรก็ตาม เนื้อหาในแต่ละบทต่างถูกออกแบบให้ส่วนที่เป็นความรู้ทางพีชคณิตเชิงเส้น และส่วนที่เป็นการประยุกต์ในทางเศรษฐศาสตร์ถูกแบ่งแยกจากกันอย่างเป็นเอกเทศ ซึ่งผู้อ่านที่เริ่มศึกษาเศรษฐศาสตร์ในระดับเบื้องต้น ย่อมสามารถศึกษาเฉพาะการประยุกต์อย่างง่ายเป็นบางหัวข้อ และข้ามการประยุกต์ส่วนที่ซับซ้อนไปได้โดยไม่ติดขัดกับเนื้อหาในส่วนอื่นๆ แต่อย่างใด

รูปแบบ

ตำราคณิตศาสตร์ที่ถือเป็นตำราคลาสสิคของโลกคณิตศาสตร์ไม่ว่าแขนงใดหรือถูกเขียนขึ้นในยุคสมัยใดมักมีลักษณะร่วมกันข้อหนึ่ง คือ มักถูกเขียนขึ้นด้วยภาษาที่สั้นและกระชับ ด้วยว่าความสั้นและกระชับเป็นองค์ประกอบหนึ่งของความงามทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นสากลในทุกยุคสมัย ดังนี้ เนื้อหาในตำราหรือบทความทางคณิตศาสตร์ที่งดงามจึงมักถูกจัดเรียงกันไปตามโครงสร้างแบบสามส่วน คือ นิยาม ทฤษฎีบท และการพิสูจน์ และหากจะพิจารณาในแง่นี้ หนังสือของผู้เขียนเล่มนี้ก็เห็นจะห่างไกลจากความงามทางคณิตศาสตร์ที่เป็นอุดมคตินั้นอยู่มาก ด้วยว่าผู้เขียนอาจไม่ได้ใช้ภาษาที่กระชับเท่าใดนัก และมุ่งหวังเป็นอย่างยิ่งให้ความเยิ่นเย้อใดๆ ของคำอธิบายในหนังสือที่เกินเลยมานั้นสร้างความเข้าใจในสิ่งที่กำลังอธิบายอยู่กับผู้อ่านได้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ ในทางกลับกันนั้น หนังสือเล่มนี้แม้ถือได้ว่ามีความยาวและเนื้อหาค่อนข้างมาก แต่กลับมีเพียงห้าบท และหากตัดเอาเนื้อหาในบทที่ห้าซึ่งว่าด้วยการศึกษาโปรแกรม R ออกไปแล้ว ก็อาจกล่าวได้ว่าหนังสือเล่มนี้มีเพียงสี่บทด้วยกัน ลักษณะข้อนี้ดูจะแตกต่างจากหนังสือพีชคณิตเชิงเส้นอื่นๆ ที่มักประกอบด้วยเนื้อหานับสิบบท การจำแนกเนื้อหาในหนังสือเล่มนี้ให้กระชับเหลือเพียงไม่กี่บทนั้น อันที่จริง

แล้วก็เป็นไปตามเจตนาของผู้เขียนที่ต้องการฉายภาพรวมของเนื้อหาวิชาพีชคณิตเชิงเส้นสำหรับเศรษฐศาสตร์ให้เป็นหมวดหมู่ที่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กัน ด้วยต้องการเน้นย้ำว่าเนื้อหาในแต่ละบทล้วนมุ่งอธิบายแนวคิดเรื่องการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ในรูปแบบต่างๆ กัน โดยหากบทที่หนึ่ง คือ การกล่าวถึงระบบสมการเชิงเส้นในภาพรวมแล้ว ก็อาจพิจารณาให้เห็นความเชื่อมโยงไปยังบทต่อๆ ไปได้ว่า บทที่สอง คือ ระบบสมการเชิงเส้นที่จำนวนสมการและตัวแปรเท่ากัน บทที่สาม คือ ระบบสมการผลต่างเชิงเส้น และบทที่สี่ คือ ระบบสมการเชิงเส้นในเชิงเรขาคณิต ดังนี้ แม้แนวคิดต่างๆ ทางพีชคณิตเชิงเส้นซึ่งได้ปรากฏในหนังสือเล่มนี้จะมากและหลากหลาย แต่ต่างก็ได้ถูกจัดกลุ่มเอาไว้ในสี่บทนี้โดยมุ่งหวังความกระชับของเนื้อหาเป็นสำคัญ ซึ่งอาจเป็นรูปแบบที่ผิดไปจากตำราทางพีชคณิตเชิงเส้นหลายเล่มที่มีมากบท และมักนิยมแยกเอาแนวคิดบางเรื่อง เช่น ตัวกำหนด หรือ อินเวอร์สของเมตริกซ์ ออกมาเป็นบทเฉพาะ

เอกลักษณ์หนึ่งของหนังสือเล่มนี้ที่ผู้เขียนไม่ใคร่ได้เห็นในตำราภาษาไทยเท่าไรนัก คือ การสอดแทรกเกร็ดความรู้ทางประวัติศาสตร์เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังศึกษาอยู่นั้นๆ โดยเฉพาะประวัติของผู้ค้นพบเรื่องดังกล่าวให้ผู้อ่านได้รู้จักไปพร้อมกับความรู้ในทางทฤษฎี การได้ศึกษาประวัติศาสตร์นั้นมีข้อดีอยู่หลายประการ ทั้งในแง่การเรียงร้อยหัวข้อต่างๆ ให้เป็นระบบและง่ายต่อการเข้าใจถึงที่มาและที่ไปของเรื่องนั้นๆ อีกทั้งยังมีส่วนช่วยกระตุ้นให้ผู้อ่านเกิดความมุมานะที่จะศึกษาเรื่องที่บรรพบุรุษแห่งความคิดได้วางรากฐานเอาไว้ในอดีต และต่อยอดขอบเขตของความรู้ในปัจจุบันให้ขยายต่อไปในอนาคต ดังนี้ หากผู้อ่านท่านใดรู้สึกว่าเรื่องตรีโกณมิติเป็นเรื่องยาก แต่เมื่อได้ตระหนักว่าเรื่องตรีโกณมิติ เป็นความรู้ที่ถูกพัฒนาขึ้นมานับพันปีแล้ว และในอดีตถือเป็นความรู้อันศักดิ์สิทธิ์ที่น้อยคนจะได้รับอนุญาตให้ศึกษาเรียนรู้ ก็อาจตระหนักถึงหน้าที่ของคนรุ่นหลังที่อย่างน้อยควรศึกษาเรื่องดังกล่าวให้เข้าใจให้สมกับความพยายาม และอัจฉริยภาพของคนรุ่นก่อนที่ได้บุกเบิกและสั่งสมความรู้ไว้ หรือในกรณีของการหาคำตอบของสมการพหุนามนั้น แม้การหาคำตอบของสมการกำลังสอง เช่น $ax^2 + bx + c = 0$ จะถูกค้นพบนับพันปีมาแล้ว แต่การหาคำตอบของสมการกำลังสาม คือ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ กลับเป็นเรื่องยากกว่ามาก และเพิ่งถูกค้นพบเพียงไม่กี่ร้อยปีที่ผ่านมา ในเฉพาะบางกรณีเท่านั้น ผู้เขียนจึงหวังเป็นอย่างยิ่งว่า การได้ทราบถึงขอบเขตทางประวัติศาสตร์ของความรู้เช่นที่ว่านี้ จะช่วยกระตุ้นทั้งความสนใจและความหวังของผู้อ่านซึ่งมีศักยภาพเป็นนักคณิตศาสตร์รุ่นใหม่ให้มีส่วนร่วมในการขยายองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ให้ไกลออกไปเท่าที่จะทำได้

อนึ่ง โดยที่งานเขียนชิ้นนี้เป็นหนังสือไม่ใช่บทความวิจัยหรือบทความทางวิชาการ แนวทางการอ้างอิงความรู้ก่อนๆ ที่ถูกบรรจุไว้จึงเป็นไปตามรูปแบบการอ้างอิงในแบบฉบับของหนังสือ กล่าวคือ หากเป็นเรื่องที่เป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายและสามารถพบเห็นได้ในหนังสือหรือตำราทั่วไปก็จะไม่ถูกอ้างอิงเป็นการเฉพาะ เช่น หากจะกล่าวถึงทฤษฎีบทของปิทาโกรัสซึ่งเป็นที่รู้จักกันดี

ก็จะเพียงระบุว่าทฤษฎีบทของปิทาโกรัสนี้ว่าไว้อย่างไรโดยไม่มีการอ้างอิงที่มา เพราะหากจะให้อ้างอิงอย่างถูกต้อง ก็ย่อมต้องอ้างอิงย้อนกลับไปถึงปิทาโกรัส แต่หากเป็นความรู้เฉพาะที่มิได้เป็นที่ทราบกันโดยทั่วกันก็จะได้อ้างอิงไว้ให้ผู้สนใจได้ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติม เช่น การพิสูจน์ทฤษฎีบทของปิทาโกรัสซึ่งนับแต่ได้มีการบัญญัติทฤษฎีบทนี้มา ก็ได้มีบทพิสูจน์ออกมานับร้อยบท แต่หากจะกล่าวถึงบทพิสูจน์แบบใดเป็นการเฉพาะก็จะได้อ้างอิงผู้ที่ได้เสนอบทพิสูจน์นั้นเป็นคนแรกไว้[1]

ผู้อ่านที่ช่างสังเกตอาจพิจารณาเห็นการใช้รูปแบบอักษรที่แตกต่างกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งคำและตัวเลขในภาษาอังกฤษที่อาจมีการใช้รูปแบบอักษรคละกันไปพอสมควร ในข้อนี้ ผู้เขียนใคร่ย้ำว่าการใช้รูปแบบอักษรที่ปะปนกันไปเช่นนี้นั้น ใช่ว่าจะเป็นเพราะความบกพร่องที่ไม่ได้ตรวจทานต้นฉบับให้แบบอักษรเป็นไปอย่างมีเอกภาพแต่อย่างใดไม่ แต่เป็นไปด้วยเจตนาของผู้เขียนที่ต้องการใช้แบบอักษรที่แตกต่างกันแทนความหมายที่แตกต่างกันของคำหรือตัวเลข โดยหากเป็นคำในภาษาอังกฤษในวงเล็บเพื่ออธิบายให้ได้ทราบว่า คำในภาษาไทยก่อนหน้านั้นแปลมาจากคำในภาษาอังกฤษว่าอะไร อาทิ ตัวแปร (variable) หรือ ชื่อในภาษาอังกฤษ อาทิ คาร์ล ฟรีดริคช เกาส์ (Carl Friedrich Gauss) หรือ ตัวเลขที่ระบุปี อาทิ ค.ศ. 1850 หรือ ตัวเลขที่ระบุบทหรือหัวข้อ อาทิ หัวข้อที่ 1.1 นิยามที่ 2 ก็จะใช้อักษรแบบหนึ่ง และหากเป็นตัวแปร อาทิ $x, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}$ หรือตัวเลขที่แทนจำนวนในทางคณิตศาสตร์ เช่น อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ก็จะใช้อักษรอีกแบบหนึ่งเป็นต้น

คำส่งท้าย

คำนำของหนังสือเล่มนี้แม้จะขึ้นต้นด้วยเหตุผลที่สร้างความพะวงใจของผู้เขียนจนไม่อยากจะเขียนหนังสือ แต่หากจะไม่กล่าวถึงเหตุผลที่สร้างแรงบันดาลใจที่จะเขียนหนังสือเล่มนี้เลยก็ย่อมจะขาดความสมบูรณ์ไป มีสำนวนหนึ่งในภาษาอังกฤษที่แพร่หลายมากในกลุ่มนักวิชาการว่า “Publish or perish!” ซึ่งพอจะถอดความเป็นภาษาไทยได้ว่า นักวิชาการผู้ไม่มีผลงานย่อมไม่อาจอยู่รอดได้ ความตั้งใจของผู้เขียนเมื่อได้เริ่มเขียนหนังสือเล่มนี้อาจเรียกได้ว่าเป็นความมุ่งหมายดังความในสำนวนข้างต้นของนักวิชาการคนหนึ่งที่เขียนหนังสือขึ้นมาเล่มหนึ่งเพื่อให้ตนอยู่รอดในวงวิชาการเพียงเท่านั้น ครั้นต้นปี 2021 ที่ประเทศไทยต้องเผชิญกับการระบาดของโรคไวรัสอุบัติใหม่โควิด 19 อย่างรุนแรงจนมหาวิทยาลัยทุกแห่งต้องประกาศให้กิจกรรมทุกอย่าง ทั้งการเรียนการสอน และการประชุม ต้องกระทำผ่านสื่อออนไลน์เท่านั้น อีกทั้งกรุงเทพในขณะนั้นได้ประสบปัญหาการระบาดเป็นวงกว้าง ผู้เขียนจึงได้ย้ายไปอยู่ที่หัวหินเป็นเวลาหนึ่งปีโดยจะเดินทางเข้า

[1] อนึ่ง ข้อเท็จจริงสำคัญต่างๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งที่เกี่ยวกับประวัตินักคณิตศาสตร์ที่อยู่ในเนื้อหาของหนังสือ เป็นการสรุปโดยผู้เขียนจากหนังสือและบทความทางวิชาการหลายเรื่อง ซึ่งผู้สนใจสามารถค้นคว้ารายละเอียดเพิ่มเติม และย้อนพิจารณาที่มาของข้อเท็จจริงแต่ละเรื่องได้จากเอกสารอ่านประกอบเพิ่มเติมท้ายบท

กรุงเทพเพียงไม่กี่ครั้งเพื่อรับวัคซีนที่ได้จัดสรรให้กับบุคลากรทางการศึกษาเป็นลำดับต้นๆ เท่านั้น

การระบาดของโรคครั้งใหญ่คราวนั้นถือได้ว่ามีส่วนเปลี่ยนทัศนคติของผู้เขียนเป็นอย่างมาก ด้วยว่าเมื่อได้พบเห็นความยากลำบากของผู้คนรอบข้างทั้งจากผลกระทบจากการขาดรายได้ในช่วงที่รัฐจำเป็นต้องประกาศห้ามสัญจรออกนอกบ้านเพื่อควบคุมการระบาด และความหวังของทุกคนที่จะให้ตนได้รับวัคซีนไม่ต่างไปจากผู้โดยสารในเรือที่กำลังจะจมที่พยายามทุกหนทางให้ได้ใส่เสื้อชูชีพ ครั้นมาเปรียบกับตนที่มีรายได้สม่ำเสมอ สามารถทำงานจากที่ใดก็ได้ ได้รับอิสระทั้งเวลาและความคิด และได้โอกาสเป็นกลุ่มแรกๆ ที่เข้าถึงวัคซีนก็ยิ่งย้ำให้ทั้งรู้สึกละอายและสำนึกได้ว่าอภิสิทธิ์ที่ยิ่งใหญ่เช่นนี้ย่อมต้องคู่กันกับหน้าที่ของความเป็นบัณฑิตที่จะต้องสืบสานความรู้เดิมไว้ไม่ให้สูญหายและสร้างความรู้ใหม่ให้ขยายเติบโต จึงอาจกล่าวได้ว่า หนังสือซึ่งแม้กำเนิดจากความมุ่งหมายให้ได้อยู่รอดในวงวิชาการเล่มนี้ ได้ถูกพัฒนาขึ้นเรื่อยๆ จนเป็นผลผลิตจากความสำนึกในหน้าที่ของผู้เขียนที่มีต่อสังคมในที่สุด

ท้ายนี้ ผู้เขียนใคร่ขอขอบคุณพ่อและแม่ของผู้เขียนที่ได้กรุณาพยายามอ่านร่าง และแก้ไขคำผิดหรือขาดตกบกพร่องในหนังสือเล่มนี้ และขออุทิศหนังสือเล่มนี้ให้ทั้งพ่อและแม่สำหรับความรักและกำลังใจที่ได้มอบให้กับผู้เขียนตลอดมา เมื่อครั้งผู้เขียนยังเป็นนักศึกษาในมหาวิทยาลัยต่างๆ ก็ได้สังเกตเห็นว่าหนังสือที่อาจารย์ของผู้เขียนแต่ง ต่างล้วนถูกอุทิศให้กับผู้เป็นที่รักเสมือนเป็นธรรมเนียมปฏิบัติตามอย่างกันไปเท่านั้น ครั้นเมื่อผู้เขียนได้เขียนหนังสือเล่มนี้สำเร็จจึงได้เข้าใจความหมายลึกซึ้ง ที่แฝงในคำอุทิศเหล่านั้นได้ดียิ่งขึ้น ว่าด้วยวิสัยของผู้ที่รักในการเรียนรู้แล้ว การได้เขียนหนังสือของตนเองจนสำเร็จลงได้นั้นถือเป็นความภูมิใจยิ่งไปกว่ายศ ตำแหน่ง หรือทรัพย์ใดๆ ดังนี้ การอุทิศสิ่งที่ภูมิใจถึงเพียงนี้ให้คนที่รักที่สุดจึงย่อมเป็นเรื่องธรรมดา

ทองใหญ่ อัยยะวรากูล
19 ตุลาคม 2567

บทที่ 1

ระบบสมการเชิงเส้น

แนวคิดที่เก่าแก่ที่สุดในทางคณิตศาสตร์ คือ การนับ ถัดจากการนับ จึงเป็นการคำนวณ (arithmetics) ซึ่งหมายรวมทั้งการคำนวณอย่างง่าย อาทิ การบวก ลบ คูณ หรือหาร จนถึงการคำนวณที่ซับซ้อนขึ้น เช่น การยกกำลัง หรือการหารากในลำดับต่างๆ การนับและการคำนวณถือเป็นพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นในการดำรงชีวิตที่ทุกคนจำเป็นต้องรู้ ไม่ต่างจากความจำเป็นที่จะต้องเรียนรู้การใช้ภาษาหนึ่งๆ เพื่อติดต่อสื่อสารในชีวิตประจำวัน โดยหากพิจารณาในแง่ความเป็นสากลแล้วอาจกล่าวได้ว่าความรู้เรื่องการคำนวณถือเป็นสิ่งจำเป็น ที่ใช้กันอย่างกว้างขวางเสียยิ่งไปกว่าภาษาที่ใช้สื่อสารกันเสียอีก ด้วยว่าภาษานั้นเป็นเรื่องจำเพาะและแตกต่างกันในแต่ละสังคม แม้กระทั่งภาษาที่ได้รับการยอมรับกันว่าใช้อย่างแพร่หลายที่สุดในปัจจุบันเช่นภาษาอังกฤษนั้น ก็ใช่จะเป็นที่รู้จักกันในทุกสังคมไม่ แต่คณิตศาสตร์กลับเป็นเครื่องมือสากลที่เป็นที่รู้จักกันทั่วทุกสังคมอารยะในปัจจุบันไม่ว่าสังคมนั้นจะใช้ภาษาใดก็ตาม

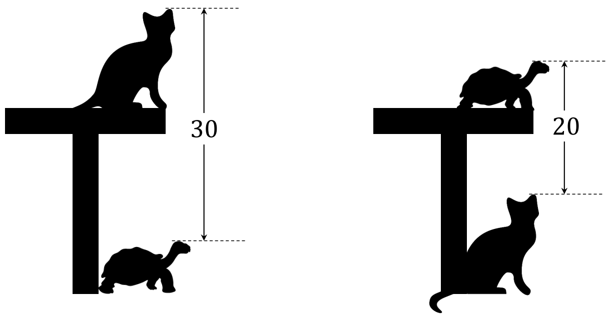
ครั้นมนุษย์ได้รู้จักการคำนวณต่างๆ ระยะหนึ่งแล้ว พัฒนาการความรู้ทางคณิตศาสตร์ของมนุษย์จึงได้ถูกยกระดับไปอีกขั้นหนึ่ง จากการนับและการคำนวณ ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์อันประกอบด้วยตัวเลขล้วนๆ ไปสู่แนวคิดเรื่อง **พีชคณิต (algebra)** ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ที่มี **ตัวแปร (variable)** เข้ามาเกี่ยวข้อง แนวคิดทางพีชคณิตได้พัฒนาให้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เริ่มมีลักษณะเป็นนามธรรมยิ่งขึ้น จากความสนใจดั้งเดิมที่มุ่ง หาคำตอบจากการคำนวณ ซึ่งเป็นเรื่องตรงไปตรงมาที่ผู้เข้าใจกระบวนการพื้นฐานต่างๆ เกี่ยวกับการคำนวณ ย่อมสามารถทำได้ไม่

ยาก ไปสู่การหาคำตอบในพีชคณิต ซึ่งอาจไม่ได้มีขั้นตอนที่ตายตัวดังเช่นการหาคำตอบในการคำนวณ แต่กลับแฝงความเป็นศิลปะ ที่กระบวนการซึ่งนำไปสู่คำตอบที่ถูกต้อง อาจแตกต่างกันได้ เช่น สมมติให้แมวตัวหนึ่งมีความสูง 15 นิ้ว และเต่าตัวหนึ่งมีความสูง 6 นิ้ว การหาคำตอบให้ได้ว่าแมวสูงกว่าเต่าเท่าไรนั้นเป็นการหาคำตอบในการคำนวณ โดยผู้ที่รู้จักการคำนวณพื้นฐานคือการลบ ก็จะสามารถหาคำตอบได้ว่าแมวสูงกว่าเต่าเท่ากับ $15 - 6 = 9$ นิ้ว แต่จากโจทย์ข้อเดียวกันนี้ หากให้ข้อมูลใหม่เป็นว่า ความสูงของแมวกับเต่ารวมกันเท่ากับ 21 นิ้ว และแมวสูงกว่าเต่า 9 นิ้ว และให้หาความสูงของแมวและเต่า กระบวนการหาคำตอบของโจทย์ในข้อนี้ย่อมซับซ้อนขึ้น และหลากหลายกว่า ซึ่งหากนำเอาวิธีการทางพีชคณิตมาใช้นั้น เราอาจกำหนดให้ความสูงของแมวและเต่า เท่ากับ x และ y ตามลำดับ จากนั้นจึงแปลงข้อมูลทั้งหมดในโจทย์ ไปสู่ความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ในรูปของตัวแปร กล่าวคือ

$$x + y = 21$$
$$x - y = 9$$

การหาคำตอบให้ได้ว่า x และ y คืออะไรจากข้อกำหนดทั้งสองสมการนั้น ไม่ได้มีกระบวนการตายตัว ในทางหนึ่ง เราอาจใช้ความสัมพันธ์ในสมการที่สองที่ว่า $x - y = 9$ ดังนั้น $x = 9 + y$ จากนั้นจึงนำเอาไปแทนที่ x ในสมการที่หนึ่ง ซึ่งให้ความสัมพันธ์คือ $9 + 2y = 21$ หรือ $y = 6$ เมื่อได้คำตอบหนึ่งคือ $y = 6$ แล้วเมื่อนำไปแทนที่ในความสัมพันธ์เดิมจะได้ $x = 9 + 6 = 15$ กล่าวคือจากข้อมูลที่กำหนดให้นี้ เราสามารถสรุปได้ว่าแมวและเต่าจะต้องสูง 15 และ 6 นิ้วตามลำดับ การหาคำตอบอีกแนวทางหนึ่ง สามารถทำได้โดยการนำเอาแต่ละข้างของแต่ละสมการรวมเข้าด้วยกัน ซึ่งให้ผลรวมของด้านซ้ายคือ $2x$ และผลรวมของด้านขวาคือ 30 ดังนี้ จะได้ว่า $2x = 30$ หรือ $x = 15$ ซึ่งเมื่อแทนค่าในสมการใดสมการหนึ่ง จะให้คำตอบของ y เช่น หากนำไปแทนในสมการแรก จะได้ $y = 21 - 15 = 6$ ดังนี้จะเห็นได้ว่า กระบวนการหาคำตอบในข้อที่สองนั้น มีความซับซ้อนกว่า และไม่ใช่กระบวนการตายตัวดังเช่นในข้อแรก โดยในทุกขั้นตอนของกระบวนการนั้นขึ้นอยู่กับแนวทางการออกแบบของผู้แก้โจทย์ ว่าจะกำหนดเส้นทางที่เหมาะสมที่นำไปสู่คำตอบได้อย่างไร ทั้งในขั้นตอนแรก คือ การกำหนดตัวแปร ขั้นตอนที่สอง คือ การแปลงข้อมูลที่แสดงไปสู่ความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ในรูปของตัวแปรที่กำหนด และขั้นตอนสุดท้าย คือ การหาค่าของตัวแปรจากความสัมพันธ์ที่กำหนดขึ้นในขั้นตอนที่สอง

ความรู้ทางพีชคณิตยังสามารถใช้หาคำตอบของโจทย์ที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น เช่น หากพิจารณาโจทย์ตามภาพที่ 1.1 ซึ่งว่ากันว่าเป็นคำถามวิชาคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาจากประเทศจีน หากให้แมวอยู่บนโต๊ะ และเต่าอยู่ใต้โต๊ะ ส่วนต่างระหว่างความสูงของแมวและเต่า จะเท่ากับ 30 นิ้ว



รูปที่ 1.1 ความสูงของโต๊ะเป็นเท่าใด สมมติให้ความสูงของแมว เต่า และโต๊ะ เท่ากับ x, y และ z ตามลำดับ จากข้อมูลในรูป จะได้ว่า

$$x + z - y = 30$$
$$y + z - x = 20$$

ซึ่งเมื่อนำเอาแต่ละด้านของแต่ละสมการมารวมกัน จะได้ว่า $2z = 50$ หรือ $z = 25$ นิ้ว อนึ่ง มีข้อสำคัญที่ควรพิจารณาคือ ข้อมูลข้างต้น มีเพียงพอให้ระบุความสูงของโต๊ะได้เท่านั้น แต่ไม่เพียงพอที่จะระบุความสูงของแมวหรือเต่า

แต่หากสลับกันให้เต่าอยู่บนโต๊ะ และแมวอยู่ใต้โต๊ะ ส่วนต่างระหว่างความสูงของเต่าและแมว จะเท่ากับ 20 นิ้ว จากข้อมูลข้างต้น หากให้หาความสูงของโต๊ะ เราอาจใช้วิธีทางพีชคณิตโดยการกำหนดให้ความสูงของแมว เต่า และโต๊ะ เท่ากับ x, y และ z ตามลำดับ จากข้อมูลในโจทย์ จะได้ว่าความสัมพันธ์ที่ว่า

$$\begin{aligned} x + z - y &= 30 \\ y + z - x &= 20 \end{aligned}$$

ความสัมพันธ์ข้างต้นซึ่งประกอบด้วย 2 สมการ และแต่ละสมการประกอบด้วย 3 ตัวแปรนี้ แม้ไม่อาจชี้ชัดลงไปได้ว่า ตัวแปรแต่ละตัวจะเท่ากับเท่าใด แต่โดยที่คำถามในโจทย์เพียงต้องการทราบว่าความสูงของโต๊ะเป็นเท่าใด ในการหาค่าของ z จากทั้งสองสมการนั้น หากนำเอาแต่ละด้านของแต่ละสมการมารวมกัน จะได้ว่า $2z = 50$ หรือ $z = 25$ นิ้ว ซึ่งถือเป็นคำตอบที่ได้ตอบคำถามในโจทย์นี้อย่างเสร็จสิ้นสมบูรณ์ อนึ่ง มีข้อสำคัญที่ควรพิจารณาคือ ข้อมูลจากโจทย์ข้างต้น มีเพียงพอให้ระบุความสูงของโต๊ะได้เท่านั้น แต่ไม่เพียงพอที่จะระบุความสูงของแมวหรือเต่าเป็นการเฉพาะ

ตัวอย่างข้างต้นเป็นตัวอย่างหนึ่ง ที่แสดงแนวทางการสร้าง และการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น โดยเนื้อหาส่วนต่อไปในบทนี้ จะได้กล่าวถึงนิยามและวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในรูปแบบต่างๆ ลักษณะของคำตอบที่เป็นไปได้ และข้อเท็จจริงที่สำคัญเกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้น ตลอดจนการประยุกต์ในทางเศรษฐศาสตร์ ทั้งนี้ ตัวอย่างการประยุกต์แนวคิดเรื่องระบบสมการเชิงเส้น เข้ากับแนวคิดทางเศรษฐศาสตร์ซึ่งจะได้พิจารณาในบทนี้นั้น ล้วนเป็นตัวอย่างซึ่งถูกพัฒนาขึ้นจากแนวคิดระดับพื้นฐาน ที่แม้ผู้ได้ศึกษาวิชาทางเศรษฐศาสตร์แต่เพียงขั้นต้น ย่อมสามารถเข้าใจได้ไม่ยาก อย่างไรก็ตาม ผู้อ่านที่ไม่มีพื้นฐานทางเศรษฐศาสตร์มาก่อน ซึ่งประสงค์จะเรียนรู้เนื้อหาที่เกี่ยวข้องโดยละเอียด สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากตำราเศรษฐศาสตร์พื้นฐานทั่วไป อาทิ Mankiw (2021)

1.1 สมการเชิงเส้น

พีชคณิตเชิงเส้น (linear algebra) คือสาขาหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ที่ศึกษาคุณสมบัติต่างๆ ของ **สมการเชิงเส้น (linear equation)** ซึ่งอยู่ในรูป

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

โดยค่า $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ คือ **สัมประสิทธิ์ (coefficient)** ของสมการ ซึ่งเป็นค่าที่ถูกกำหนด

ขึ้นอยู่ก่อนแล้ว และ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ คือ **ตัวแปร (variable)** ของสมการ ซึ่งเป็นสิ่งที่ผู้ศึกษาสนใจหา **คำตอบ (solution)** ค่าของตัวแปรที่เป็นคำตอบในสมการ คือ ค่าที่เมื่อถูกแทนที่ในสมการแล้ว ทำให้สมการเป็นจริง ทั้งนี้ มีข้อสังเกตว่า คำว่าเชิงเส้น หรือเส้นตรงนั้น ต่างถูกถอดความมาจากคำในภาษาอังกฤษที่ว่า linear ด้วยกันทั้งสิ้น จึงถือได้ว่าทั้งสองคำนี้มีความหมายเดียวกัน หรือหากจะมีความแตกต่างกันบ้าง ก็เป็นแต่เพียงความแตกต่างในเชิงบริบทของการใช้เท่านั้น หาได้เป็นความแตกต่างทางความหมายอย่างใดไม่ อาทิ คำว่า linear function นั้นมักถูกถอดความเป็นภาษาไทยว่าฟังก์ชั่นเส้นตรง มากกว่าจะใช้ว่าฟังก์ชั่นเชิงเส้น แต่กับ linear algebra นั้น กลับนิยมใช้คำแปลในภาษาไทยว่า พีชคณิตเชิงเส้น เสียมากกว่าพีชคณิตเส้นตรง อย่างไรก็ตาม คำว่า linear equation นั้น ดูจะนิยมใช้กันแพร่หลายทั้งสองแบบ คือทั้ง สมการเส้นตรง และสมการเชิงเส้น ดังนี้เป็นต้น

อนึ่ง คำว่า linear ที่แปลได้เป็นคำในภาษาไทยว่าเชิงเส้น หรือเส้นตรงนั้น ในความเห็นของผู้เขียนแล้วรู้สึกว่าเป็นคำแปลที่ค่อนข้างจำกัด โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อนำมาใช้ประกอบเป็น linear algebra ซึ่งถูกถอดเป็นคำในภาษาไทยว่าพีชคณิตเชิงเส้นด้วยแล้วนั้น ดูจะเป็นคำแปลที่จำกัดเป็นอย่างยิ่ง เพราะไม่ครอบคลุมทุกความเป็นไปได้ของวัตถุทางเรขาคณิตของพีชคณิต ซึ่งไม่ได้มีแต่เพียงเส้นตรงเท่านั้น หากยังรวมระนาบ และระนาบบนไว้อีกด้วย โดยหากพิจารณาเส้นตรงและระนาบแล้ว จะเห็นได้ว่าต่างมีลักษณะร่วมกันคือ มีความตรง ไม่โค้งงอ เป็นต้น ดังนี้ คำว่า เชิงตรง นั้น ดูจะเป็นคำในภาษาไทยที่ถอดความจากคำในภาษาอังกฤษว่า linear ได้สมบูรณ์กว่าคำว่า เชิงเส้น หรือเส้นตรง อยู่มาก อย่างไรก็ตาม ในหนังสือเล่มนี้ คำว่า linear ดังปรากฏในที่ต่างๆ เช่น linear algebra หรือ system of linear equation นั้น ก็ยังจะถูกถอดความดังคำแปลแต่ดั้งเดิม ด้วยว่าคำต่างๆ เช่น ระบบสมการเชิงเส้น ในภาษาไทยนั้น เป็นที่คุ้นเคยกันมาระยะเวลาหนึ่งแล้ว หากจะเปลี่ยนไปใช้คำว่า ระบบสมการเชิงตรง ก็ดูจะเคอะเขินพอสมควร

ตัวอย่าง 1.1 สมมติให้สมการเชิงเส้นสมการหนึ่ง เท่ากับ

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

สมการข้างต้นมีตัวแปร 2 ตัว คือ x_1 และ x_2 ค่าสัมประสิทธิ์ที่ถูกคูณกับ x_1และ x_2 คือ 1 และ 2 ตามลำดับ และค่าสัมประสิทธิ์ฝั่งขวาของสมการคือ 3 สมการนี้มีคำตอบนับไม่ถ้วน (infinitely many solutions) กล่าวคือ คู่อันดับ (x_1, x_2) เมื่อ $x_1 = s$ โดยที่ $s \in \mathbb{R}$ และ $x_2 = (3 - s)/2$ เช่น $(x_1, x_2) = (1, 1), (2, 0.5), \ldots$ ล้วนเป็นคำตอบของสมการนี้ อนึ่ง สมการเชิงเส้นในรูป $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ อาจไม่มีคำตอบ มีคำตอบเดียว หรือมีคำตอบนับไม่ถ้วนก็ได้ ขึ้นกับค่าสัมประสิทธิ์ a_1, a_2 และ b $\square$

ตัวอย่างที่ 1.2 สมการ

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = c$$

เมื่อ c คือค่าคงที่ ไม่ใช่สมการเชิงเส้น เนื่องจากเป็นสมการที่ไม่สามารถจัดรูปให้อยู่ในรูป $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ ได้ เพราะฝั่งซ้ายของสมการ มีพจน์ที่ประกอบด้วยทั้งกำลังสองของตัวแปร คือ x_1^2 และ x_2^2 และผลคูณของตัวแปร คือ x_1x_2 $\square$

หากพิจารณาระนาบที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรงสองเส้น เมื่อให้เส้นตรงแต่ละเส้นประกอบขึ้นเป็นแกนนอน และแกนตั้งของระนาบ โดยมี x_1 และ x_2 แทนค่าที่เป็นไปได้ของเส้นในแกนนอนและแกนตั้ง ตามลำดับ ดังนี้ สมการเชิงเส้นตามตัวอย่างที่ 1.1 ข้างต้น จะสามารถถูกแปลงให้อยู่ในรูป $x_2 = \frac{3-x_1}{2}$ ซึ่งอยู่ในรูปของเส้นตรงที่มีจุดตัดแกนตั้งเท่ากับ $3/2$ และความชันเท่ากับ -0.5 บนระนาบดังรูปที่ 1.1

แนวคิดข้างต้นสามารถถูกขยายให้ครอบคลุมสมการเชิงเส้นหลายสมการขึ้น จากสมการเชิงเส้นซึ่งมีอยู่เพียงสมการเดียวข้างต้น เป็น **ระบบสมการเชิงเส้น** (system of linear equations) ซึ่งอยู่ในรูป

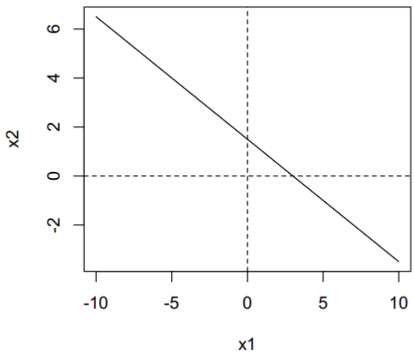
$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

ระบบสมการข้างต้น เป็นตัวอย่างของระบบสมการเชิงเส้น ที่มีสมการ m สมการ และตัวแปร n ตัว ค่าสัมประสิทธิ์ a_{ij} คือ ค่าสัมประสิทธิ์ที่ถูกคูณกับตัวแปร x_j ในสมการที่ i และค่าสัมประสิทธิ์ b_i คือ ค่าสัมประสิทธิ์ที่อยู่ฝั่งขวาของสมการ ที่ไม่ถูกคูณด้วยตัวแปรใดๆ คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น คือค่า $x_1, \ldots, x_n$ ที่เมื่อถูกแทนค่าในสมการที่ $1, \ldots, m$ แล้ว ทำให้ทุกสมการเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 1.3 สมมติให้ระบบสมการเชิงเส้นระบบหนึ่งประกอบด้วย 2 สมการ ได้แก่

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 1 \\
2x_1 - x_2 &= 2
\end{aligned}$$

ระบบสมการนี้ ประกอบด้วยสมการ 2 สมการ และตัวแปร 2 ตัวแปร กล่าวคือ $m = n = 2$ โดย



รูปที่ 1.2 กราฟสมการเชิงเส้น $x_1 + 2x_2 = 3$ ซึ่งเมื่อได้จัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ในรูป $x_2 = \frac{3-x_1}{2}$ จะได้ความสัมพันธ์ข้างต้น ซึ่งมี x_1 และ x_2 ประกอบขึ้นเป็นแกนนอนและแกนตั้ง ตามลำดับ ทั้งนี้ จากสมการเชิงเส้นในรูป $x_2 = a+bx_1$ จะได้ว่า จุดตัดแกนตั้งของเส้นตรงนี้ คือ $(x_1, x_2) = (0, \frac{3}{2})$ และ ความชันของเส้นตรง เท่ากับ $-\frac{1}{2}$ อนึ่ง โดยที่สมการเชิงเส้นโดยทั่วไป มักมิได้จำแนกตัวแปรในสมการออกเป็นตัวแปรตามและตัวแปรอธิบาย ดังเช่นความสัมพันธ์ในลักษณะฟังก์ชั่นดังนี้ หากจะจัดสมการเชิงเส้น $x_1 + 2x_2 = 3$ ให้อยู่ในรูป $x_1 = 3 - 2x_2$ และอธิบายความสัมพันธ์นี้ด้วยกราฟใหม่ ซึ่งสลับแกนให้ x_2 และ x_1 อยู่บนแกนนอนและแกนตั้งตามลำดับ ก็ย่อมได้เช่นกัน

มีค่าสัมประสิทธิ์ $a_{11} = a_{12} = b_1 = 1$ ค่าสัมประสิทธิ์ $a_{21} = b_2 = 2$ และค่าสัมประสิทธิ์ $a_{22} = -1$ คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นนี้ คือค่า x_1 และ x_2 ที่เมื่อแทนที่ในระบบสมการแล้ว ทำให้แต่ละสมการเป็นจริง $\square$

ในทางเรขาคณิต เนื่องจากสมการเส้นตรงที่มี 2 ตัวแปร สามารถแสดงได้ด้วยเส้นตรงในระนาบ ที่แต่ละแกนแทนค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรแต่ละตัวแปร คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น จึงเป็นค่าของตัวแปรที่เป็นจุดตัดของเส้นตรงทุกจุด จากตัวอย่างที่ 1.3 เนื่องจากสมการแต่ละเส้น คือเส้นตรงที่มีความชันต่างกัน โดยสมการเส้นแรกมีความชันเป็นลบ และสมการอีกเส้นหนึ่งมีความชันเป็นบวก ระบบสมการนี้จึงมีจุดตัดเสมอ ทั้งนี้ ในกรณีระบบสมการเชิงเส้นที่มี 2 สมการและ 2 ตัวแปรนั้น อาจไม่มีคำตอบ มีคำตอบเพียงชุดเดียว และมีคำตอบมากมายไม่จำกัด ก็ได้ โดยระบบสมการที่ไม่มีคำตอบ คือระบบสมการที่สมการแต่ละสมการ คือ เส้นตรงที่มีความชันเท่ากัน แต่มีจุดตัดคนละจุด ระบบสมการที่มีคำตอบเพียงหนึ่งเดียว คือ ระบบสมการที่สมการแต่ละสมการสร้างเส้นตรงที่มีความชันไม่เท่ากัน และระบบสมการที่มีคำตอบจำนวนไม่ถ้วน คือ ระบบสมการที่สมการแต่ละสมการ สร้างเส้นตรงที่มีความชันและจุดตัดเดียวกัน และในลักษณะเดียวกัน ระบบสมการเชิงเส้นที่มีสมการมากกว่า 2 สมการและตัวแปร 2 ตัวแปร จะสร้างเส้นตรงเท่ากับจำนวนสมการในระบบ ที่ลากไปในระนาบสองมิติ โดยมีคำตอบของระบบสมการ คือ จุดตัดร่วมของเส้นตรงทุกเส้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.4 สมมติให้ระบบสมการเชิงเส้นระบบหนึ่ง ประกอบ 3 สมการและ 2 ตัวแปร ดังนี้

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

ระบบสมการนี้มีลักษณะเฉพาะประการหนึ่ง คือ ค่าสัมประสิทธิ์ทางฝั่งขวาของสมการทุกสมการมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนี้ หากให้ตัวแปรทุกตัวเท่ากับ 0 ก็ย่อมทำให้ฝั่งซ้ายและฝั่งขวาของสมการทุกสมการเท่ากัน ระบบสมการในลักษณะนี้ จึงมีคำตอบอย่างน้อยหนึ่งชุดเสมอ ซึ่งในกรณีนี้ คือ $x_1 = x_2 = 0$ ทั้งนี้ การที่ระบบสมการนี้จะมีคำตอบมากมายไม่จำกัดได้นั้น จะเกิดขึ้นในกรณีที่ทุกสมการในระบบเท่ากัน ซึ่งเปรียบได้กับการที่ระบบสร้างเส้นตรงที่ทาบกันทุกเส้นเท่านั้น ดังนี้ เมื่อพิจารณาสมการแต่ละสมการข้างต้น ซึ่งสร้างเส้นตรงที่มีความชันต่างกันแล้ว จะได้ว่า ระบบสมการข้างต้นมีคำตอบชุดเดียว คือ $x_1 = x_2 = 0$ $\square$

เนื้อหาในส่วนที่เหลือทั้งหมดของบทนี้ คือการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ที่มีสมการ

m สมการและตัวแปร n ในกรณีทั่วไป ที่ค่าสัมประสิทธิ์ทางฝั่งขวา ไม่จำเป็นต้องเท่ากับศูนย์ การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น เป็นหัวใจหนึ่งของวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ซึ่งมีประโยชน์อย่างมากในการศึกษาวิชาเศรษฐศาสตร์และการเงิน เช่น การหาดุลยภาพของปริมาณและราคา ในวิชาเศรษฐศาสตร์จุลภาค การหาดุลยภาพของการบริโภค การลงทุน และรายได้ ในวิชาเศรษฐศาสตร์จุลภาค และการหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดในเศรษฐมิติ เป็นต้น ในการศึกษาเรื่องระบบสมการเชิงเส้นนั้น มีคำถามที่สำคัญสามข้อที่ต้องพิจารณา คือ ในข้อแรกนั้น ระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าวมีคำตอบหรือไม่ และในข้อที่สอง หากระบบสมการเชิงเส้นที่พิจารณามีคำตอบ จะมีคำตอบเพียงชุดเดียว หรือมากมายไม่จำกัด และในข้อสุดท้าย คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าวคืออะไร และสามารถหาได้อย่างไร ในการตอบคำถามทั้งสามข้อนี้ จะได้เริ่มจากข้อที่สาม คือ กระบวนการคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นก่อน จากนั้นตอบคำถามที่เหลือไล่ขึ้นมา ด้วยข้อเท็จจริงต่างๆ เกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นที่จะได้พิจารณาในส่วนถัดไป

1.2 การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นซึ่งจะได้พิจารณาในที่นี้ มีสามวิธี ได้แก่ วิธีการแทนค่าตัวแปร (substitution method) วิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์ (Gaussian elimination method) และวิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์และจอร์แดน (Gauss-Jordan elimination method) โดยการหาคำตอบด้วยวิธีใดจะเหมาะสมที่สุดนั้น ไม่มีกฎเกณฑ์ตายตัว แม้โดยทั่วไปแล้ว การหาคำตอบของระบบสมการที่ไม่ซับซ้อน เช่น การหาคำตอบของระบบสมการ ที่ประกอบด้วย 2 สมการและ 2 ตัวแปรด้วยวิธีการแทนค่าตัวแปรจะสะดวกรวดเร็วกว่าวิธีอื่น แต่การหาคำตอบของระบบสมการที่ซับซ้อนขึ้น ตลอดจนการพิสูจน์ข้อเท็จจริงที่เกี่ยวข้องกับคำถามทั้งสามข้อเกี่ยวกับคุณสมบัติของระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น มักต้องอาศัยความเข้าใจเกี่ยวกับวิธีการหาคำตอบของระบบสมการ ด้วยวิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์ และวิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์และจอร์แดน

1.2.1 วิธีการแทนค่าตัวแปร

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นด้วยการแทนค่าตัวแปร เป็นวิธีการที่เป็นที่คุ้นเคยกันอย่างดีในวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา วิธีนี้เป็นวิธีที่ง่ายแก่การทำความเข้าใจ และเหมาะในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่ไม่ซับซ้อน ซึ่งสามารถทำได้โดยการปรับรูปสมการใดสมการหนึ่ง ให้อยู่ในรูป $x_i = f(x_{-i})$ โดยที่ x_{-i} หมายถึงตัวแปร $x_1, \ldots, x_n$ ที่ไม่ใช่ x_i จากนั้นจึงนำค่า x_i ที่ได้ไปแทนค่าตัวแปร x_i ในทุกสมการ ซึ่งหลังเสร็จสิ้นขั้นตอนนี้แล้ว ตัวแปรในระบบสมการเชิงเส้นที่คงเหลืออยู่ จะไม่มี x_i และหากได้ทำกระบวนการนี้ซ้ำกันไปเรื่อยๆ จะได้ค่า

ของตัวแปรทีละตัว จากนั้นจึงนำค่าของตัวแปรแต่ละตัวที่ได้ แทนค่าในสมการในระบบ เพื่อให้ได้ค่าของตัวแปรทุกตัว ซึ่งเท่ากับคำตอบของระบบสมการ

ตัวอย่างที่ 1.5 จากระบบสมการเชิงเส้นในตัวอย่างที่ 1.3

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 1 \\
2x_1 - x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

การหาคำตอบของระบบสมการนี้ด้วยวิธีการแทนค่าตัวแปร สามารถทำได้โดยการปรับรูปสมการแรก ให้อยู่ในรูป $x_1 = 1 - x_2$ จากนั้นจึงนำค่าของ x_1 ดังกล่าวแทนในค่าของ x_1 ในสมการที่สอง ให้อยู่ในรูป $2(1 - x_2) - x_2 = 2$ จะได้สมการที่มีเพียงตัวแปรเดียว คือ x_2 ซึ่งสามารถหาค่าของ x_2 ได้ คือ $x_2 = 0$ และเมื่อแทนค่า $x_2 = 0$ ในสมการใดสมการหนึ่ง จะได้ว่า $x_1 = 1$ อนึ่ง กระบวนการข้างต้นมิได้ตายตัว แต่อาจปรับเปลี่ยนได้โดยอิสระ เช่น หากเริ่มจากปรับรูปสมการแรก ให้อยู่ในรูป $x_2 = 1 - x_1$ จากนั้นจึงนำไปแทนค่าในสมการที่สอง ซึ่งให้ผลลัพธ์ คือ $2x_1 - (1 - x_1) = 2$ หรือ $x_1 = 1$ และนำไปแทนค่าในสมการแรก ซึ่งให้คำตอบ คือ $x_2 = 0$ ก็เป็นอีกวิธีที่ใช้ได้เช่นกัน $\square$

กรณีข้างต้นเป็นตัวอย่างของระบบสมการเชิงเส้น ที่สามารถหาคำตอบด้วยวิธีการแทนค่าตัวแปรได้โดยง่าย อย่างไรก็ตาม หากระบบสมการเชิงเส้นมีความซับซ้อน คือ มีจำนวนสมการและจำนวนตัวแปรมากขึ้น การหาคำตอบด้วยวิธีการแทนค่าตัวแปร มักไม่ใช่วิธีที่มีประสิทธิภาพ ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นอีกต่อไป นอกจากนี้ การศึกษาคุณสมบัติต่างๆ ของระบบสมการเชิงเส้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งการอธิบายลักษณะคำตอบของระบบสมการ ว่าระบบสมการมีคำตอบหรือไม่ และหากมีคำตอบ คำตอบที่ได้เป็นคำตอบที่มีเพียงหนึ่งเดียว หรือมีมากกว่าหนึ่งคำตอบนั้น ล้วนต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับกระบวนการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีอื่น นอกเหนือจากวิธีการแทนค่าตัวแปรทั้งสิ้น

1.2.2 วิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์ เป็นวิธีที่ถูกคิดค้นโดย คาร์ล ฟรีดริช เกาส์ (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน โดยในลำดับแรก จะได้พิจารณาถึง**วิธีพื้นฐานในการจัดการสมการ (elemetary equation operation)** ทั้งสามแบบก่อน คือ

1. การสลับสมการ จากแถวหนึ่งในระบบสมการมาเป็นอีกแถวหนึ่ง เช่น ระบบสมการเชิงเส้นที่มี

รูปที่ 1.3 คาร์ล ฟรีดริช เกาส์ (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)* ในความเห็นของนักคณิตศาสตร์จำนวนมาก เกาส์ถือเป็นอัจฉริยะทางคณิตศาสตร์ที่เก่งที่สุดผู้หนึ่งเท่าที่โลกนี้เคยมีมา อัจฉริยะภาพทางคณิตศาสตร์ของเกาส์นับได้ว่าเป็นสิ่งที่ติดตัวมาแต่กำเนิด เนื่องจากแม้เกาส์จะถือกำเนิดในครอบครัวระดับชนชั้นกรรมาชีพที่มีฐานะยากจน แต่ก็ได้ฉายแววความเป็นอัจฉริยะทางคณิตศาสตร์ เช่น ความสามารถในการบวกเลขตั้งแต่ 1-100 ในทันทีได้ตั้งแต่อายุเพียงไม่กี่ขวบ เกาส์เกิดในประเทศเยอรมัน และภายหลังจากที่จบการศึกษาปริญญาเอกด้านคณิตศาสตร์จากมหาวิทยาลัยเกิททิงเงน (Göttingen) จึงได้เป็นอาจารย์ในมหาวิทยาลัยเดิมจนกระทั่งเกษียณ

ผลงานของเกาส์แต่ละด้านกล่าวได้ว่ามีความสำคัญในระดับปฏิรูปความรู้ในสาขานั้นๆ ให้ขึ้นไปอีกระดับ ทั้งความรู้ทางคณิตศาสตร์แขนงต่างๆ เช่น พีชคณิต แคลคูลัส ความน่าจะเป็นและสถิติ ตลอดจนความรู้ด้านฟิสิกส์ที่สำคัญอีกเป็นจำนวนมาก จากรูปข้างต้น รัฐบาลประเทศเยอรมนีได้ยกย่องเกาส์โดยการใช้รูปของเกาส์ในธนบัตร 10 มาร์ค ซึ่งเป็นสกุลเงินเก่าของเยอรมนีก่อนเปลี่ยนมาใช้สกุลเงินยูโร และพิมพ์ผลงานที่สำคัญที่สุดอีกเรื่องหนึ่งของเกาส์ในทางสถิติ คือ สูตรฟังก์ชั่นความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (probability density function) ของการกระจายแบบปกติ (normal distribution) ซึ่งเท่ากับ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ไว้บนธนบัตร

*`http://commons.wikimedia.org/wiki/File:10_DM_Serie4_Vorderseite.jpg`

สองสมการและสองตัวแปร

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

สามารถสลับสมการที่หนึ่งและสองให้เป็นอีกระบบสมการ คือ

$$\begin{aligned} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \end{aligned}$$

2. การคูณด้านซ้ายและขวาของสมการใดสมการหนึ่งด้วยค่าคงที่ ที่ไม่เท่ากับศูนย์ เช่น ระบบสมการเชิงเส้นที่มีสองสมการและสองตัวแปร

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

สามารถนำค่าคงที่ $\alpha \neq 0$ คูณสมการที่หนึ่งให้เป็นอีกระบบสมการ คือ

$$\begin{aligned} \alpha a_{11}x_1 + \alpha a_{12}x_2 &= \alpha b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

3. การคูณด้านซ้ายและขวาของสมการหนึ่งด้วยค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์ และนำไปรวมกับด้านซ้ายและด้านขวาของอีกสมการหนึ่ง กระบวนการนี้ มีจุดประสงค์เพื่อให้ผลรวมของพจน์ที่อยู่ในรูปของตัวแปรหนึ่งๆ ทางด้านซ้ายของสมการเท่ากับศูนย์ ซึ่งส่งผลให้ได้สมการใหม่ที่มีตัวแปรลดลงกว่าเดิม เช่น ระบบสมการเชิงเส้นที่มีสองสมการและสองตัวแปร

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

สามารถนำค่าคงที่ $\alpha \neq 0$ คูณสมการที่หนึ่งและนำไปรวมกับสมการที่สองให้เป็น

$$(\alpha a_{11} + a_{21})x_1 + (\alpha a_{21} + a_{22})x_2 = b_1 + b_2$$

จากข้างต้น หาก $\alpha a_{11} + a_{21} = 0$ กระบวนการดังกล่าวจะทำให้ไม่มีพจน์ใดทางด้านซ้ายสมการสุดท้ายที่ขึ้นอยู่กับ x_1 อีกต่อไป และคงเหลืออยู่แต่เพียงพจน์ที่ขึ้นอยู่กับ x_2 เท่านั้น กระบวนการนี้จึงเปรียบได้กับการลดทอนสมการ จากระบบสมการซึ่งประกอบด้วยสองสมการและสองตัวแปรให้เหลือเพียงหนึ่งสมการและหนึ่งตัวแปร ซึ่งสามารถหาคำตอบของตัวแปรที่เหลืออยู่ได้โดยง่าย ทั้งนี้ มีข้อควรสังเกตที่สำคัญว่า วิธีพื้นฐานในการจัดการสมการทั้งสามแบบ ทั้ง วิธีแรกซึ่งเป็นเพียงการสลับลำดับของข้อมูลที่มีในรูปแบบของสมการ และอีกสองวิธีที่เหลือดังที่ได้อธิบายข้างต้นนั้น ล้วนไม่ได้ทำให้ค่าของสมการผิดไปจากเดิม เนื่องจากเป็นเพียงการทำให้ด้านซ้ายและด้านขวาของสมการ เพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างละเท่าๆ กัน ด้วยเหตุผลนี้ คำตอบที่ได้จากระบบสมการเชิงเส้นเดิม และคำตอบที่ได้จากระบบสมการเชิงเส้นใหม่ ที่ได้ผ่านวิธีพื้นฐานในการจัดการสมการข้างต้น จึงต้องเป็นคำตอบเดียวกัน

แนวคิดสำคัญอีกเรื่องหนึ่งที่คู่ขนานไปกับวิธีพื้นฐานในการจัดการสมการ คือ **วิธีพื้นฐานในการจัดการแถว (elementary row operation)** โดยจากระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

หากนำเฉพาะค่าสัมประสิทธิ์ด้านซ้าย มาเขียนในรูป **เมตริกซ์ (matrix)**[1] จะได้**เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ (coefficient matrix)** ในรูป

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ซึ่งเป็นเมตริกซ์**ขนาด (size)** $m \times n$ กล่าวคือ มี m แถวและ n คอลัมน์ จากข้างต้น หากนำค่าสัมประสิทธิ์ด้านขวามือ ใส่เพิ่มเข้าเป็นคอลัมน์ขวาสุด จะได้**เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยาย (aug-**

[1] กลุ่มตัวเลขในเมตริกซ์ซึ่งจำเป็นต้องจัดเรียงในรูปแถวและคอลัมน์เสมอ จะอยู่ในวงเล็บทั่วไป คือ $(\cdot)$ หรือวงเล็บปีกกา คือ $[\cdot]$ ก็ได้

mented coefficient matrix) ในรูป

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

จากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยายข้างต้น **วิธีพื้นฐานในการจัดการแถว (elementary row operation)** ที่สอดคล้องกับแต่ละวิธีพื้นฐานในการจัดการสมการ คือ 1) การสลับแถวในเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยาย 2) การคูณแถวในเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยายด้วยค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์ และ 3) การคูณแถวในเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยายด้วยค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์ และนำไปรวมกับอีกแถวหนึ่ง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.6 จากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยายด้านล่าง

$$\left(\begin{array}{cccr|c} -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

หากนำ 2 หารค่าทุกตัวในแถวที่สาม และสลับแถวที่สองและสามของเมตริกซ์ จะได้ว่า

$$\left(\begin{array}{cccr|c} -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

อนึ่ง โดยที่วิธีพื้นฐานในการจัดการแถว เป็นกระบวนการที่ถอดรูปมาจากวิธีพื้นฐานในการจัดการสมการ ซึ่งเป็นเพียงการสลับสมการ การคูณสมการด้วยค่าคงที่ ตลอดจนการรวมสมการ ที่ไม่ได้ส่งค่าของตัวแปรผิดไปจากเดิมแต่อย่างใด คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นจากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์สุดท้าย หลังผ่านกระบวนการวิธีพื้นฐานในการจัดการแถวจึงย่อมเป็นคำตอบเดียวกันกับระบบสมการเชิงเส้นตั้งต้น $\square$

แนวคิดลำดับถัดไปที่ต้องทำความเข้าใจ ก่อนจะได้พิจารณาแนวทางการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ด้วยวิธีการลดทอนตัวแปรของเกาส์ ได้แก่ ศูนย์นำ และเมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับ ดังนี้

นิยามที่ 1.1 ศูนย์นำ (leading zeros) คือ จำนวนเลขศูนย์ ในแถวของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์หรือเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยาย ที่อยู่หน้าเลขตัวแรกในแถวที่ไม่ใช่เลขศูนย์ ■

ตัวอย่างที่ 1.7 จากตัวอย่างเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ข้างล่าง

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

แถวแรกของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์นี้ มีศูนย์นำ 0 ตัว เนื่องจากเลขตัวแรกในแถวที่ไม่ใช่ 0 คือ -1 และจำนวนเลขศูนย์ในแถวที่อยู่หน้าเลข -1 นี้ เท่ากับ 0 แถวที่สองของเมตริกซ์ มีศูนย์นำ 3 ตัว เนื่องจากเลขตัวแรกในแถวที่ไม่ใช่ 0 คือ -1 และจำนวนเลขศูนย์ในแถวที่อยู่หน้าเลข -1 นี้ เท่ากับ 3 แถวที่สามมีศูนย์นำ 1 ตัว เนื่องจากเลขตัวแรกในแถวที่ไม่ใช่ 0 คือ 2 และจำนวนเลขศูนย์ในแถวที่อยู่หน้าเลข 2 นี้ เท่ากับ 1 สำหรับแถวสุดท้ายนั้น เนื่องจากทุกค่าในแถวเท่ากับ 0 ดังนี้ จึงไม่มีเลขตัวใดในแถวที่ไม่ใช่ 0 ในกรณีนี้ ถือว่าไม่สามารถหาจำนวนศูนย์นำได้ ทั้งนี้ มีข้อสังเกตที่ควรเน้นย้ำ กรณีที่ไม่หาค่าศูนย์นำได้ดังเช่นในแถวที่สี่นั้น ต่างจากกรณีที่ศูนย์นำคือ 0 ดังเช่นในแถวแรก □

นิยามที่ 1.2 เมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับ (matrix in row echelon form)[1] คือ เมตริกซ์ที่จำนวนศูนย์นำในแถวถัดไป มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ และแถวที่มีแต่เลขศูนย์เท่านั้น ถูกจัดเรียงไว้อยู่ล่างแถวที่มีเลขอื่นที่ไม่ใช่ศูนย์ ■

ตัวอย่างที่ 1.8 เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ในตัวอย่างที่ 1.6 ไม่ใช่เมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับ เนื่องจากจำนวนศูนย์นำในแต่ละแถวที่สามารถหาจำนวนศูนย์นำได้ คือ ในแถวที่หนึ่ง สอง และสาม มีค่าคือ $0\ 3\ 1$ ตามลำดับ ซึ่งไม่ได้เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ □

[1] คำว่า echelon มีรากศัพท์จากคำในภาษาฝรั่งเศสว่า échelon ซึ่งหมายถึงขั้นบันได อนึ่ง คำว่า row echelon form นั้น เป็นคำที่ถูกนิยามจนมีความหมายเฉพาะในทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นที่เข้าใจกันโดยทั่วไป แต่หากยึดตามความหมายของ echelon แล้ว คำว่า echelon formation of row ดูจะถูกต้องในเชิงภาษาศาสตร์มากกว่า

ตัวอย่างที่ 1.9 จากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ด้านล่าง

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

เมตริกซ์นี้ไม่ใช่เมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับ เนื่องจากแม้มีลักษณะสอดคล้องกับเงื่อนไขส่วนแรกตามนิยามที่ 1.2 กล่าวคือ จำนวนศูนย์นำในแถวที่สามารถหาจำนวนศูนย์นำได้ คือ ในแถวที่หนึ่งและสาม จะเท่ากับ 0 และ 1 ตามลำดับ ซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ในแถวถัดไป แต่ยังคงมีลักษณะไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้อที่สองของนิยามที่ 1.2 กล่าวคือ แถวหนึ่งที่มีเลขศูนย์เท่านั้น คือ แถวที่สอง ถูกจัดเรียงไว้เหนือแถวที่สาม ซึ่งมีตัวเลขบางตัวในแถวที่ไม่ใช่ศูนย์ □

ตัวอย่างที่ 1.10 เมตริกซ์สัมประสิทธิ์

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

เมตริกซ์นี้ไม่ใช่เมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับ เนื่องจากจำนวนศูนย์นำในแถวที่สามารถหาจำนวนศูนย์นำได้เท่ากับ 1 1 ซึ่งไม่ได้มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ เพราะจำนวนศูนย์นำในแถวที่หนึ่งและสองเท่ากัน □

ตัวอย่างที่ 1.11 เมตริกซ์สัมประสิทธิ์

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

เป็นเมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับ เนื่องจากเป็นเมตริกซ์ที่มีลักษณะสอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสองข้อตามนิยามที่ 1.2 กล่าวคือ จำนวนศูนย์นำในแถวที่สามารถหาจำนวนศูนย์นำได้ คือแถวที่หนึ่งและสอง เท่ากับ 0 2 ตามลำดับ ซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ อีกทั้งแถวซึ่งประกอบด้วย 0 ทั้งหมด ถูกจัดเรียงไว้ด้านล่างแถวที่มีบางค่าไม่เท่ากับศูนย์ □

ตัวอย่างที่ 1.12 หากพิจารณาเมตริกซ์สัมประสิทธิ์

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า เงื่อนไขที่ทำให้เมตริกซ์ข้างต้นเป็นเมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับคือ (1) $\alpha = \beta = 0$ หรือ (2) $\alpha \neq 0, \beta = 0$ และ $\gamma \neq 0$ ทั้งนี้ จะเห็นได้ว่า หาก $\alpha = \beta = 0$ แล้ว γ จะมีค่าเท่ากับเท่าใดก็ได้ แต่หาก $\alpha \neq 0, \beta = 0$ แล้ว จะต้องเพิ่มอีกเงื่อนไขคือ $\gamma \neq 0$ เสมอ $\square$

จากข้างต้น การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ด้วยการลดทอนตัวแปรของเกาส์ สามารถทำได้โดยการสร้างเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยาย จากระบบสมการเชิงเส้น จากนั้นจึงลดทอนตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง โดยใช้วิธีพื้นฐานในการจัดการแถว ให้ตัวแปรที่ต้องการให้หายไปจากสมการ มีค่าสัมประสิทธิ์ในแต่ละช่องเท่ากับศูนย์ จนกระทั่งเมื่อได้แปลงเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ให้อยู่ในรูปที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแล้ว ในลำดับสุดท้าย จึงเป็นการหาค่าของตัวแปรที่สอดคล้องกับสัมประสิทธิ์ในช่องนั้น โดยการหาคำตอบของสมการในแต่ละแถว จากนั้นจึงนำค่าของตัวแปรที่ได้ไปหาค่าของตัวแปรที่เหลือต่อไปเรื่อยๆ จนได้ค่าของตัวแปรทั้งหมด ซึ่งเท่ากับคำตอบของระบบสมการิ อนึ่ง ขั้นตอนข้างต้นนี้ต่างไม่ได้มีลำดับตายตัว โดยจะเลือกลดทอนตัวแปรใดจากแถวใดก่อนก็ได้ ขึ้นอยู่กับความสะดวกและเหมาะสม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.13 จากระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned}$$

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นนี้ด้วยวิธีการลดทอนตัวแปรของเกาส์ เริ่มได้จากการเขียนเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยายที่สอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น โดยเมื่อได้รวบรวมสัมประสิทธิ์ของสมการแรกไว้ในแถวแรก และของสมการที่สองไว้ในแถวที่สองของเมตริกซ์ จะได้เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยายในรูป

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

จากนั้นหากนำ -2 คูณแถวที่หนึ่งแล้วนำไปรวมกับแถวที่สอง และนำเอาผลลัพธ์ที่ได้เป็นแถวที่สองในเมตริกซ์ใหม่ จะได้เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยายในรูป

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

ซึ่งเป็นเมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับ แถวสุดท้ายของเมตริกซ์ข้างต้นสอดคล้องกับสมการ $-3x_2 = 0$ ซึ่งให้ค่าของตัวแปร $x_2 = 0$ แถวแรกของเมตริกซ์สอดคล้องกับสมการ $x_1 + x_2 = 1$ ซึ่งเมื่อได้ค่า $x_2 = 0$ แล้ว จะได้ $x_1 = 1$ คำตอบของระบบสมการนี้ จึงเท่ากับ $x_1 = 1, x_2 = 0$ $\square$

แม้การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีการลดทอนตัวแปรของเกาส์ในตัวอย่างข้างต้น ซึ่งเป็นระบบสมการที่ไม่ซับซ้อนนั้น อาจดูยุ่งยากและใช้เวลานานกว่าวิธีการแทนค่าตัวแปร อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่ระบบสมการมีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น วิธีการลดทอนตัวแปรของเกาส์จะเป็นวิธีการหาคำตอบที่เป็นระบบ รวดเร็ว และมีประสิทธิภาพยิ่งกว่าวิธีการแทนค่าตัวแปรมาก ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.14 จากระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}$$

การหาคำตอบของระบบสมการนี้ด้วยวิธีการลดทอนตัวแปรของเกาส์ เริ่มได้จากการเขียนเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยาย ที่สอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น ซึ่งอยู่ในรูป

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ข้างต้น มีลักษณะสำคัญคือ ค่าในคอลัมน์แรกมีลักษณะเรียงกันไปเรื่อยๆ จากแถวแรกซึ่งเท่ากับ 1 ไปถึงแถวสุดท้ายซึ่งเท่ากับ 3 จึงเป็นการง่ายที่จะใช้ค่าในแถวแรกเป็นฐานเพื่อลดค่าในแถวอื่นๆ ของคอลัมน์แรกให้เท่ากับ 0 เช่น เมื่อนำ -2 คูณทุกตัวในแถวแรก และนำ

ไปรวมกับแถวที่สอง และนำ -3 คูณทุกตัวในแถวแรก และนำไปรวมกับแถวที่สาม จะได้

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & -9 & -2 & -8 \end{array}\right)$$

จากนั้นเมื่อนำ -3 คูณทุกตัวในแถวที่สอง และนำไปรวมกับแถวที่สาม จะได้

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{array}\right)$$

จากเมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับข้างต้น จะได้ว่า $x_3 = -4/5$ จากสัมประสิทธิ์ในแถวสุดท้าย และเมื่อนำไปแทนในแถวที่สอง จะได้ $x_2 = 16/15$ จากนั้นเมื่อนำค่า x_1 และ x_2 ที่หาได้ไปแทนค่าในแถวที่หนึ่ง จะได้ $x_1 = 5/3$ $\square$

การหาคำตอบของระบบสมการด้วยวิธีการลดทอนตัวแปรของเกาส์ ยังช่วยให้สามารถหาคำตอบได้รวดเร็ว โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อระบบสมการเชิงเส้นไม่มีคำตอบ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.15 จากระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}$$

ซึ่งมีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยายในรูป

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ข้างต้น มีลักษณะเช่นเดียวกับเมตริกซ์ในตัวอย่างที่ 1.14 คือ ค่าในคอลัมน์แรกมีลักษณะเรียงกันไปเรื่อยๆ จากแถวแรกซึ่งเท่ากับ 1 ไปถึงแถวสุดท้ายซึ่งเท่ากับ 3 จึงสามารถใช้ค่าในแถวแรกเป็นฐาน เพื่อลดค่าในแถวอื่นๆ ให้เท่ากับ 0 ได้ดังเช่นวิธีการในตัวอย่างที่ 1.14

อาทิ เมื่อนำ -2 คูณกับทุกตัวในแถวแรกและนำไปรวมกับแถวที่สอง จะได้

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

แถวที่สองของเมตริกซ์สอดคล้องกับสมการ $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1$ ซึ่งไม่มีค่าของ x_i ใดที่สอดคล้องกับสมการนี้ ระบบสมการเชิงเส้นนี้จึงไม่มีคำตอบ อนึ่ง มีข้อสำคัญที่ควรพิจารณาคือ การพยายามหาคำตอบของระบบสมการที่ไม่มีคำตอบ ดังเช่นในกรณีนี้ด้วยวิธีการแทนค่านั้นนอกจากจะมีความยุ่งยากกว่ามากแล้ว ยังอาจไม่ให้ข้อสรุปที่ชัดเจน ว่าผลที่ได้ในท้ายสุดที่เสมือนเป็นข้อสรุปที่ขัดแย้ง เช่น $1 = 0$ บ่งบอกว่าระบบสมการไม่มีคำตอบ หรือเป็นเพียงผลจากความผิดพลาดจากการคำนวณ จึงนับเป็นวิธีที่ไม่มีประสิทธิภาพเมื่อเปรียบกับวิธีของเกาส์ □

1.2.3 วิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์และจอร์แดน

วิธีการหาคำตอบในระบบสมการเชิงเส้นวิธีสุดท้าย ที่จะได้พิจารณากันต่อไปนี้ ได้แก่ วิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์และจอร์แดน[1] ซึ่งได้พัฒนาเพิ่มเติมจากวิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์ วิธีการแบบเกาส์และจอร์แดนมีขั้นตอนในช่วงแรกเหมือนกับวิธีการแบบเกาส์ แต่เริ่มแตกต่างจากวิธีการแบบเกาส์ภายหลังจากที่ได้จัดรูปเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยายให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแล้ว วิธีการแบบเกาส์และจอร์แดนแม้มักใช้เวลาในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นนานกว่าวิธีการของเกาส์ แต่มีจุดเด่นที่สำคัญประการหนึ่งคือ เป็นวิธีที่ช่วยให้เข้าใจทฤษฎีบทพื้นฐานเกี่ยวกับการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้ชัดเจน ว่าในกรณีใดที่ระบบสมการเชิงเส้นไม่มีคำตอบ มีคำตอบเพียงหนึ่งเดียว หรือมีคำตอบหลายคำตอบ โดยก่อนที่จะได้พิจารณาวิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์และจอร์แดนอย่างเป็นระบบนั้น มีคำนิยามเพิ่มเติมอีกสองเรื่องที่ควรรู้ คือ จุดหมุนของแถวในเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ และเมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับที่ถูกลดรูป ดังนี้

นิยามที่ 1.3 จุดหมุน (pivot) คือ ค่าของตัวเลขในแถวตัวแรกที่ไม่ใช่ศูนย์ ในเมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแล้ว ■

---

[1]ตามชื่อ วิลเฮล์ม จอร์แดน (1842-1899) นักปฐพีวิทยาชาวเยอรมัน ซึ่งใช้วิธีการหาคำตอบของระบบสมการในลักษณะนี้ เพื่อลดความคลาดเคลื่อนของข้อมูลจากการสำรวจให้ได้น้อยที่สุด ซึ่งใกล้เคียงกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (method of least squares) ที่รู้จักกันดีในปัจจุบัน และได้ตีพิมพ์บทความนี้ในปี 1888 อย่างไรก็ตาม วิธีการหาคำตอบแบบเกาส์และจอร์แดนยังปรากฏในบทความของ แบร์นาร์ด คลาซอง (1829-1902) นักคณิตศาสตร์ชาวลักเซมเบอร์ก ซึ่งตีพิมพ์ในปี 1888 เช่นกัน

ตัวอย่างที่ 1.16 เมตริกซ์สัมประสิทธิ์

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

เป็นเมตริกซ์ที่ได้ถูกจัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแล้ว โดยมีจุดหมุนของแถวแรกคือ -1 และจุดหมุนของแถวที่สองคือ 3 $\square$

นิยามที่ 1.4 เมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับที่ถูกลดรูป (reduced row echelon form) คือ เมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับ (row echelon form) ที่จุดหมุนในทุกแถวเท่ากับ 1 และค่าอื่นในคอลัมน์เดียวกันกับจุดหมุนมีค่าเท่ากับ 0 $\blacksquare$

ตัวอย่างที่ 1.17 เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยาย

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

เป็นเมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแล้ว โดยมีจุดหมุนในแถวแรกและแถวที่สองเท่ากับ 1 และ 2 ตามลำดับ จากนั้น เมื่อนำ 2 หารทุกค่าในแถวที่สอง จะได้

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

และเมื่อนำแถวแรกลบด้วยแถวที่สอง และนำไปแทนที่แถวแรกในเมตริกซ์ใหม่ จะได้

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

เมตริกซ์ข้างต้นมีคุณสมบัติสอดคล้องกับเมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับที่ถูกลดรูป กล่าวคือ จุดหมุนในทุกแถวเท่ากับ 1 และในคอลัมน์ที่มีจุดหมุน ค่าอื่นที่ไม่ใช่จุดหมุนจะเท่ากับ 0

ทุกค่า □

จากนิยามข้างต้น การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์และจอร์แดน จะเป็นกระบวนการที่มีขั้นตอนเพิ่มเติมจากวิธีการแบบเกาส์ คือ ภายหลังจากที่ได้จัดรูปเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยาย จนเป็นเมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแล้ว หากเป็นวิธีการแบบเกาส์ ก็จะใช้การหาค่าของตัวแปรด้วยวิธีการแทนค่า แต่หากเป็นวิธีการแบบเกาส์และจอร์แดน ก็จะได้แปลงเมตริกซ์ต่อไปให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับที่ถูกลดรูป โดยคำตอบของตัวแปรแต่ละตัว จะเท่ากับค่าในคอลัมน์สุดท้ายของเมตริกซ์ ในแถวเดียวกันกับตัวแปรที่ต้องการหาค่า ซึ่งมีจุดหมุนเท่ากับ 1

ตัวอย่างที่ 1.18 เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยายในตัวอย่างที่ 1.13

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

สามารถแปลงให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับที่ถูกลดรูปได้ โดยการนำ -3 หารทุกค่าในแถวที่สอง จากนั้นจึงนำ -1 คูณแถวที่สองและนำไปรวมกับแถวที่หนึ่ง

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

เมตริกซ์สุดท้ายข้างต้น สอดคล้องกับระบบสมการคือ $x_1 = 1$ และ $x_2 = 0$ ซึ่งสอดคล้องกับคอลัมน์สุดท้ายของเมตริกซ์ □

ตัวอย่างที่ 1.19 จากระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นนี้ ด้วยวิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์และจอร์แดน สามารถทำได้โดยการสร้างเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยายที่สอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น ซึ่งเท่ากับ

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

จากนั้น เมื่อใช้วิธีพื้นฐานในการจัดการแถว โดยการนำแถวที่หนึ่งคูณกับ -2 แล้วนำไปรวมกับแถวที่สอง และนำเอาผลลัพธ์ที่ได้เป็นแถวที่สองในเมตริกซ์ใหม่ จะได้

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

ซึ่งอยู่ในรูปเมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับ จากขั้นตอนนี้ หากเป็นการหาคำตอบของระบบสมการด้วยวิธีแบบเกาส์แล้ว ก็จะเป็นการหาค่าของตัวแปรของสมการด้วยการแทนค่า โดยจากแถวที่สองซึ่งสอดคล้องกับสมการ $-3x_2 = -3x_3$ หรือ $x_2 = x_3$ หากให้ตัวแปรสุดท้ายในระบบ คือ x_3 เป็นตัวแปรอิสระ จะได้ว่า $x_3 = r, r \in \mathbb{R}$ $x_2 = x_3 = r$ และ จากแถวแรกซึ่งสอดคล้องกับสมการ $x_1 = 1 - x_2 - x_3$ จะได้ว่า $x_1 = 1 - 2r$ สำหรับการหาคำตอบด้วยวิธีแบบเกาส์และจอร์แดนนั้น จำเป็นต้องแปลงเมตริกซ์ข้างต้น ให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแบบลดรูปต่อไป โดยการนำ -1 คูณทุกค่าในแถวที่สอง เพื่อให้ได้จุดหมุนในแถวที่สองเท่ากับ 1 จากนั้นจึงนำ -1 คูณทุกค่าในแถวที่สองและนำไปรวมกับแถวที่หนึ่ง ซึ่งให้ผลลัพธ์คือ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

จากเมตริกซ์สุดท้าย โดยที่แถวสุดท้ายของเมตริกซ์สอดคล้องกับสมการ $x_2 = x_3$ ดังนั้น หากให้ x_3 เป็นตัวแปรอิสระ คือ $x_3 = r, r \in \mathbb{R}$ จะได้ $x_2 = r$ เช่นกัน และจากแถวแรกของเมตริกซ์ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $x_1 = 1 - 2x_3$ ดังนั้น $x_1 = 1 - r$ สำหรับในกรณีนี้ ซึ่งเป็นระบบสมการเชิงเส้น 2 สมการ 3 ตัวแปร ที่มีคำตอบมากมายไม่สิ้นสุด แม้การแปลงเมตริกซ์ให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแบบลดรูป จะไม่ให้คำตอบที่ชัดเจน ดังเช่นกรณีระบบสมการที่มีคำตอบเพียงชุดเดียว ที่คำตอบของระบบสมการ เท่ากับคอลัมน์สุดท้ายของเมตริกซ์ อย่างไรก็ตาม คำตอบของระบบสมการที่ได้จากเมตริกซ์สุดท้าย ยังคงมีลักษณะสำคัญที่น่าสนใจข้อหนึ่ง คือ เป็นการจัดรูปคำตอบของระบบสมการ ให้ตัวแปรซึ่งเป็นตัวแปรตาม ขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระในระบบเท่านั้น $\square$

จากตัวอย่างทั้งหมดข้างต้น จะเห็นได้ว่า วิธีการหาคำตอบด้วยวิธีแบบเกาส์และจอร์แดนมีข้อดีที่สำคัญ คือ เป็นวิธีการที่ให้คำตอบที่ได้ชัดเจนจากเมตริกซ์ที่ได้ถูกแปลงให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแบบลดรูป โดยเฉพาะอย่างยิ่ง หากเป็นกรณีที่ระบบสมการมีคำตอบชุดเดียวแล้วนั้น คำตอบของระบบสมการจะเท่ากับคอลัมน์สุดท้ายของเมตริกซ์ อย่างไรก็ตาม หากได้พิจารณาเปรียบเทียบวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองวิธี คือ วิธีแบบเกาส์ และวิธีแบบเกาส์และจอร์แดน ก็จะเห็นได้ว่า วิธีการแบบเกาส์ดูจะเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพกว่า เนื่องจากภายหลังจากที่เมตริกซ์

สัมประสิทธิ์แบบขยายได้ถูกจัดให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแล้วนั้น การหาค่าของตัวแปรที่เหลือด้วยวิธีการแทนค่าตัวแปรในแถวลำดับบนขึ้นไปเรื่อยๆ มัก สามารถทำได้สะดวกรวดเร็วกว่าการจัดรูปแบบเมตริกซ์ให้อยู่การเรียงลำดับแบบลดรูป

จากที่ได้พิจารณาวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นทั้งสามวิธีแล้ว จะเห็นได้ว่า วิธีใดจะเป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุด ย่อมขึ้นอยู่กับบริบทต่างๆ ทั้งความซับซ้อนของระบบสมการ และความยากง่ายในการคำนวณเป็นสำคัญ กล่าวคือ โดยทั่วไปแล้ว วิธีการแทนค่าตัวแปร มักเป็นวิธีที่สะดวกและรวดเร็วในกรณีที่ระบบสมการไม่ซับซ้อนมากนัก อาทิ ระบบสมการสองตัวแปรและสองสมการ อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่ระบบสมการมีความซับซ้อนขึ้น วิธีแบบเกาส์ ดูจะเป็นวิธีที่เป็นระบบกว่าวิธีการแทนค่าตัวแปร โดยเฉพาะอย่างยิ่ง หากระบบสมการไม่มีคำตอบ หรือมีคำตอบมากกว่าหนึ่งค่าแล้ว การพยายามหาคำตอบของระบบสมการด้วยวิธีการแทนค่าตัวแปรนั้น มักมีความซับซ้อน และอาจเกิดความผิดพลาดได้ง่ายกว่า

อนึ่ง หากจะเปรียบเทียบระหว่างวิธีการหาคำตอบของระบบสมการ ระหว่างวิธีการแบบเกาส์และวิธีการแบบเกาส์และจอร์แดนแล้ว ก็ถือได้ว่า ในเชิงประสิทธิภาพนั้น วิธีการแบบเกาส์สามารถหาคำตอบได้รวดเร็วกว่า จากเหตุผลข้างต้นที่ว่าเมื่อได้เมตริกซ์ที่อยู่ในรูปการเรียงลำดับแล้ว การหาคำตอบที่เหลือด้วยการแทนค่าตัวแปรในแต่ละสมการไล่ขึ้นไปเรื่อยๆ นั้น สามารถทำได้อย่างสะดวกรวดเร็ว อย่างไรก็ตาม หากจะพิจารณาในเชิงประโยชน์ที่ได้จากการศึกษากระบวนการหาคำตอบ เพื่อสร้างทฤษฎีบทที่สำคัญต่างๆ ทางพีชคณิตเชิงเส้นแล้ว วิธีการแบบเกาส์และจอร์แดนนับเป็นพื้นฐานความรู้ ที่จำเป็นในการอธิบายคุณสมบัติที่สำคัญของคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ดังจะได้พิจารณาโดยละเอียดในส่วนต่อไปนี้

1.3 ข้อเท็จจริงที่สำคัญเกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้น

ข้อสำคัญที่จะได้พิจารณาต่อไป คือ เงื่อนไขที่ทำให้ระบบสมการเชิงเส้นมีหรือไม่มีคำตอบ และหากมีคำตอบ ระบบจะมีคำตอบเพียงชุดเดียวหรือมากกว่าชุดเดียว โดยในที่นี้ จะได้รวบรวมคุณสมบัติต่างๆ ของระบบสมการเชิงเส้นที่เกี่ยวข้องกับประเด็นนี้ ไว้ในรูป**ข้อเท็จจริง (fact)** ที่สำคัญต่างๆ ทั้งสิ้นรวมสิบข้อด้วยกัน ทั้งนี้ คำว่าข้อเท็จจริงนั้น เป็นการใช้คำที่มีความหมายอย่างกว้างสำหรับเนื้อหาในหนังสือเล่มนี้ซึ่งเป็นเพียงระดับพื้นฐาน โดยมิได้จำแนกเป็นการเฉพาะว่าข้อเท็จจริงแต่ละข้อนั้น เป็น**ทฤษฎีบท (theorem)** **ข้อเสนอ (proposition)** **ข้ออ้าง (claim)** หรือ **การคาดเดา (conjecture)** อนึ่ง แม้โดยทั่วไปแล้ว สิ่งที่ถูกบัญญัติหรือกล่าวอ้างว่าเป็นข้อเท็จจริงใดๆ ในทางคณิตศาสตร์นั้น ควรมี**การพิสูจน์ (proof)** ควบคู่ไปด้วยเสมอ หาไม่แล้วสิ่งที่ถูกกล่าวอ้างว่าเป็นข้อเท็จจริง ที่ปราศจากการพิสูจน์ก็อาจมีสถานะเป็นได้เพียงการคาดเดาเท่านั้น

อย่างไรก็ตาม โดยที่ผู้เขียนมุ่งหวังให้หนังสือเล่มนี้ เป็นหนังสือสำหรับนักเศรษฐศาสตร์มากกว่านักคณิตศาสตร์ อีกทั้งยังมีกลุ่มเป้าหมายหลัก คือ นักศึกษาระดับปริญญาตรีและโท ข้อเท็จจริงเกี่ยวกับคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่จะได้กล่าวถึงต่อไปนี้ จึงจะไม่มีการพิสูจน์ควบคู่ไปด้วยทุกข้อ แต่จะได้พิสูจน์เฉพาะข้อเท็จจริงบางข้อ หรือยกตัวอย่างประกอบ หรือใช้ตรรกะสนับสนุน ซึ่งอาจไม่ใช่การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นแบบแผน ที่กระชับและงดงาม ดังที่ควรจะเป็นในทุกกรณี

ข้อเท็จจริงที่จะได้อธิบายต่อไปนี้ มีหลายข้อที่เกี่ยวกับแนวคิดเรื่อง อันดับ ซึ่งเป็นแนวคิดที่สำคัญที่สุดเรื่องหนึ่งในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ดังนิยามได้ดังนี้

นิยามที่ 1.5 อันดับ (rank) คือ จำนวนแถวในเมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับ ที่ค่าในแถวมีค่าอื่นที่ไม่ใช่ค่า 0 ■

ตัวอย่างที่ 1.20 เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยาย

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

เป็นเมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแล้ว อันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์นี้เท่ากับ 2 เนื่องจากแถวสุดท้ายมีค่าทุกตัวในแถวเท่ากับ 0 จำนวนแถวที่มีค่าอื่นที่ไม่ใช่ค่า 0 เท่านั้นจึงมีเพียง 2 แถว ซึ่งเท่ากับอันดับของเมตริกซ์นี้ □

ตัวอย่างที่ 1.21 เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยาย

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

เป็นเมตริกซ์ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแล้ว หากพิจารณาเฉพาะเมตริกซ์สัมประสิทธิ์จะเห็นว่า จำนวนแถวที่ไม่ได้มีเพียงค่า 0 เท่านั้นจะเท่ากับ 2 แต่หากพิจารณาเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยาย ซึ่งได้รวมเอาคอลัมน์สุดท้ายเข้าด้วย จะเห็นว่าจำนวนแถวที่ไม่ได้มีเพียงค่า 0 เท่านั้น จะเท่ากับ 3 ในกรณีนี้ อันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์จะเท่ากับ 2 ซึ่งน้อยกว่าอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยาย ซึ่งเท่ากับ 3 □

แนวคิดเรื่องอันดับ สามารถใช้อธิบายคุณสมบัติที่สำคัญเกี่ยวกับ ความสัมพันธ์ระหว่างอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ และสัมประสิทธิ์แบบขยาย และลักษณะคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้ ดังปรากฏตามข้อเท็จจริงต่อไปนี้ ทั้งนี้ มีข้อสำคัญที่พึงสังเกตว่า ข้อเท็จจริงแต่ละข้อนั้น ต่างมีความสัมพันธ์เชื่อมโยงกันอย่างเป็นระบบ ดังนี้ การพิจารณาข้อเท็จจริงทั้งหทดในที่นี้ จึงไม่ควรพิจารณาข้อเท็จจริงข้อใดข้อหนึ่งอย่างเป็นเอกเทศ หากควรศึกษาข้อเท็จจริงตั้งแต่ข้อแรกให้เข้าใจอย่างชัดเจน ก่อนจะได้ผ่านไปพิจารณาข้อเท็จจริงถัดไป อีกทั้งเมื่อได้พิจารณาข้อเท็จจริงแต่ละข้อจนครบทุกข้อแล้ว ยังควรพิจารณาข้อเท็จจริงทั้งหมดพร้อมกัน ให้เห็นเนื้อความทั้งหมดอย่างเป็นองค์รวมอีกต่อหนึ่ง

ข้อเท็จจริงที่ 1.1 สมมติให้ $\boldsymbol{A}$ และ $\hat{\boldsymbol{A}}$ คือเมตริกซ์สัมประสิทธิ์และเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยาย ตามลำดับ และให้ $\rho(\boldsymbol{A})$ และ $\rho(\hat{\boldsymbol{A}})$ แทนอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์และอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยาย ตามลำดับ

1. $\rho(\boldsymbol{A}) \leq \rho(\hat{\boldsymbol{A}})$
2. $\rho(\boldsymbol{A}) \leq$ จำนวนแถวของ $\boldsymbol{A}$
3. $\rho(\boldsymbol{A}) \leq$ จำนวนคอลัมน์ของ $\hat{\boldsymbol{A}}$ ■

ข้อที่หนึ่งของข้อเท็จจริงข้างต้น สามารถพิจารณาให้เห็นจริงได้โดยอาศัยแต่เพียงสามัญสำนึกด้วยว่า $\hat{\boldsymbol{A}}$ นั้นคือ $\boldsymbol{A}$ ที่ได้เพิ่มคอลัมน์เข้ามาอีกหนึ่งคอลัมน์ ดังนั้น เมื่อได้จัดเมตริกซ์ให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแล้ว หากไม่มีแถวใดของ $\boldsymbol{A}$ ที่มีศูนย์ทั้งหมด จะได้ว่า $\rho(\boldsymbol{A}) = \rho(\hat{\boldsymbol{A}})$ เสมอ หากมีแถวใดของ $\boldsymbol{A}$ ที่มีศูนย์ทั้งหมด หากค่าในคอลัมน์สุดท้ายของแถวนั้นของ $\hat{\boldsymbol{A}}$ เท่ากับศูนย์ จะได้ว่า $\rho(\boldsymbol{A}) = \rho(\hat{\boldsymbol{A}})$ แต่หากค่าในคอลัมน์สุดท้ายของ $\hat{\boldsymbol{A}}$ ไม่เท่ากับศูนย์ ก็จะได้ว่า $\rho(\boldsymbol{A}) < \rho(\hat{\boldsymbol{A}})$ สำหรับข้อที่สองนั้น เป็นจริงเนื่องจากจำนวนแถวที่ไม่ได้มีเพียงค่าศูนย์ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ย่อมไม่อาจมีเกินจำนวนแถวทั้งหมดของเมตริกซ์ อย่างไรก็ตาม แม้ข้อสุดท้ายในข้อเท็จจริงข้างต้นอาจดูไม่เห็นได้ชัดเจนดังสองข้อแรก แต่หากให้ $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีจำนวนแถวมากกว่าจำนวนคอลัมน์ เช่น หากให้จำนวนคอลัมน์เท่ากับ n และจำนวนแถวเท่ากับ $m = n + k$ โดยที่ $k \geq 1$ จากนั้น เมื่อใช้วิธีพื้นฐานในการจัดการสมการแปลง $\boldsymbol{A}$ ให้ทุกค่าในแถวที่เกินจาก n มาคือ ตั้งแต่แถวที่ $n + 1$ จนถึงแถวที่ $n + k = m$ เท่ากับศูนย์ ดังนี้ $\rho(\boldsymbol{A})$ จะต้องไม่เกินกว่าจำนวนคอลัมน์ของ $\boldsymbol{A}$ คือ n ทั้งนี้ ข้อสุดท้ายของข้อเท็จจริงที่ 1.1 นี้ สัมพันธ์กับแนวคิดเรื่อง**ความเป็นอิสระกันของเส้นตรง (independence)** ซึ่งจะได้กล่าวอธิบายรายละเอียดเพิ่มเติมในบทที่สี่ต่อไป

ข้อเท็จจริงที่ 1.2 ระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งมีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์และสัมประสิทธิ์ขยายเท่ากับ $\boldsymbol{A}$

และ $\hat{\boldsymbol{A}}$ ตามลำดับ มีคำตอบ ก็ต่อเมื่อ $\rho(\boldsymbol{A}) = \rho(\hat{\boldsymbol{A}})$ ■

จากข้อที่หนึ่งในข้อเท็จจริงที่ 1.1 จะได้ว่า $\rho(\boldsymbol{A}) \leq \rho(\hat{\boldsymbol{A}})$ ดังนี้ หาก $\rho(\boldsymbol{A}) < \rho(\hat{\boldsymbol{A}})$ จะได้ว่ามีอย่างน้อยหนึ่งแถวใน $\boldsymbol{A}$ ที่ทุกค่าเท่ากับศูนย์ แต่ค่าในแถวเดียวกันในคอลัมน์สุดท้ายของ $\hat{\boldsymbol{A}}$ ไม่เท่ากับศูนย์ ในกรณีนี้ ค่าของสัมประสิทธิ์ในแถวดังกล่าว จะสอดคล้องกับสมการ

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = b$$

โดยที่ $b \neq 0$ ซึ่งไม่มีค่า $x_1, \ldots, x_n$ ใดๆ ที่สอดคล้องกับสมการข้างต้น ระบบสมการนี้จึงไม่มีคำตอบ จากข้อเท็จจริงนี้ จึงอาจสรุปได้ต่อไปว่า การที่ระบบสมการเชิงเส้นจะมีคำตอบได้นั้น จำต้องมี $\rho(\boldsymbol{A}) = \rho(\hat{\boldsymbol{A}})$ เป็น **เงื่อนไขที่จำเป็น (necessary condition)** อย่างไรก็ตาม การแสดงว่า $\rho(\boldsymbol{A}) = \rho(\hat{\boldsymbol{A}})$ เป็น **เงื่อนไขที่เพียงพอ (sufficient condition)** ของการที่ระบบสมการมีคำตอบด้วยนั้น เป็นเรื่องค่อนข้างซับซ้อน ซึ่งการจะพิสูจน์เรื่องนี้ได้นั้น จำต้องอาศัย แนวคิดเรื่องการเป็นอิสระของเส้นตรงที่จะได้กล่าวไว้ในบทที่สี่

ข้อเท็จจริงที่ 1.3 ระบบสมการเชิงเส้นใดๆ อาจไม่มีคำตอบ มีคำตอบชุดเดียว หรือมีคำตอบมากมายไม่สิ้นสุด ■

แม้การพิสูจน์ข้อเท็จจริงข้างต้นในกรณีทั่วไป คือ ระบบสมการเชิงเส้นที่มี n ตัวแปร จะเป็นเรื่องค่อนข้างซับซ้อน แต่ในกรณีระบบสมการเชิงเส้นที่มีเพียง 2 ตัวแปรนั้น กลับสามารถอธิบาย และยกตัวอย่างประกอบให้เห็นภาพได้ชัดเจนกว่ามาก ด้วยเหตุนี้ คำอธิบายประกอบข้อเท็จจริงนี้จึงจะสมมติเฉพาะกรณีระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปรเป็นหลัก โดยผู้สนใจศึกษาข้อเท็จจริงนี้ในกรณีทั่วไป สามารถค้นคำอธิบายเพิ่มเติม และการพิสูจน์อย่างละเอียดได้จากหนังสือพีชคณิตเชิงเส้น อาทิ Strang (2023)

สำหรับระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร คือ x_1 และ x_2 นั้น แต่ละแถวของระบบสมการจะสร้างเส้นตรงขึ้นในระนาบ x_1, x_2 ซึ่งมีตัวแปรแต่ละตัว แทนแกนแต่ละแกนในระนาบ ในกรณีที่ระบบสมการนี้มีเพียงแถวเดียวนั้น สมการในแถว คือ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

อาจมีคำตอบมากมายไม่จำกัดในกรณีทั่วไป หรือไม่มีคำตอบในกรณีเฉพาะที่ $a_{11} = a_{12} = 0$

และ $b_1 \neq 0$ ในกรณีที่ระบบสมการมีสองแถว สมการแต่ละแถว คือ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

จะสร้างเส้นตรงสองเส้นในระนาบสองมิติ ระบบสมการนี้อาจไม่มีคำตอบ ในกรณีที่ $a_{11} = a_{12} = 0$ และ $b_1 \neq 0$ หรือ $a_{21} = a_{22} = 0$ และ $b_2 \neq 0$ หรือในกรณีที่ $a_{11} = a_{12}$ และ $a_{21} = a_{22}$ และ $b_1 \neq b_2$ ซึ่งสอดคล้องกับเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกันจึงไม่สามารถหาจุดตัดได้ ทั้งนี้ เป็นที่น่าสังเกตว่า หาก $a_{11} = a_{12}$ และ $a_{21} = a_{22}$ และ $b_1 \neq b_2$ แล้ว หากนำสมการที่หนึ่งและสองลบออกจากกัน จะได้

$$0x_1 + 0x_2 = b_1 - b_2 \neq 0$$

ซึ่งเป็นกรณีเดียวกับระบบสมการแถวเดียวที่ไม่มีคำตอบ และหาก $a_{11} = a_{12}$ และ $a_{21} = a_{22}$ และ $b_1 = b_2 \neq 0$ ระบบสมการที่มีสองแถวนี้ จะถูกลดรูปลงเหลือเพียงระบบสมการแถวเดียว ซึ่งมีคำตอบมากมายไม่จำกัดที่เท่ากับทุกค่า x_1 และ x_2 ที่ทำให้สมการ $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ เป็นจริง

ทั้งนี้ มีข้อสำคัญที่ควรสังเกตว่า เส้นตรงสองเส้นบนระนาบสองมิติที่มีความชันไม่เท่ากัน จะตัดกันหนึ่งจุด และตัดกันเพียงจุดเดียวเสมอ เงื่อนไขเช่นที่ว่านี้ สามารถจำแนกโดยละเอียดได้เป็นสามข้อ คือ (1) เงื่อนไขที่กำหนดให้ค่า x_1 และ x_2 ประกอบกันเป็นเส้นตรงสองเส้นได้ คือ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

โดยจะต้องไม่เกิดกรณีที่ $a_{11} = a_{12} = 0$ และ $b_1 \neq 0$ หรือ $a_{21} = a_{22} = 0$ และ $b_2 \neq 0$ และ (2) เงื่อนไขของการมีเส้นตรงสองเส้น ไม่ใช่เส้นเดียว คือ $a_{11} \neq a_{12}$, $a_{21} \neq a_{22}$ และ $b_1 \neq b_2$ ท้ายที่สุด (3) เงื่อนไขที่ความชันของเส้นตรงสองเส้นนี้ จะต้องไม่เท่ากัน ซึ่งสอดคล้องกับการที่

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} \neq \frac{a_{21}}{a_{22}} \quad \text{หรือ} \quad a_{11}a_{22} \neq a_{21}a_{12}$$

ทั้งนี้ เงื่อนไขทั้งสามข้อข้างต้น เป็นเงื่อนไขของการที่เมตริกซ์ขนาด 2×2 สามารถหาอินเวอร์สได้ ดังจะได้กล่าวละเอียดในบทต่อไป

อนึ่ง ในกรณีระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร ซึ่งแต่ละสมการสร้างเส้นตรงในระนาบนั้น คำตอบของสมการซึ่งคือจุดตัดร่วมกันของเส้นตรงทุกเส้นสามารถเป็นไปได้เพียงสามกรณี ดังในข้อเท็จจริงที่ 1.3 คือ ระบบสมการไม่มีคำตอบ หากไม่มีจุดตัดร่วมกันของเส้นตรงทุกเส้น หรือระบบสมการอาจมีคำตอบเพียงชุดเดียว ซึ่งอาจเกิดได้ตามกรณีใดกรณีหนึ่ง ดังรูปที่ 1.3 คือ ระบบสมการอาจสร้างเส้นตรงสองเส้นที่มีความชันไม่เท่ากัน ซึ่งย่อมให้คำตอบชุดเดียวเสมอ หรือระบบสมการอาจสร้างเส้นตรงมากกว่าสองเส้น โดยมีเส้นตรงเส้นหนึ่งที่มีความชันต่างจากเส้นอื่น และเส้นตรงที่เหลือทั้งหมดทาบกันไปเป็นเส้นเดียวกัน หรืออาจเป็นระบบสมการที่สร้างเส้นตรงที่มีความชันไม่เท่ากันแม้แต่เส้นเดียว แต่ทุกเส้นมีจุดตัดร่วมกัน เป็นต้น และสำหรับกรณีสุดท้ายที่ระบบสมการมีคำตอบมากมายไม่จำกัดนั้น จะเกิดขึ้นหากระบบสมการสร้างเส้นตรงเพียงเส้นเดียว หรือหลายเส้นที่ทุกเส้นทาบกันจนเป็นเส้นเดียว

ข้อเท็จจริงที่ 1.4 ในระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนแถวเท่ากับ m และจำนวนคอลัมน์เท่ากับ n

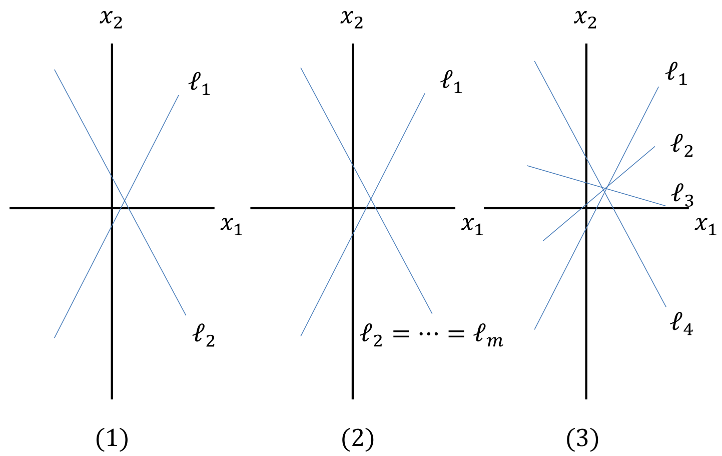
1. หากระบบสมการนี้มีคำตอบชุดเดียว จะได้ว่า $m \geq n$

2. หาก $n > m$ ระบบสมการนี้จะไม่มีคำตอบ หรือมีคำตอบนับไม่ถ้วน ■

ความในข้อเท็จจริงที่ 1.4 ที่ได้ถูกนำเสนอเป็นสองข้อนั้น อันที่จริงแล้วจะตัดข้อใดข้อหนึ่งออกก็ได้ใจความครบถ้วน ไม่ต่างจากที่นำเสนอเป็นสองข้อข้างต้น ด้วยว่าข้อความในส่วนที่สองนั้นเป็นการแย้งสลับที่ของข้อความในส่วนแรก กล่าวคือ กล่าวคือ สมมติให้ A แทนประโยคที่ว่าระบบสมการมีคำตอบชุดเดียว และ B แทนประโยคที่ว่า $m \geq n$ ข้อความในส่วนแรกของข้อเท็จจริงข้างต้นจะมีโครงสร้างในลักษณะ $A \rightarrow B$ ส่วน ข้อความที่สองจะมีโครงสร้างในลักษณะ $\sim B \rightarrow \sim A$ จากข้อเท็จจริงที่ 1.4 ที่ว่าระบบสมการใดๆ จะไม่มีคำตอบ มีคำตอบหนึ่งชุด หรือมีชุดคำตอบมากมายไม่จำกัดเสมอ

หากพิจารณาข้อเท็จจริงที่ 1.4 ในกรณีระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร จะได้ว่า หากระบบสมการมีคำตอบชุดเดียว จะต้องมีเส้นตรงอย่างน้อยตั้งแต่สองเส้นขึ้นไป กล่าวคือ $m \geq 2$ ซึ่งอาจตัดกันให้ได้คำตอบชุดเดียวตามกรณีใดๆ กรณีหนึ่งดังรูปที่ 1.3 กรณีแรกเป็นเส้นตรงสองเส้นที่มีความชันไม่เท่ากัน กรณีที่สอง เป็นเส้นตรงสองเส้นที่มีความชันไม่เท่ากัน และเส้นตรงเส้นอื่นทาบไปกับเส้นตรงเส้นใดเส้นหนึ่งในสองเส้นแรก และกรณีที่สาม เป็นเส้นตรงหลายเส้นที่มีความชันไม่เท่ากัน ที่ตัดกันที่จุดเดียวกันทุกเส้น

ในทางกลับกัน หากให้ $m < n$ ซึ่งในกรณีที่ $n = 2$ นั้น จะได้ว่า $m = 1$ ระบบสมการนี้จึง



รูปที่ 1.4 ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่มีคำตอบ 1 ชุด (1) เมื่อ $m = n = 2$ (2) เมื่อ $m > n = 2$ โดยทุกแถวตั้งแต่แถวที่สองลงไปเป็นสมการเดียวกัน และ (3) เมื่อ $m = 4, n = 2$ โดยทุกเส้นตัดกันที่จุดเดียวกัน

ประกอบด้วยสมการเพียงสมการเดียว คือ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

ซึ่งไม่มีคำตอบหาก $a_{11} = a_{12} = 0$ แต่ $b_1 \neq 0$ หรือมีคำตอบมากมายไม่จำกัดในกรณีทั่วไป ในกรณีทั่วไปที่สมการข้างต้นสร้างเส้นตรงหนึ่งเส้น ที่ทุกค่า x_1 และ x_2 บนเส้นตรงนี้เป็นคำตอบของระบบสมการ

ข้อเท็จจริงที่ 1.6 ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

ที่ $n > m$ จะมีคำตอบจำนวนมากมายนับไม่ถ้วนเสมอ ■

ระบบสมการข้างต้น เป็นระบบสมการที่มีลักษณะเฉพาะประการหนึ่ง คือ ทุกค่าในฝั่งขวาของสมการจะเท่ากับศูนย์ ระบบสมการเช่นนี้ มีชื่อเรียกว่า**ระบบที่มีลักษณะเดียวกัน (homogeneous system)** ซึ่งคุณสมบัติเฉพาะ คือ เนื่องด้วยหากให้ x ทุกตัวเท่ากับศูนย์แล้ว ค่าในฝั่งซ้ายของสมการจะเท่ากับศูนย์เสมอ ไม่ว่าสัมประสิทธิ์แต่ละตัวจะเป็นเท่าใด ดังนี้

ค่า $x_1 = \ldots = x_n = 0$ จึงเป็นชุดคำตอบชุดหนึ่งของระบบสมการนี้เสมอ และหากจินตนาการภาพในกรณีที่ $n = 2$ หากจำนวนตัวแปรมีมากกว่าสมการ ระบบนี้จะสร้างเส้นตรงหนึ่งเส้นที่ผ่านจุดกำเนิด ซึ่งมีคำตอบจำนวนมากมายนับไม่ถ้วนที่ทุกค่า x_1 และ x_2 บนเส้นตรงนี้เป็นคำตอบของระบบสมการ จากข้อเท็จจริงนี้ เป็นที่น่าสังเกตว่า ระบบสมการเชิงเส้นที่ทุกค่าทางฝั่งขวาของสมการเป็นศูนย์นั้น เป็นการตัดปัญหากรณี

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = b_j$$

โดยที่ $b_j \neq 0$ ซึ่งไม่มีคำตอบออกไป และยังตัดกรณีที่ระบบสมการมีคำตอบชุดเดียวออกไป เนื่องจากระบบนั้นมีจำนวนสมการน้อยกว่าตัวแปร ดังนี้ คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนตัวแปรมากกว่าสมการที่ลากผ่านจุดศูนย์กลาง จึงเป็นไปได้ในลักษณะเดียว คือ จะต้องมีมากมาย

ไม่จำกัด

ข้อเท็จจริงที่ 1.7 สำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่มีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\boldsymbol{A}$ และ ค่าทางด้านขวาของสมการ คือ $b_1, \ldots, b_m$

1. หาก $\rho(\boldsymbol{A}) =$ จำนวนแถวของ A แล้ว ระบบสมการเชิงเส้นนี้จะมีคำตอบเสมอ สำหรับทุกค่าของ $b_1, \ldots, b_m$

2. หากระบบสมการเชิงเส้นนี้มีคำตอบแล้ว $\rho(\boldsymbol{A}) =$ จำนวนแถวของ $\boldsymbol{A}$ ■

ข้อเท็จจริงที่ 1.7 อยู่ในรูปของข้อเสนอแบบ $P \leftrightarrow Q$ โดย ส่วนแรกของข้อเสนออยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และส่วนที่สองของข้อเสนออยู่ในรูป $Q \rightarrow P$ เมื่อให้ P คือข้อความที่ว่า $\rho(\boldsymbol{A}) =$ จำนวนแถวของ $\boldsymbol{A}$ และ Q คือข้อความที่ว่า ระบบสมการเชิงเส้นนี้มีคำตอบเสมอ ในส่วนแรก เราสามารถสังเกตได้ว่าหาก $\rho(\boldsymbol{A}) =$ จำนวนแถวของ $\boldsymbol{A}$ จะไม่มีแถวใดใน $\boldsymbol{A}$ เลยที่มีทุกคนเท่ากับศูนย์ ดังนั้นไม่ว่า ค่าทางด้านขวาของสมการคือ $b_1, \ldots, b_m$ จะเป็นอย่างไรก็ตาม ระบบสมการนี้จะมีคำตอบเสมอเพราะกรณีที่

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = b_i$$

โดยที่ $b_i \neq 0$ จะไม่มีทางเกิดขึ้นได้ สำหรับส่วนที่สองของข้อเท็จจริงที่ 1.7 อาจเลือกพิสูจน์ข้อความในเชิงย้อนกลับเนื่องจาก $Q \rightarrow P$ หมายถึง $\sim P \rightarrow \sim Q$ ดังนั้น หากแสดงให้เห็นว่า ถ้า $\rho(\boldsymbol{A}) <$ จำนวนแถวของ $\boldsymbol{A}$ แล้ว ระบบสมการนี้จะไม่มีคำตอบสำหรับบางค่าทางด้านขวาของสมการ คือ $b_1, \ldots, b_m$ ก็เป็นอันใช้ได้ ซึ่งจากกรณีข้างต้น หาก $\rho(\boldsymbol{A}) <$ จำนวนแถวของ $\boldsymbol{A}$ จะต้องมีบางแถวของ $\boldsymbol{A}$ ที่ทุกค่าเป็นศูนย์ ระบบสมการนี้จึงอาจไม่มีคำตอบในกรณีที่

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = b_i$$

โดยที่ $b_i \neq 0$

ข้อเท็จจริงที่ 1.8 ระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการมากกว่าตัวแปร อาจมีค่าทางด้านขวาของสมการคือ $b_1, \ldots, b_m$ ที่ทำให้ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ ■

ข้อเท็จจริงที่ 1.8 เป็นผลโดยตรงมาจากข้อเท็จจริงที่ 1.7 กล่าวคือ ระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการมากกว่าตัวแปร ที่มีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เท่ากับ $\boldsymbol{A}$ จะต้องมี $\rho(\boldsymbol{A}) \leq$ จำนวนแถวของ $\boldsymbol{A}$ เสมอ จากคุณสมบัติของอันดับในข้อเท็จจริงที่ 1.1 ที่ $\rho(\boldsymbol{A}) \leq \min\{m, n\}$ เมื่อ m คือจำนวนสมการหรือแถว และ n คือจำนวนตัวแปรหรือคอลัมน์ของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ดังนั้น เมื่อ $m > n$

จะได้ว่า $\rho(A) \leq n$ จึงอาจมีบางกรณีที่ทุกค่าในบางแถวของ $\boldsymbol{A}$ เป็นศูนย์ทั้งหมด ระบบสมการนี้จึงอาจไม่มีคำตอบ ในกรณีที่

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = b_i$$

เมื่อ $b_i \neq 0$

ข้อเท็จจริงที่ 1.9 สำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่มีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\boldsymbol{A}$ ที่มีจำนวนแถวเท่ากับ m และจำนวนคอลัมน์เท่ากับ n

1. หาก $\rho(\boldsymbol{A}) = m$ แล้ว ระบบสมการนี้จะมีคำตอบไม่เกิน 1 ชุด สำหรับค่า $b_1, \ldots, b_m$ ใดๆ

2. หากระบบสมการนี้มีคำตอบไม่เกิน 1 ชุดสำหรับค่า $b_1, \ldots, b_m$ ใด จะได้ว่า $\rho(\boldsymbol{A}) = m$ ■

ส่วนแรกของข้อเท็จจริงที่ 1.9 นั้น สามารถพิสูจน์ได้โดยง่าย เพราะหาก $\rho(\boldsymbol{A}) = m$ จะไม่มีแถวใดของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่เกินมา จึงตัดความเป็นไปได้ที่ระบบสมการมีคำตอบมากกว่าหนึ่งคำตอบออกไป ระบบสมการนี้ จะมีคำตอบเพียง 1 ชุด หรือไม่มีคำตอบเลยนั้น ขึ้นอยู่กับค่าทางด้านขวาของสมการ ซึ่งเป็นไปตามข้อเท็จจริงที่ 1.7 และ 1.8 ทั้งนี้ แม้การพิสูจน์ส่วนที่สองของข้อเท็จจริงนี้ ในกรณีระบบสมการเชิงเส้นทั่วไป จะซับซ้อนกว่าการพิสูจน์ส่วนแรกอยู่มาก[1] อย่างไรก็ตาม หากจะพิจารณาในกรณีระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ $n = 2$ ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะนั้น จะสามารถเข้าใจได้ง่ายกว่า ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.22 ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรคือ $n = 2$ ที่มีคำตอบไม่เกิน 1 ชุด จะต้องประกอบด้วยเส้นตรงตั้งแต่ 2 เส้นขึ้นไป เพราะหากมีเพียงเส้นตรงเส้นเดียว จะเป็นระบบสมการเชิงเส้นที่มีคำตอบมากมายนับไม่ถ้วนทันที กล่าวคือ $m \geq 2$ ทั้งนี้ ในกรณีที่ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ ถือเป็นกรณีที่พื้นฐานที่เห็นได้ชัดจากข้อเท็จจริงที่ 1.8 เพราะเพียงแต่ตั้งค่าทางด้านขวาของสมการให้เท่ากับ 0 ก็จะทำให้ระบบสมการที่ทุกค่าในเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ไม่เท่ากับ 0 เป็นระบบสมการที่ไม่มีคำตอบแล้ว เราจึงจะพิจารณาเฉพาะกรณีที่เหลือ โดยจะแสดงให้เห็นว่า หากให้ เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการนี้ คือ $\boldsymbol{A}$ และให้ระบบสมการนี้มีคำตอบเพียงชุดเดียวแล้ว $\rho(\boldsymbol{A}) = 2$ เสมอ ซึ่งในที่นี้อาจแยกได้เป็น 2 กรณี คือ

1. กรณีที่ $m = 2$ เส้นตรงสองเส้นจะตัดกันเพียงจุดเดียวและจุดเดียวเท่านั้น เมื่อเส้นตรงทั้งสองเส้นมีความชันไม่เท่ากัน ในกรณีนี้ จึงเพียงต้องแสดงว่า ระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วยเส้น

[1] ผู้สนใจสามารถศึกษาการพิสูจน์ข้อเท็จจริงนี้เพิ่มเติมได้ จากตำราระดับสูงกว่าปริญญาตรี เช่น Simon and Blume (1994)

ตรงสองเส้นในระนาบสองตัวแปร ที่มีความชันไม่เท่ากัน จะมีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\boldsymbol{A}$ ที่ $\rho(\boldsymbol{A}) = 2$ สมมติเส้นตรงแต่ละเส้นถูกแสดงด้วยสมการ

$$(x_2 - q) = \beta_1(x_1 - p)$$
$$(x_2 - q) = \beta_2(x_1 - p)$$

เส้นตรงแต่ละเส้นมีความชันเมื่อมองจากระนาบที่ x_2 คือ แกนตั้ง และ x_1 คือ แกนนอน เท่ากับ β_1 และ β_2 ตามลำดับ โดยมีจุดตัดที่จุด $(x_1, x_2) = (p, q)$ ระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น สามารถจัดให้อยู่ในรูป

$$\beta_1 x_1 - x_2 = \beta_1 p - q$$
$$\beta_2 x_1 - x_2 = \beta_2 p - q$$

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\hat{A}$ ที่สอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้นนี้ คือ

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cc|c} \beta_1 & -1 & \beta_1 p - q \\ \beta_2 & -1 & \beta_2 p - q \end{array} \right)$$

ซึ่งสามารถเห็นได้อย่างชัดเจนว่า $\rho(\hat{\boldsymbol{A}}) = \rho(\boldsymbol{A}) = 2$ เมื่อ $\beta_1 \neq \beta_2$ เท่านั้น ในกรณีที่ $\beta_1 = \beta_2$ คือ เมื่อ $\rho(\hat{\boldsymbol{A}}) = \rho(\boldsymbol{A}) = 1$ ระบบสมการนี้จะประกอบด้วยเส้นตรงเพียงเส้นเดียว ที่ทุกจุด (x_1, x_2) ที่อยู่บนเส้นตรงนี้ คือคำตอบของระบบสมการ และจากโครงสร้างของระบบสมการนี้ กรณีที่ระบบสมการไม่มีคำตอบ คือ เมื่อ $\rho(\boldsymbol{A}) = 0$ และ $\rho(\hat{\boldsymbol{A}}) = 1$ จะเกิดขึ้นไม่ได้

2. กรณีที่ $m > 2$ กรณีนี้อาจแยกวิเคราะห์ได้ เป็นกรณีย่อยตามรูปที่ 1.3 คือ อาจมีเส้นตรงสองชุด ที่ชุดแรกมีความชันเท่ากับ β_1 และชุดที่สองมีความชันเท่ากับ β_2 โดยที่ $\beta_1 \neq \beta_2$ ในกรณีย่อยนี้ หากใช้วิธีการลดทอนตัวแปร โดยการเอาค่าในแต่ละแถวที่เหมือนกันลบกัน จนกระทั่งเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\boldsymbol{A}$ ได้ถูกแปลงให้อยู่ในรูป

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1 & -1 \\ \beta_2 & -1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า $\rho(\boldsymbol{A}) = 2$ เช่นกัน อีกกรณีย่อยที่น่าสนใจ คือ กรณีย่อยสุดท้ายตามรูปที่ 1.3 คือ การที่ระบบสมการเชิงเส้น สร้างเส้นตรงหลายเส้น ที่แต่ละเส้นมีความชันไม่เท่ากัน และทุกเส้นมีจุดตัดร่วมกัน ในกรณีนี้ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(x_2 - q) &= \beta_1(x_1 - p) \\
(x_2 - q) &= \beta_2(x_1 - p) \\
&\vdots \\
(x_2 - q) &= \beta_m(x_1 - p)
\end{aligned}
$$

เป็นระบบสมการที่สร้างเส้นตรง m เส้นที่มีความชันไม่เท่ากันเมื่อ $\beta_1 \neq \ldots \neq \beta_m$ และทั้งหมดตัดกันที่จุดเดียว คือ $(x_1, x_2) = (p, q)$

เพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์ หากจัดรูปพารามิเตอร์ β_i ใหม่ให้อยู่ในรูปของพารามิเตอร์ร่วมกัน คือ β กล่าวคือ $\beta_1 = \beta, \beta_2 = k_2\beta, \ldots, \beta_m = k_m\beta$ โดยที่ $k_2 \neq \ldots \neq k_m$ จะได้ว่า เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยาย $\hat{A}$ ที่สอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้นนี้ คือ

$$
\hat{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{rr|r}
\beta & -1 & \beta p - q \\
k_2\beta & -1 & k_2\beta p - q \\
k_3\beta & -1 & k_3\beta p - q \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
k_m\beta & -1 & k_m\beta p - q
\end{array}\right)
$$

จากเมตริกซ์ข้างต้น หากใช้ค่าในแถวแรกเป็นฐาน เมื่อเอาค่าในแถวที่ 1 คูณด้วย k_j และนำไปลบด้วยค่าในแถวที่ j และแทนที่ในแถวที่ j เมื่อ $j \geq 2$ แล้ว จะได้เมตริกซ์ซึ่งค่าในแถวอื่นๆ ของคอลัมน์แรกเท่ากับ 0 กล่าวคือ

$$
\hat{\boldsymbol{A}} \sim \left(\begin{array}{cr|r}
\beta & -1 & \beta p - q \\
0 & 1 - k_2 & (1 - k_2)q \\
0 & 1 - k_3 & (1 - k_3)q \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 1 - k_m & (1 - k_m)q
\end{array}\right)
$$

จากนั้น เมื่อเอาค่าในแถวที่ 2 คูณด้วย $-\left(\frac{1-k_j}{1-k_2}\right)$ และรวมเข้ากับค่าในแถวที่ $j \geq 3$ จะได้

$$\hat{\boldsymbol{A}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} \beta & -1 & \beta p - q \\ 0 & 1-k_2 & (1-k_2)q \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ซึ่งให้ข้อสรุปว่า $\rho(\hat{\boldsymbol{A}}) = \rho(\boldsymbol{A}) = 2$ เช่นเดียวกับกรณีแรก □

ข้อเท็จจริงที่ 1.10 สำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่มีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\boldsymbol{A}$ ที่มีจำนวนแถวเท่ากับ m และจำนวนคอลัมน์เท่ากับ n

1. หาก $\rho(\boldsymbol{A}) = m = n$ แล้ว ระบบสมการนี้มีคำตอบ และมีคำตอบเพียงชุดเดียวเสมอสำหรับค่า $b_1, \ldots, b_m$ ใดๆ

2. หากระบบสมการนี้มีคำตอบ และมีคำตอบเพียงชุดเดียวสำหรับค่า $b_1, \ldots, b_m$ ใดๆ จะได้ว่า $\rho(\boldsymbol{A}) = m = n$ ■

ข้อเท็จจริงสุดท้ายที่จะได้กล่าวถึงในที่นี้ เป็นการสรุปข้อสำคัญที่ได้กล่าวไว้แล้วทั้งหมด ในกรณีที่ระบบสมการมีจำนวนแถวและตัวแปรเท่ากัน และมีอันดับเท่ากับจำนวนแถวและตัวแปรของเมตริกซ์ กล่าวคือ เงื่อนไข $m = n = \rho(\boldsymbol{A})$ นั้น เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ สำหรับการที่ระบบสมการมีคำตอบ และมีคำตอบเพียงชุดเดียว ซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่ได้จากข้อเท็จจริงที่ 1.7 และ 1.9 อนึ่ง คุณสมบัติเรื่องการมีอยู่ (existence) และการมีอยู่หนึ่งเดียว (uniqueness) ของคำตอบของระบบสมการนั้น มีความสำคัญยิ่งกับการประยุกต์ทางเศรษฐศาสตร์ เนื่องด้วยแนวคิดนี้ มีความสัมพันธ์กับแนวคิดทางเศรษฐศาสตร์เรื่องการมีอยู่ และการมีอยู่หนึ่งเดียวของดุลยภาพ (equilibrium) เป็นอย่างยิ่ง ไม่ว่าจะเป็นดุลยภาพของตลาด หรือดุลยภาพของเกม เรื่องดุลยภาพนั้น อาจนับเป็นหัวใจของวิชาเศรษฐศาสตร์ได้ ด้วยว่าเป็นแนวคิดที่ทำนายความเป็นไปที่จะเกิดขึ้น ในสถานการณ์ที่เป็นอยู่ เช่น ดุลยภาพของตลาดแข่งขันแบบสมบูรณ์ซึ่งประกอบด้วยราคาและปริมาณดุลยภาพนั้น หากจะพิจารณาในแง่นี้ ก็ไม่ต่างจากการทำนายว่า ด้วยโครงสร้างของตลาดที่เป็นอยู่เช่นนี้นั้น ราคาและปริมาณของสินค้าจะเป็นเช่นไร และหากตัวแปรภายนอกต่างๆ ที่ส่งผลกระทบต่ออุปสงค์และอุปทานในตลาดได้เปลี่ยนไป ราคาและปริมาณของสินค้าที่ระดับใหม่จะเป็นเช่นไร หรือหากเป็นดุลยภาพในทฤษฎีเกม ก็เปรียบได้กับการทำนายพฤติกรรมของผู้เล่น

	$m < n$	$m = n$	$m > n$
$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$	S_∞	S_1, S_∞	S_1, S_∞
$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$	S_0, S_∞	S_0, S_1, S_∞	S_0, S_1, S_∞
$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \rho(\boldsymbol{A}) = \min\{n, m\}$	S_∞	S_1	S_0, S_1

ตารางที่ 1.1 ข้อเท็จจริงเกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้น m สมการและ n ตัวแปร เมื่อ $\boldsymbol{A}$ คือเมตริกซ์สัมประสิทธิ์และ $\boldsymbol{b}$ คือ เวคเตอร์ของค่าทางด้านขวาของระบบสมการ S_0, S_1, S_∞ คือกรณีที่มีระบบสมการไม่มีคำตอบ มีคำตอบเพียงชุดเดียว และมีคำตอบมากมายนับไม่ถ้วน ตามลำดับ

แต่ละคนในเกมว่า ที่สุดแล้วผู้เล่นแต่ละคนจะเลือกกระทำสิ่งใด เป็นต้น ดังนี้ คุณสมบัติเรื่องการมีอยู่ และการมีอยู่หนึ่งเดียวของดุลยภาพ จึงสำคัญยิ่ง เพราะเป็นคุณสมบัติที่ย้ำให้เห็นว่า สิ่งที่ประสงค์จะทำนายนั้นมีอยู่ คือ สามารถทำนายได้ และมีอยู่หนึ่งเดียว คือ สามารถชี้ชัดลงไปได้ว่าอะไรจะเกิดขึ้น ไม่ใช่การทำนายอย่างคลุมเครือไปกว้างๆ ว่าอะไรก็เกิดได้ทั้งนั้น

จากข้อเท็จจริงทั้งหมดที่ได้กล่าวมาแล้วนี้ ลักษณะของคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ว่าระบบจะไม่มีคำตอบ (S_0) มีคำตอบชุดเดียว (S_1) หรือมีคำตอบมากมายไม่จำกัด (S_∞) ทั้งในกรณีที่ระบบมีจำนวนสมการ (m) น้อยกว่า เท่ากับ หรือมากกว่าจำนวนตัวแปร (n) สามารถนำประมวลไว้อย่างเป็นระบบได้ ตามตารางที่ 1.1 แนวนอนของตาราง เป็นการระบุจำนวนสมการและตัวแปรในระบบ ซึ่งจำแนกได้เป็น 3 กรณี คือ กรณีที่จำนวนสมการน้อยกว่าตัวแปร ($m < n$) กรณีที่จำนวนสมการเท่ากับตัวแปร ($m = n$) และจำนวนสมการมากกว่าตัวแปร ($m > n$) ส่วนแนวตั้งของตาราง เป็นการระบุระบบสมการเชิงเส้นในลักษณะต่างๆ โดยในกรณีแรก คือระบบสมการเชิงเส้นที่มีลักษณะเดียวกัน ที่ค่าทางฝั่งขวาของทุกสมการเท่ากับศูนย์ ($\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$) กรณีที่สองเป็นกรณีทั่วไป ที่ค่าทางด้านขวาของระบบสมการเป็นจำนวนจริงใดๆ ($\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$) และในกรณีสุดท้าย เป็นกรณีที่อันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการ เท่ากับค่าต่ำสุดระหว่างแถว หรือคอลัมน์ของเมตริกซ์ ค่าในแต่ละช่องของตาราง คือ จำนวนคำตอบที่เป็นไปได้ของระบบสมการ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขตามแนวนอนและแนวตั้งที่กำหนด

แม้เงื่อนไขและผลลัพธ์ต่างๆ ดังที่ได้แสดงในตารางที่ 1.1 นั้น จะใช้ได้กับระบบสมการเชิงเส้นกรณีทั่วไป ที่มีจำนวนสมการและตัวแปรเป็นเท่าใดก็ได้ก็ตาม แต่หากพิจารณาระบบสมการในกรณีเฉพาะที่มีเพียงสองตัวแปร ก็จะช่วยให้เข้าใจเนื้อความใจตารางได้อย่างชัดเจนยิ่งขึ้น เนื่องด้วยเป็นกรณีที่อาจอธิบายคำตอบของระบบสมการได้ ด้วยจุดตัดร่วมของเส้นตรงในระนาบสอง

มิติ ในแถวแรกของตาราง ซึ่งเป็นการพิจารณาคำตอบของ ระบบสมการที่มีค่าทางฝั่งขวามือทุกค่าเท่ากับ 0 นั้น แต่ละสมการในระบบอาจเปรียบได้เส้นตรงที่จำต้องลากผ่านจุดกำเนิด ดังนี้ จุดตัดร่วมของเส้นตรงในทุกกรณีจะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งจุด คือจุดกำเนิดเสมอ โดยหาก $m < n$ ซึ่งในกรณีนี้ คือ เส้นตรงเส้นเดียวในระนาบสองมิติที่ลากผ่านจุดกำหนด ทุกจุดบนเส้นตรงนี้ จึงเป็นคำตอบของระบบสมการนี้ซึ่งมีมากมายไม่จำกัด หาก $m = n$ ซึ่งในกรณีนี้ คือ เส้นตรงสองเส้นในระนาบสองมิติที่ลากผ่านจุดต้นกำเนิด ระบบสมการนี้อาจมีคำตอบเพียงชุดเดียว เมื่อเส้นตรงทั้งสองเส้นมีความชันต่างกัน หรือมีคำตอบมากมายไม่จำกัด เมื่อเส้นตรงทั้งสองเส้นมีความชันเท่ากัน ซึ่งในกรณีนี้จะต้องทาบกันไปเสมอ และในกรณีสุดท้าย หาก $m > n$ ซึ่งในกรณีนี้ คือ เส้นตรงตั้งแต่สามเส้นขึ้นไปในระนาบสองมิติที่ลากผ่านจุดต้นกำเนิด ระบบสมการนี้อาจมีคำตอบเพียงชุดเดียว เมื่อเส้นตรงทุกเส้นมีความชันต่างกัน หรือมีคำตอบมากมายไม่จำกัด เมื่อเส้นตรงทุกเส้นมีความชันเท่ากันและทาบกันไปทุกเส้น

แถวที่สองของตารางเป็นการประมวลลักษณะคำตอบของระบบสมการ เมื่อทุกค่าทางฝั่งขวาของสมการเป็นค่าใดๆ ก็ได้ ในกรณีนี้นั้น ระบบสมการอาจไม่มีคำตอบ (S_0) ได้หากบางแถวของระบบสมการ คือ

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = b$$

โดยที่ $b \neq 0$ และหากไม่มีกรณีเช่นนี้เกิดขึ้น ระบบสมการที่มีจำนวนสมการน้อยกว่าตัวแปร ซึ่งในที่นี้คือเส้นตรงเพียงหนึ่งเส้นในระนาบสองมิติ จะมีคำตอบมากมายไม่จำกัด ด้วยว่าทุกจุดบนเส้นตรงต่างเป็นคำตอบของระบบสมการ หรือในอีกกรณีหนึ่ง หากระบบสมการมีจำนวนสมการเท่ากับตัวแปรคือสอง คำตอบของระบบสมการ จะเปรียบได้กับจุดตัดของเส้นตรงสองเส้น บนระนาบสองมิติ ซึ่งอาจมีจุดตัดเพียงจุดเดียว หากทั้งสองเส้นมีความชันต่างกัน ไม่มีจุดตัดหากทั้งสองเส้นมีความชันเท่ากัน แต่มีจุดตัดแกนต่างกัน หรืออาจมีจุดตัดนับไม่ถ้วน หากทั้งสองเส้นมีความชันและจุดตัดแกนเท่ากันก็เป็นได้ และสำหรับกรณีสุดท้าย ที่ระบบสมการมีจำนวนสมการมากกว่าตัวแปรนั้น อาจเปรียบได้กับการเพิ่มเส้นตรงในระนาบ ให้เท่ากับจำนวนสมการในระบบซึ่งอาจให้คำตอบลักษณะใดลักษณะหนึ่ง จากทั้งสามประเภทก็เป็นได้

แถวสุดท้ายของตาราง เป็นการกำหนดเงื่อนไขเกี่ยวกับอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการ เพิ่มเติมขึ้นจากกรณีทั่วไปในแถวที่สอง ดังนี้ คำตอบของระบบสมการ ที่ได้กำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมขึ้นเช่นนี้ จึงย่อมต้องเป็นเซตย่อยของคำตอบของระบบสมการในกรณีทั่วไปเสมอ สำหรับกรณีแรกเมื่อ $m < n$ และกรณีที่สองเมื่อ $m = n$ นั้น การที่ $\rho(\boldsymbol{A}) = m$ เปรียบได้กับการตัดความเป็นไปได้ ที่บางแถวของระบบสมการจะมีค่าทุกตัวเท่ากับ 0 ออกไป จึงย่อมเป็นการตัดความเป็นไปได้ที่ระบบสมการจะไม่มีคำตอบ (S_0) ออกไปด้วย ส่วนในกรณีสุดท้ายเมื่อ $m > n$

นั้น การที่ $\rho(\boldsymbol{A}) = n$ ยังคงไม่ได้ตัดความเป็นไปได้ ที่บางแถวของระบบสมการ จะมีค่าทุกตัวเท่ากับศูนย์ออกไป ระบบสมการจึงยังอาจไม่มีคำตอบ (S_0) อยู่ ส่วนในประเด็นที่ว่า ในกรณีนี้หากระบบสมการนี้มีคำตอบ เหตุใดคำตอบจึงสามารถมีเพียงชุดเดียวเท่านั้น แต่ไม่อาจมีคำตอบมากมายไม่สิ้นสุดได้ หากพิจารณาในกรณีระนาบสองมิติ เมื่อ $\rho(\boldsymbol{A}) = 2$ นั้น จะเห็นได้ว่า ระบบสมการจะต้องสร้างเส้นตรงที่มีความชันที่ต่างกันอย่างน้อย 2 เส้นด้วยกัน ซึ่งหากมีเพียงเส้นตรงสองเส้นที่ความชันไม่เท่ากันแล้ว จะมีจุดตัดหนึ่งจุดหรือคำตอบหนึ่งชุดเสมอ ดังนั้น หากมีเส้นตรงเส้นอื่นเพิ่มเติมมา และแต่ละเส้นทาบไปกับเส้นตรงเดิม เส้นใดเส้นหนึ่ง ก็จะเป็นระบบสมการที่มีคำตอบเพียงชุดเดียว (S_1) แต่หากเส้นตรงแต่ละเส้นตัดกันอย่างสะเปะสะปะ โดยไม่มีจุดตัดร่วมอย่างใดเลย ก็จะเป็นระบบสมการที่ไม่มีคำตอบ (S_0)

1.4 การประยุกต์ในเศรษฐศาสตร์

เนื้อหาส่วนสุดท้ายของบท จะได้กล่าวถึงแนวทางการประยุกต์ใช้แนวคิดเรื่องระบบสมการเชิงเส้น กับแนวทางต่างๆ ทางเศรษฐศาสตร์ ทั้งนี้ จากที่ทฤษฎีในทางเศรษฐศาสตร์มักอยู่ในรูปของความสัมพันธ์แบบฟังก์ชั่น ระหว่างตัวแปรตามและตัวแปรอธิบาย เช่น ทฤษฎีอุปสงค์กล่าวไว้ว่า ปริมาณสินค้าและบริการที่ผู้บริโภคต้องการและสามารถซื้อได้ จะขึ้นอยู่กับปัจจัยต่างๆ เช่น ราคาของสินค้าและบริการดังกล่าว รายได้ของผู้บริโภค ราคาของสินค้าและบริการอื่นที่เกี่ยวข้อง ความพอใจของผู้บริโภค เป็นต้น ซึ่งสามารถเขียนในรูปของฟังก์ชั่นได้ คือ

$$q_x = f(p_x, m, p_y, t)$$

เมื่อ q_x คือตัวแปรตามในความสัมพันธ์นี้ ซึ่งแทนปริมาณของสินค้า x ที่ผู้บริโภคต้องการและสามารถซื้อได้ โดยมีตัวแปรตามซึ่งประกอบด้วย p_x คือราคาของสินค้า m คือรายได้ของผู้บริโภค p_y คือราคาของสินค้าที่เกี่ยวข้อง และ t คือตัวแปรที่สะท้อนความพอใจและรสนิยม (preference and taste) ของผู้บริโภคต่อสินค้า โดยความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม และตัวแปรอธิบายข้างต้น ได้ถูกกำหนดโดยความสัมพันธ์แบบฟังก์ชั่น ซึ่งในกรณีนี้ใช้แทนด้วย f ลักษณะความสัมพันธ์ข้างต้น เป็นตัวอย่างหนึ่ง ของการกำหนดความสัมพันธ์แบบกว้าง กล่าวคือ เป็นเพียงการระบุว่า ตัวแปรตามที่กำลังพิจารณานั้น ขึ้นอยู่กับตัวแปรอธิบายใดบ้าง หาได้ระบุชี้ชัดลงไปว่าเป็นความสัมพันธ์ในลักษณะเช่นไรอย่างใดไม่ อย่างไรก็ตาม หากได้มีการระบุลักษณะของฟังก์ชั่นให้ชัดเจนยิ่งขึ้นไปว่าความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในฟังก์ชั่นนั้น มีลักษณะเช่นใด ก็จะช่วยให้เข้าใจถึงทั้งทิศทาง และผลกระทบของตัวแปรอธิบายต่อตัวแปรตามได้แน่ชัดขึ้น เช่น หากสมมติให้

$$q_x = a_1 p_x + a_2 m + a_3 p_y + a_4 t$$

โดยที่ $a_1, \ldots, a_4$ คือ ค่าพารามิเตอร์หรือค่าสัมประสิทธิ์ซึ่งเป็นค่าคงที่ในสมการ จะได้ว่า ความสัมพันธ์ในที่นี้ เป็น**ฟังก์ชั่นเส้นตรง (linear function)** ซึ่งจากลักษณะของฟังก์ชั่นที่ได้ถูกระบุอย่างชัดเจนเช่นนี้ จะช่วยให้สามารถเข้าใจผลกระทบของตัวแปรแต่ละตัว ต่อปริมาณสินค้าที่ผู้บริโภคต้องการซื้อได้โดยทันที จากค่าสัมประสิทธิ์ในสมการ เช่น a_1 ควรมีค่าเป็นลบเพื่อให้ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสินค้าและราคาสินค้า สอดคล้องกับกฎของอุปสงค์ที่ว่าเมื่อราคาสินค้าสูงขึ้น ปริมาณสินค้าที่ผู้บริโภคต้องการซื้อจะลดลง ค่าของ a_2 เป็นค่ากำหนดความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสินค้าที่ต้องการจะซื้อและรายได้ของผู้บริโภค โดยหาก a_2 มีค่าเป็นบวก สินค้า x จะเป็นสินค้าแบบปกติที่ผู้บริโภคต้องการซื้อมากขึ้นหากรายได้เพิ่มขึ้น และหาก a_2 มีค่าเป็นลบ สินค้า x จะเป็นสินค้าแบบด้อยคุณภาพ ค่าของ a_3 เป็นการกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสินค้าที่ต้องการจะซื้อและราคาของสินค้าชนิดอื่น โดยหาก a_3 มีค่าเป็นลบ สินค้า x และ y จะเป็นสินค้าที่ใช้ร่วมกัน และหาก a_3 มีค่าเป็นบวก สินค้า x และ y จะเป็นสินค้าที่ใช้ทดแทนกัน ลักษณะเฉพาะที่สำคัญอีกประการหนึ่งของฟังก์ชั่นเส้นตรง คือ ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามและตัวแปรอธิบายแต่ละตัวมีลักษณะคงที่ ไม่ขึ้นอยู่กับค่าของตัวแปรอธิบาย โดยไม่ว่าค่าของตัวแปรอธิบายแต่ละตัวจะเป็นเท่าใด ผลกระทบของตัวแปรอธิบายที่มีต่อตัวแปรตามก็จะมีค่าเท่าเดิม คือ เมื่อได้ควบคุมปัจจัยอื่น คือ รายได้ ราคาสินค้าอื่น และรสนิยมของผู้บริโภคให้คงที่ หากราคาสินค้า p_x เพิ่มขึ้น 1 หน่วย ปริมาณสินค้าที่ผู้บริโภคต้องการซื้อคือ q_x ก็จะมีค่าเพิ่มขึ้น a_1 หน่วยเสมอ ไม่ว่า p_x จะเป็นเท่าใดก็ตาม

อนึ่ง แม้การสมมติให้อุปสงค์ของสินค้า สามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชั่นเชิงเส้นในลักษณะข้างต้นนี้ อาจดูไม่สมจริงอยู่มาก เพราะในความเป็นจริงแล้ว ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่างๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในความสัมพันธ์ทางสังคมศาสตร์นั้น มักไม่อาจระบุจำเพาะได้อย่างชัดเจนดังเช่นความสัมพันธ์ในทางวิทยาศาสตร์ ว่าความสัมพันธ์นั้นมีลักษณะเช่นใด หรือแม้ไม่อาจระบุความสัมพันธ์ที่ชัดเจนได้ หากจะใช้สามัญสำนึกวิเคราะห์แล้ว ความสัมพันธ์เช่นอุปสงค์นั้น ก็ดูจะเป็นความสัมพันธ์ในลักษณะที่ไม่ใช่เชิงเส้น มากกว่าความสัมพันธ์แบบเชิงเส้น เช่น สินค้าส่วนใหญ่ซึ่งเป็นสินค้าจำเป็นนั้น แม้จะมีราคาสูงสักเท่าใด ผู้บริโภคก็ยังจำเป็นต้องซื้อ ดังนี้ การจะอธิบายอุปสงค์ ด้วยความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นที่ว่า หากราคาเพิ่มขึ้นหนึ่งหน่วย ปริมาณที่ผู้บริโภคต้องการซื้อจะลดลงในระดับที่เท่าเดิมเสมอ จึงย่อมไม่ใช่ลักษณะความสัมพันธ์ที่สมจริง

สำหรับในข้อนี้นั้น ผู้เขียนเห็นว่า การจะปฏิเสธการประยุกต์ใช้แนวคิดเรื่องระบบสมการเชิงเส้นกับแนวคิดในทางเศรษฐศาสตร์ เพียงเพราะเหตุผลเช่นที่ว่านี้นั้น ดูออกจะเป็นการด่วนประเมินความสำคัญ ของพีชคณิตเชิงเส้นให้ต่ำกว่าความเป็นจริงอยู่มาก ด้วยเหตุผลสองประการ คือ ในประการแรก การศึกษาวิชาพีชคณิตเชิงเส้นนั้น ถือเป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาวิชาพีชคณิตในแขนงต่างๆ ซึ่งผู้ที่มีความเข้าใจในเนื้อหาวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเป็นอย่างดีแล้ว สามารถใช้เป็นพื้นฐาน

สำคัญ ในการศึกษาวิชาพีชคณิตระดับสูง ซึ่งศึกษาความสัมพันธ์ในลักษณะที่ไม่เป็นเส้นตรงได้โดยง่าย และประการที่สอง ความสัมพันธ์ที่ไม่ใช่เส้นตรงมักสามารถประมาณการได้โดยใช้ตัวแบบที่เป็นเส้นตรงได้ อาทิ พื้นดินบนโลกแม้ไม่ใช่พื้นเรียบ แต่สถาปนิกเมื่อออกแบบสร้างบ้านก็สามารถสมมุติได้ว่าพื้นดินเป็นพื้นเรียบ เป็นต้น ดังนี้ ความสัมพันธ์ เช่น

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k$$

นั้น แม้เป็นสมการพหุนามของตัวแปรตาม คือ x ซึ่งไม่ใช่ความสัมพันธ์เชิงเส้นเสียทีเดียว แต่หากจัดรูปให้ตัวแปร x^i ในสมการ เป็นตัวแปรใหม่ กล่าวคือ $x^i = x_i$จะได้สมการใหม่ในรูป

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรตาม k ตัว เป็นต้น หรือความสัมพันธ์ เช่น

$$x^ay^b = c$$

นั้น แม้ไม่ใช่สมการเชิงเส้นแต่เดิม แต่หากแปลงความสัมพันธ์นี้ โดยการนำทั้งสองข้างของสมการแปลงด้วยฟังก์ชั่น ln แล้ว จะได้ความสัมพันธ์ใหม่ คือ

$$a \ln x + b \ln y = \ln c$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น หากให้ตัวแปรในสมการ คือ $\ln x$ ต่างๆ เป็นต้น

ในส่วนต่อไป จะได้พิจารณาตัวอย่างการประยุกต์ความรู้ในหัวข้อต่างๆ ดังที่ได้พิจารณามาแล้วในบทนี้ เข้ากับแนวคิดทางเศรษฐศาสตร์เป็นเรื่องๆ อนึ่ง โดยที่หัวข้อทางเศรษฐศาสตร์ ที่สามารถนำมาประยุกต์กับแนวคิดเรื่องระบบสมการเชิงเส้นนั้นมีมาก หัวข้อที่ผู้เขียนจะได้เลือกมาอธิบายในที่นี้ จึงล้วนมีลักษณะร่วมกันในแง่ที่ว่า ต่างเป็นหัวข้อทางเศรษฐศาสตร์ที่ง่าย ไม่ซับซ้อน ที่แม้ผู้ไม่เคยศึกษาวิชาเศรษฐศาสตร์มาก่อน ก็สามารถเข้าใจได้ไม่ยาก ทั้งนี้ ก็ด้วยเหตุผลที่ว่า หนังสือเล่มนี้เป็นตำราพีชคณิตสำหรับเศรษฐศาสตร์ ไม่ใช่ตำราทางเศรษฐศาสตร์เสียทีเดียว จึงเป็นการสมควร ที่จะเรียบเรียงให้เนื้อหาในหนังสือ มุ่งเน้นไปในทางคณิตศาสตร์มากกว่าเศรษฐศาสตร์

1.4.1 การหาจุดคุ้มทุน

จุดคุ้มทุน (break-even point) คือ ระดับของปริมาณการผลิตสินค้าหรือบริการ ที่หากผู้

ผลิตได้ผลิตพ้นจากจุดคุ้มทุนนี้ไปแล้ว จะเริ่มมีกำไร ในการกำหนดจุดคุ้มทุนนั้น นิยมพิจารณาจากฟังก์ชั่นต้นทุนของผู้ผลิต ซึ่งหากสมมติให้ฟังก์ชั่นนี้ อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้น คือ

$$C(x) = f + cx$$

โดยที่ $C(x)$ คือฟังก์ชั่นต้นทุน หรือรายจ่าย ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นเชิงเส้น[1] ที่ขึ้นอยู่กับองค์ประกอบสองส่วน ได้แก่ ต้นทุนคงที่ (fixed cost) คือ $f \geq 0$ ซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับปริมาณการผลิต และเป็นต้นทุนที่ผู้ผลิตจำเป็นต้องแบกรับ แม้จะไม่ผลิตเลยก็ตาม และต้นทุนผันแปร (variable cost) คือ cx โดยที่ $c > 0$ คือ ต้นทุนส่วนเพิ่ม (marginal cost) และ $x \geq 0$ คือระดับปริมาณการผลิตสินค้าหรือบริการ

องค์ประกอบต่อไปที่จะได้พิจารณา คือ รายรับของผู้ผลิต ซึ่งอยู่ในรูปสมการ

$$R(x) = px$$

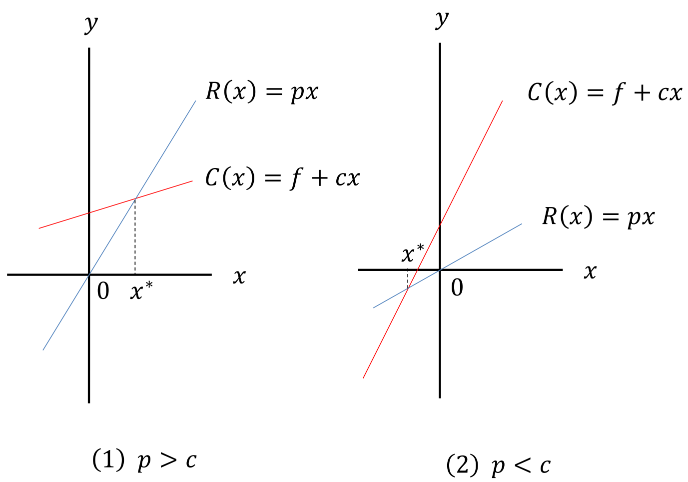
โดยที่ $R(x)$ คือฟังก์ชั่นรายรับ และ $p > 0$ คือ ราคาต่อหน่วยของสินค้าที่ขายได้ โดยหากผู้ผลิตอยู่ในตลาดแข่งขันแบบสมบูรณ์ ซึ่งผู้ผลิตทุกรายต่างไม่ได้มีอำนาจเหนือตลาด หากต้องรับราคาตลาดมาพิจารณาว่าจะผลิตเท่าใดให้ได้กำไรสูงสุดแล้ว จะได้ว่า p จะป็นค่าคงที่ซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับปริมาณที่ผลิต กล่าวคือ ฟังก์ชั่นรายรับของผู้ผลิต จะเป็นฟังก์ชั่นเชิงเส้น[2] ซึ่งในกรณีนี้ จะได้ว่า จุดคุ้มทุน คือ ค่า x^* ที่มีคุณสมบัติ คือ

$$\{x^* | R(x) \geq C(x), \forall x \geq x^*\}$$

การหาจุดคุ้มทุนจากฟังก์ชั่นรายรับและต้นทุนข้างต้น เริ่มได้จากการจัดรูปฟังก์ชั่นทั้งหมด ให้อยู่ในรูประบบสมการเชิงเส้น โดยพิจารณาหาตัวแปร ที่เป็นตัวแปรร่วมกันของทั้งสองสมการ ซึ่งในกรณีนี้ ได้แก่ x คือ ปริมาณสินค้าที่ผลิต และ y คือ เงินสด ซึ่งเป็นตัวแปรที่ใช้แทนทั้งรายรับ

[1]อนึ่ง ฟังก์ชั่นต้นทุนซึ่งอยู่ในรูปฟังก์ชั่นเชิงเส้น จะอยู่ภายใต้ข้อสมมติที่ว่าฟังก์ชั่นการผลิต มีคุณสมบัติผลได้ต่อขนาดคงที่ (constant return to scale) ซึ่งโดยทั่วไปแล้วเป็นคุณสมบัติที่ไม่สมจริง ทั้งนี้หากสมมติให้ฟังก์ชั่นการผลิตมีคุณสมบัติผลได้ต่อขนาดลดลง (decreasing return to scale) ซึ่งสมจริงกว่า ฟังก์ชั่นต้นทุนจะเพิ่มขึ้นตามปริมาณการผลิตในอัตราเร่ง ในกรณีนี้ การกำหนดให้ฟังก์ชั่นต้นทุนอยู่ในรูปฟังก์ชั่นกำลังสาม อาทิ $C(x) = f + ax + bx^2 + cx^3$ จะเป็นที่นิยมกว่า

[2]อนึ่ง ในกรณีทั่วไปที่ราคาสินค้าขึ้นอยู่กับปริมาณสินค้าที่ผู้ผลิต ผลิตออกขายในตลาด ฟังก์ชั่นรายรับซึ่งอยู่ในรูป $R(x) = p(x)x$ มักเป็นฟังก์ชั่นที่ไม่เป็นเส้นตรง อาทิ หากให้ราคาเป็นฟังก์ชั่นเชิงเส้นของปริมาณสินค้า ซึ่งอยู่ในรูป $p(x) = a - bx$ ฟังก์ชั่นรายรับ คือ $R(x) = ax - bx^2$ จะอยู่ในรูปฟังก์ชั่นกำลังสอง (quadratic equation) เป็นต้น



รูปที่ 1.5 จุดคุ้มทุนของการผลิต (x^*) ในกรณีที่ (1) เมื่อราคามากกว่าต้นทุนส่วนเพิ่ม ซึ่งให้จุดคุ้มทุนที่มีค่าเป็นบวก และทุกปริมาณการผลิต $x > x^*$ จะได้กำไร และในกรณีที่ (2)เมื่อราคาน้อยกว่าต้นทุนส่วนเพิ่ม ซึ่งให้จุดคุ้มทุนที่มีค่าเป็นลบ และทุกปริมาณการผลิต $x > x^*$ จะขาดทุน

และรายจ่ายของผู้ผลิต ดังนี้ จะสามารถจัดเรียงทั้งสองสมการให้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้น ได้ คือ

$$\begin{aligned} y - cx &= f \\ y - px &= 0 \end{aligned}$$

ซึ่งมีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยาย เท่ากับ

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} -c & 1 & f \\ -p & 1 & 0 \end{array} \right)$$

ระบบสมการเชิงเส้นนี้ไม่มีคำตอบ หาก $c = p$ และ $f > 0$ ซึ่งเป็นกรณีที่สมการต้นทุน และสมการรายรับ เป็นเส้นตรงที่ขนานกันสองเส้น แต่จะมีคำตอบมากมายไม่จำกัดหาก $c = p$ และ $f = 0$ ซึ่งเป็นกรณีที่ทั้งสองสมการ เป็นเส้นตรงสองเส้นที่อยู่ทับกัน และจะมีคำตอบชุดเดียว ในกรณีที่ $c \neq p$ ซึ่งเป็นกรณีที่ทั้งสองสมการ เป็นเส้นตรงสองเส้นที่มีความชันไม่เท่ากัน จากการหาคำตอบของระบบสมการ ด้วยวิธีใดวิธีหนึ่งจากทั้งสามวิธีที่ได้พิจารณาก่อนหน้านี้แล้ว จะได้จุดคุ้มทุน คือ จุดตัดของฟังก์ชั่นรายรับและต้นทุน ซึ่งเป็นคำตอบของระบบสมการข้างต้น ที่เท่ากับ

$$x^* = \frac{f}{p - c}$$

โดยคำตอบนี้จะสมเหตุสมผล เมื่อคำตอบของระบบสมการนี้ สอดคล้องกับเงื่อนไข คือ ปริมาณสินค้าและบริการที่เป็นจุดคุ้มทุนควรไม่ต่ำกว่าศูนย์ คือ $x^* \geq 0$ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ $p > c$ กล่าวคือ ราคาของสินค้าจะต้องมากกว่าต้นทุนส่วนเพิ่มในการผลิตสินค้าเท่านั้น ทั้งนี้ หาก $p < c$ ซึ่งให้ x^* ที่เป็นลบ x^* จะมีความหมายในทิศทางตรงข้ามกับจุดคุ้มทุนที่ได้นิยามไว้ กล่าวคือ หากผู้ผลิตผลิตในปริมาณ $x > x^*$ จะประสบปัญหาขาดทุนแทนที่จะได้กำไร และหากยิ่งผลิตเกินกว่าจุดนี้เท่าไหร่ ก็จะยิ่งประสบปัญหาขาดทุนมากขึ้นเท่านั้น ทั้งนี้ จากการพิจารณาลักษณะฟังก์ชั่นของจุดคุ้มทุนข้างต้น จะได้ว่า จุดคุ้มทุนจะสูงขึ้นตามระดับต้นทุนคงที่ (f) และต้นทุนส่วนเพิ่ม (c) แต่จะลดต่ำลงตามระดับราคาสินค้า (p)

1.4.2 ดุลยภาพบางส่วน

ดังที่ได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้แล้ว ว่าแนวคิดเรื่อง **ดุลยภาพ (equilibrium)** นั้น ถือเป็นเรื่องสำคัญที่สุดเรื่องหนึ่งในทางเศรษฐศาสตร์ก็ว่าได้ โดยอาจแยกได้เป็น **ดุลยภาพบางส่วน (par-**

tial equilbrium) ซึ่งศึกษาปริมาณและราคาสินค้าในตลาดเดียว และ**ดุลยภาพทั่วไป (general equilibrium)** ซึ่งศึกษาปริมาณและราคาสินค้าในทุกตลาดพร้อมกัน การหาปริมาณและราคาที่ดุลยภาพ สามารถทำได้โดยใช้คุณสมบัติที่ว่า ปริมาณและราคาดุลยภาพของผู้ซื้อและผู้ขายจะต้องเท่ากัน กล่าวคือ ปริมาณที่ผู้ซื้อซื้อ จะต้องเท่ากับปริมาณที่ผู้ขายขายออกไป และหากไม่การเก็บภาษีใดๆ แล้ว ราคาที่ผู้ซื้อจ่าย ก็จะต้องเท่ากับราคาที่ผู้ขายได้รับ เช่นกัน ดังนี้ หากอุปสงค์และอุปทานในตลาด สามารถกำหนดได้ด้วยสมการเชิงเส้น ปริมาณและราคาดุลยภาพในตลาด จึงเป็นคำตอบของระบบสมการ ที่ได้รวบรวมเอาสมการเชิงเส้นของฟังก์ชั่นอุปสงค์และอุปทานเอาไว้ด้วยกัน

สมมติให้สมการเชิงเส้นของฟังก์ชั่นอุปสงค์ของสินค้า x คือ

$$x = a + bp$$

เมื่อ $a > 0$ คือค่าคงที่ซึ่งกำหนดปริมาณที่ผู้บริโภคต้องการซื้อสินค้า x ที่ระดับราคาเท่ากับ 0 ในที่นี้ ค่า a ยังได้รวมเอาผลจากปัจจัยอื่นๆ ที่ส่งผลกระทบต่ออุปสงค์ของสินค้า x เอาไว้เช่นกัน เช่น รายได้ ราคาของสินค้าอื่นที่เกี่ยวข้อง ตลอดจนรสนิยมของผู้บริโภคที่มีต่อสินค้าชนิดนี้ ทั้งนี้ โดยที่จุดสนใจสำคัญของโจทย์ คือ การหาดุลยภาพของราคาและปริมาณในตลาด มากกว่าที่จะเป็นการหาผลกระทบ ของการเปลี่ยนแปลงของปัจจัยอื่นๆ ที่มีต่ออุปสงค์ของ x รูปแบบฟังก์ชั่นอุปสงค์ในที่นี้ จึงได้รวมเอาปัจจัยอื่นๆ ที่อาจส่งผลกระทบต่ออุปสงค์ของสินค้า เหล่านี้เข้าไว้ด้วยกันในค่าคงที่ คือ a และสมมติให้ปัจจัยเหล่านี้เป็น **ปัจจัยภายนอก (exogenous variable)** ซึ่งถูกกำหนดมาจากความสัมพันธ์อื่น ซึ่งไม่ใช่ความสัมพันธ์ที่กำลังพิจารณาอยู่ในที่นี้ และให้ราคาและปริมาณของสินค้า ซึ่งประสงค์จะมุ่งหาคำตอบเป็น**ปัจจัยภายใน (endogenous variable)** ค่า b คือ ผลกระทบของราคา ที่มีต่อปริมาณที่ผู้บริโภคต้องการซื้อสินค้า x ซึ่งโดยกฎของอุปสงค์แล้วจะได้ว่า $b < 0$ กล่าวคือ เมื่อราคาสูงขึ้น ปริมาณสินค้าที่ผู้บริโภคต้องการซื้อจะต้องลดลง

ในลักษณะเดียวกันนี้ หากให้ฟังก์ชั่นอุปทานของสินค้าชนิดเดียวกันนี้ อยู่ในรูปสมการเชิงเส้นคือ

$$x = c + dp$$

เมื่อ c คือ ค่าคงที่ที่แสดงปริมาณสินค้า ที่ผู้ขายยินดีจะขายให้ที่ระดับราคาเท่ากับ 0 โดยทั่วไปแล้วมักนิยมสมมติให้ค่า c เป็นศูนย์ หรือเป็นลบ เนื่องจากโดยปกตินั้น ผู้ขายจะยอมขายสินค้าให้ ก็ต่อเมื่อระดับราคาของสินค้าสูงเกินระดับหนึ่ง ซึ่งในที่นี้ คือ $p > -\frac{c}{d}$ เท่านั้น และจากที่ค่า d คือผลกระทบของราคาสินค้าที่มีต่อปริมาณที่ผู้ขายต้องการขายสินค้า ซึ่งมีค่าเป็นบวก $d > 0$ ภายใต้ข้อสมมติที่ว่า ราคาที่สูงขึ้นจะชักจูงให้ผู้ขายยินดีจะผลิตและขายสินค้าในปริมาณมากขึ้นเพื่อให้ได้

กำไรสูงขึ้น ดังนี้ หากนำเงื่อนไขข้างต้นทั้งหมดมาพิจารณาพร้อมกันแล้ว จะได้ว่า $c \leq 0$

ระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งได้รวมเอาสมการของฟังก์ชั่นอุปสงค์ และฟังก์ชั่นอุปทานในตลาดของสินค้า x เข้าไว้ด้วยตามความสัมพันธ์ข้างต้นนี้ จะอยู่ในรูประบบสมการเชิงเส้น 2 สมการ และ 2 ตัวแปร โดยมีตัวแปร คือ ปริมาณและราคาสินค้า และมีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยายของระบบสมการ เท่ากับ

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -b & a \\ 1 & -d & c \end{array} \right)$$

โดยจากเงื่อนไขกำหนดคุณสมบัติของฟังก์ชั่นอุปสงค์และอุปทาน ดังที่ได้พิจารณาก่อนหน้านี้ คือ $b < 0$ และ $d > 0$ จะได้ว่า ระบบสมการนี้ จะมีคำตอบชุดเดียวเสมอ ผลลัพธ์ในข้อนี้ สัมพันธ์กับข้อเท็จจริงที่ว่าสมการอุปสงค์และอุปทาน ซึ่งสร้างเส้นตรงในระนาบสองมิติที่มีความชันเป็นลบและเป็นบวกในที่นี้ จะให้จุดตัดเพียงจุดเดียวเสมอ จากการหาคำตอบของระบบสมการนี้ ด้วยวิธีใดวิธีหนึ่งจากทั้งสามวิธี ที่ได้ศึกษามาก่อนหน้านี้ ดุลยภาพปริมาณและดุลยภาพราคาในตลาด ซึ่งนิยมใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ x^* และ p^* ตามลำดับ จะเท่ากับ

$$x^* = \frac{ad - bc}{d - b}$$

และ

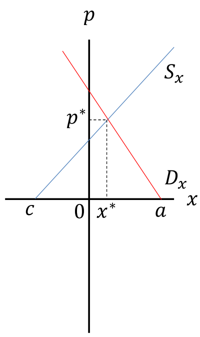
$$p^* = \frac{a - c}{d - b}$$

นอกจากนี้ โดยที่ปริมาณและราคาไม่ควรมีค่าเป็นลบ ในส่วนต่อไปนี้จึงจะเป็นการกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติม เพื่อให้ได้ดุลยภาพที่มีคุณสมบัติดังกล่าว ทั้งนี้ หากได้พิจารณาค่าที่เป็นส่วนของทั้ง x^* และ p^* ซึ่งเท่ากับ $d - b$ แล้ว จะได้ว่า $d - b > 0$ เสมอ เนื่องจาก $d > 0, b < 0$ เงื่อนไขที่ทำให้ดุลยภาพราคาเป็นบวก จึงเท่ากับ $a > c$ ซึ่งเป็นจริงเสมอหาก $a > 0$ และ $c < 0$ สำหรับเงื่อนไขที่ทำให้ดุลยภาพปริมาณเป็นบวก คือ $ad - bc > 0$ นั้น หากจัดเรียงใหม่ให้อยู่ในรูป

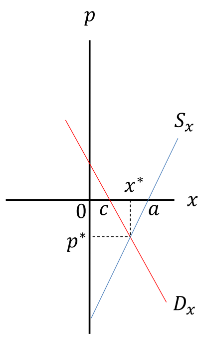
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

ซึ่งเท่ากับ การที่สัดส่วนจุดตัดต่อความชันของเส้นอุปสงค์ จะต้องน้อยกว่าสัดส่วนจุดตัดต่อความชันของเส้นอุปทาน ทั้งนี้ โดยที่ $\frac{a}{b}$ และ $\frac{c}{d}$ ต่างมีค่าเป็นลบด้วยกันทั้งคู่ เงื่อนไขดังกล่าวจึงเทียบได้กับการกำหนดให้เส้นอุปสงค์มีความชันมากกว่าเส้นอุปทาน

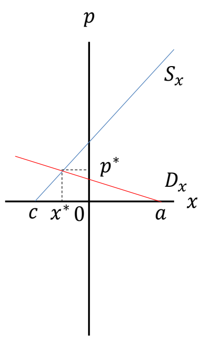
เงื่อนไขที่กำหนดให้ได้ดุลยภาพที่เป็นบวกทั้งหมด ดังที่ได้กล่าวมานี้ สามารถแสดงให้เห็นด้วย



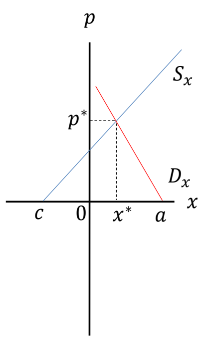
(1) $x^* > 0, p^* > 0$



(2) $x^* > 0, p^* < 0$



(3) $x^* < 0, p^* > 0$



(4) $x^* > 0, p^* > 0$

รูปที่ 1.6 ดุลยภาพบางส่วน เมื่อ $D(x)$ และ $S(x)$ แทนสมการเชิงเส้นที่อธิบายอุปสงค์และอุปทานของสินค้าในตลาดตามลำดับ (1) เมื่อทั้งเงื่อนไข $d > 0, b < 0$ และ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ เป็นจริง ซึ่งให้ค่า $x^* > 0, p^* > 0$ (2) เมื่อ $a > c > 0$ ซึ่งให้ค่า $p^* > 0$ (3) เมื่อเงื่อนไข $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ไม่เป็นจริง ซึ่งให้ค่า $x^* < 0$ และ (4) เมื่อให้ค่าสัมประสิทธิ์ a, c, d เหมือนในข้อ (3) แต่ได้ลดค่า b ลงจนกระทั่งเงื่อนไข $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ เป็นจริง ซึ่งให้ค่า $x^* > 0$

ภาพได้ตามรูปที่ 1.6 จากรูป มีข้อสำคัญที่ควรสังเกตว่า ทั้งสมการอุปสงค์และอุปทานต่างถูกวาดขึ้นในระนาบสองมิติ โดยมีแกนตั้งคือราคา และแกนนอนคือปริมาณ ซึ่งแม้เส้นกราฟแสดงอุปสงค์อุปทานในลักษณะนี้ จะผิดไปจากแนวปฏิบัติในทางคณิตศาสตร์ ที่ควรให้ตัวแปรอิสระ คือ ราคาเป็นแกนนอน และตัวแปรตาม คือ ปริมาณเป็นแกนตั้ง ก็ตาม แต่ก็เป็นไปตามแนวปฏิบัติที่เป็นที่นิยมกัน ในทางวิชาเศรษฐศาสตร์เบื้องต้น จากรูปแรก เป็นกรณีปกติที่ทั้งปริมาณและราคาดุลย-ภาพต่างมีค่าเป็นบวก รูปที่สอง คือ กรณีที่ราคาดุลยภาพเป็นลบ เนื่องจาก $a > c > 0$ รูปที่สามคือ กรณีที่ปริมาณดุลยภาพเป็นลบ เนื่องจาก $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ซึ่งหากพิจารณาในระนาบที่กลับแกนให้ราคาและปริมาณ คือแกนตั้งและแกนนอนตามลำดับแล้ว ค่าสัมบูรณ์ของความชันของเส้นอุปสงค์น้อยกว่าเส้นอุปทาน และในรูปที่สี่ หากกำหนดให้เส้นอุปทาน และจุดตัดของเส้นอุปสงค์ คือ a เหมือนในรูปที่สามทุกประการ จากนั้นเมื่อได้ลดค่า b ให้น้อยลง เพื่อปรับให้เส้นอุปสงค์มีความชันมากขึ้น หรือให้อุปสงค์ตอบสนองต่อราคาน้อยลงยิ่งขึ้น จนกระทั่งเงื่อนไข $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ เป็นจริง จะได้ดุลยภาพปริมาณที่มีค่าเป็นบวกในที่สุด

1.4.3 ดุลยภาพทั่วไป

ดุลยภาพทั่วไป เป็นการขยายแนวคิดเรื่องดุลยภาพบางส่วน ให้ครอบคลุมดุลยภาพในทุกตลาดของระบบเศรษฐกิจ ทั้งตลาดของสินค้าและปัจจัยการผลิต ขั้นตอนในการหาดุลยภาพทั่วไป เริ่มจากการระบุฟังก์ชั่นอุปสงค์และอุปทานของแต่ละตลาด ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นที่ขึ้นอยู่กับราคาของสินค้าทุกประเภท จากนั้นจึงใช้คุณสมบัติที่ว่า ปริมาณสินค้าที่ซื้อและขายที่ระดับดุลยภาพจะต้องเท่ากัน โดยภายใต้เงื่อนไขบางประการเกี่ยวกับอันดับของระบบสมการเชิงเส้น จะสามารถกำหนดให้มีคำตอบของระบบ หรือดุลยภาพเพียงหนึ่งเดียวได้

ตัวแบบเรื่องดุลยภาพทั่วไปในที่นี้ จะได้สมมติให้จำนวนตลาดทั้งระบบเท่ากับ n แห่ง โดยให้ x_{id} และ x_{is} แทนปริมาณที่ต้องการซื้อ และปริมาณที่ต้องการขายในตลาด i ตามลำดับ และให้ p_i แทนราคาสินค้าในตลาด i หากให้ฟังก์ชั่นอุปสงค์ และอุปทานของสินค้าในแต่ละตลาด สามารถแสดงในรูปของสมการเชิงเส้น คือ

$$x_{id} = a_{0i} + a_{1i}p_1 + \ldots + a_{ni}p_i$$
$$x_{is} = b_{0i} + b_{1i}p_1 + \ldots + b_{ni}p_i$$

$\forall i = 1, \ldots, n$ ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า ที่จุดดุลยภาพ $x_{id} = x_{is}$ ดังนั้น

$$(a_{0i} - b_{0i}) + (a_{1i} - b_{1i})p_1 + \ldots + (a_{ni} - b_{ni})p_n = 0,$$

$\forall i = 1, \ldots, n$ และหากให้ $(a_{ji} - b_{ji}) \equiv c_{ji}$ จะสามารถจัดรูปสมการทั้งหมด ให้ได้ระบบสมการเชิงเส้นที่อยู่ในรูป

$$
\begin{aligned}
c_{11}p_1 + c_{12}p_2 + \ldots + c_{1n}p_n &= -c_{10} \\
c_{21}p_1 + c_{22}p_2 + \ldots + c_{2n}p_n &= -c_{20} \\
&\vdots \\
c_{n1}p_1 + c_{n2}p_2 + \ldots + c_{nn}p_n &= -c_{n0}
\end{aligned}
$$

ซึ่งเป็นระบบสมการเชิงเส้น n สมการและ n ตัวแปร คำตอบของระบบสมการนี้จะเป็นอย่างไรนั้น ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเกี่ยวกับอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการดังที่ได้พิจารณาก่อนหน้านี้ เช่น เงื่อนไขที่จำเป็นข้อหนึ่งที่ทำให้ทั้งระบบเศรษฐกิจนี้มีดุลยภาพ และมีดุลยภาพเพียงหนึ่งเดียวได้นั้น คือการมีข้อมูลครบจากทุกตลาด ด้วยว่าหากข้อมูลจากบางตลาดขาดหายไป ก็จะทำให้ระบบสมการเชิงเส้นข้างต้นมีจำนวนสมการน้อยกว่าตัวแปร ซึ่งส่งผลให้คำตอบของระบบสมการนี้ มีคำตอบมากมายไม่จำกัด เป็นต้น

1.4.4 รายได้ประชาชาติ

ตัวแบบเรื่องรายได้ประชาชาติ เป็นเครื่องมือสำคัญทางเศรษฐศาสตร์มหภาค ที่ช่วยให้สามารถเข้าใจผลกระทบของตัวแปรทางเศรษฐกิจที่สำคัญ เช่น รายจ่ายของรัฐบาล และพฤติกรรมการออมของครัวเรือน ต่อรายได้ประชาชาติได้ โดยในที่นี้ จะเป็นการพิจารณาตัวแบบ**บัญชีรายได้ประชาชาติ (national income accounting)** ในเศรษฐกิจแบบปิด ซึ่งกำหนดให้

$$Y = C + I + G$$

เมื่อ Y คือ รายได้ประชาชาติ หรือผลิตภัณฑ์มวลรวมในประเทศ ซึ่งเท่ากับมูลค่าของสินค้าและบริการทั้งหมด ที่ผลิตในประเทศในหนึ่งปี มูลค่าดังกล่าวนี้ สามารถจำแนกได้เป็นสามส่วน ได้แก่ C คือ มูลค่าที่เกิดจากการบริโภคของภาคเอกชน I คือ มูลค่าที่เกิดจากการลงทุนของภาคเอกชน และ G คือ มูลค่าที่เกิดจากการบริโภคและการลงทุนของภาครัฐรวมกัน โดยการบริโภคในทางเศรษฐศาสตร์นั้น หมายรวมค่าใช้จ่ายต่างๆ ที่จ่ายไปเพื่อประโยชน์ที่เกิดขึ้นโดยทันที อาทิ ค่าใช้จ่ายเพื่ออาหาร หรือการนันทนาการ ต่างจากการลงทุน ซึ่งหมายรวมค่าใช้จ่ายต่างๆ ที่จ่ายไปเพื่อประโยชน์ที่จะเกิดขึ้นในอนาคต อาทิ ค่าใช้จ่ายเพื่อการศึกษา หรือเพื่อขยายธุรกิจ เป็นต้น จากนั้น

หากให้การบริโภคของภาคเอกชน สามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงเส้น คือ

$$C = a + bY$$

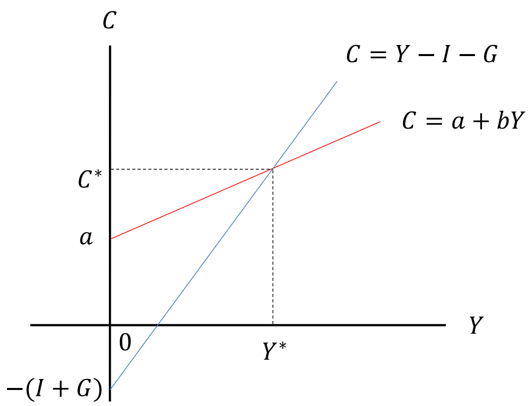
โดยที่ $a > 0$ คือ **ระดับการบริโภคอิสระ (autonomous consumption)** ที่ไม่ขึ้นอยู่กับรายได้ กล่าวคือ เป็นระดับการบริโภคที่ยังคงมีอยู่ แม้จะไม่มีรายได้เลยก็ตาม โดยการใช้จ่ายเพื่อการบริโภคในส่วนนี้ อาจใช้เงินจากแหล่งอื่นนอกเหนือจากรายได้ เช่น การกู้ยืม เป็นต้น และ $0 < b < 1$ คือ **ความโน้มเอียงในการบริโภคหน่วยสุดท้าย (marginal propensity to consume)** ซึ่งวัดระดับการบริโภคที่เพิ่มขึ้น เมื่อรายได้เพิ่มขึ้นเท่ากับ 1 หน่วย โดยทั่วไปแล้ว b จะมีค่าระหว่าง 0 กับ 1 คือ เมื่อมีรายได้สูงขึ้น ระดับการบริโภคก็มักสูงขึ้นด้วย แต่จะไม่สูงเกินกว่าระดับรายได้ที่เพิ่มขึ้นนั้น

โดยทั่วไปแล้ว ทั้งการลงทุนของภาคเอกชน (I) และรายจ่ายภาครัฐ (G) ต่างเป็นตัวแปรที่มักถูกกำหนดโดยตัวแปรอื่น อาทิ ระดับการลงทุนของภาคเอกชน มักขึ้นอยู่กับทั้งสภาพเศรษฐกิจของประเทศในขณะนั้นหรือที่คาดการณ์ว่าเป็นอย่างไร โดยหากเศรษฐกิจดี ก็มักส่งผลให้การลงทุนสูงขึ้นด้วย อีกตัวแปรสำคัญหนึ่งที่กำหนดการลงทุน คือ อัตราดอกเบี้ย โดยหากอัตราดอกเบี้ยสูง ต้นทุนจากดอกเบี้ยจ่ายที่สูงขึ้น หรือค่าเสียโอกาสจากการใช้เงินเพื่อการลงทุนที่สูงขึ้น ย่อมส่งผลให้ระดับการลงทุนลดลง ส่วนรายจ่ายภาครัฐนั้น อาจแปรผันตาม หรือผกผันกับสภาพเศรษฐกิจของประเทศก็ได้ ขึ้นอยู่กับปรัชญาทางการคลังของรัฐบาลซึ่งบริหารประเทศในขณะนั้น ว่าประสงค์จะใช้นโยบายการคลังแบบตามกระแสเศรษฐกิจ (procyclical) หรือทวนกระแสเศรษฐกิจ (countercyclical) อย่างไรก็ตาม ในที่นี้จะถือเอาตัวแปรทั้งสองตัวนี้ เป็นตัวแปรภายนอก ที่ถูกกำหนดจากความสัมพันธ์อื่น และให้อีกสองตัวแปร คือ รายได้ (Y) และการบริโภค (C) เป็นตัวแปรภายใน ที่ค่าของตัวแปร คือคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่กำลังพิจารณาอยู่ โดยจากข้อมูลข้างต้น สามารถกำหนดความสัมพันธ์ในรูประบบสมการ 2 สมการและ 2 ตัวแปรได้ คือ

$$\begin{aligned} Y - C &= I + G \\ -bY + C &= a \end{aligned}$$

ซึ่งมีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยาย เท่ากับ

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{rr|c} 1 & -1 & I+G \\ -b & 1 & a \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rr|c} 1 & -1 & I+G \\ 0 & 1-b & b(I+G)+a \end{array} \right)$$



รูปที่ 1.7 รายได้ประชาชาติและการบริโภค ที่ดุลยภาพ สามารถหาได้จากสมการบัญชีประชาชาติ และสมการการบริโภค ระบบสมการนี้มีคำตอบหนึ่งชุดเสมอ ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า $0 < b < 1$ เมื่อ b คือ ความโน้มเอียงในการบริโภคหน่วยสุดท้ายของครัวเรือน และหากเพิ่มเงื่อนไขให้ $a > 0$ เมื่อ a คือระดับการบริโภคอิสระ จะได้ดุลยภาพ (Y^*, C^*) ซึ่งมีค่าเป็นบวกเสมอ

ระบบสมการข้างต้นอาจไม่มีคำตอบ หาก $b = 1$ และ $I + G + a \neq 0$ ซึ่งเป็นกรณีที่ $\rho(\boldsymbol{A}) < \rho(\hat{\boldsymbol{A}}) = 2$ หรืออาจมีคำตอบมากมายไม่จำกัด หาก $b = 1$ และ $I + G + a = 0$ ซึ่งเป็นกรณีที่ $\rho(\boldsymbol{A}) = \rho(\hat{\boldsymbol{A}}) < 2$ โดยในกรณีที่นอกเหนือจากทั้งสองกรณีนี้ จะสามารถหารายได้ประชาชาติและการบริโภคที่ระดับดุลยภาพได้เท่ากับ

$$Y^* = \frac{a + I + G}{1 - b}$$
$$C^* = \frac{a + b(I + G)}{1 - b}$$

ข้อสังเกตที่สำคัญประการหนึ่งจากผลลัพธ์ข้างต้น คือ รายได้ประชาชาติและการบริโภคที่ระดับดุลยภาพ ต่างถูกกำหนดโดย**ตัวแปรนโยบาย (policy variable)** เช่น รายจ่ายภาครัฐ ซึ่งรัฐสามารถควบคุมได้โดยตรง โดยจากคุณสมบัติของ b ที่ว่า $0 < b < 1$ การเพิ่มขึ้นของรายจ่ายภาครัฐหนึ่งส่วน จะส่งผลให้รายได้ประชาชาติเพิ่มขึ้น $\frac{1}{1-b} > 1$ ส่วน ผลกระทบดังกล่าวมีชื่อเรียกว่า **ผลกระทบจากตัวคูณ (multiplier effect)** ซึ่งจะมีค่ามากหรือน้อยนั้น ขึ้นอยู่กับ b คือ ความโน้มเอียงในการบริโภคหน่วยสุดท้าย โดยหากความโน้มเอียงในการบริโภคหน่วยสุดท้ายมีค่าสูง ก็จะเร่งให้ผลกระทบจากตัวคูณมีค่ามาก ตัวแบบเรื่องรายได้ประชาชาติข้างต้น ยังสามารถพิจารณาได้จากกราฟตามรูปที่ 1.7 ซึ่งมีการบริโภคเป็นตัวแปรในแนวตั้ง และรายได้ประชาชาติเป็นตัวแปรในแนวนอน โดยหากจัดรูปสมการใหม่ ให้สมการบัญชีประชาชาติ อยู่ในรูป $C = -(I + G) + Y$ ซึ่งสร้างเส้นตรงที่มีจุดตัดแกนตั้งเท่ากับ$-(C + I)$ และความชันเท่ากับ 1 และให้สมการฟังก์ชั่นการบริโภคภาคเอกชนอยู่ในรูป $C = a + bY$ ซึ่งสร้างเส้นตรงที่มีจุดตัดแกนตั้งเท่ากับ a และความชันเท่ากับ b จากรูป เส้นตรงทั้งสองเส้นจะมีจุดตัดหนึ่งจุดเสมอ หาก $b \neq 1$ แต่จะขนานกันไปหาก $a \neq -(I + G)$ และ $b = 1$ หรือทาบกันไปหาก $a = -(I + G)$ และ $b = 1$ ดังนี้จึงสรุปได้ว่า เงื่อนไขที่ว่า $b \neq 1$ เป็นทั้งเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ ที่ทำให้ระบบสมการนี้มีจุดตัดเพียงจุดเดียว อนึ่ง โดยที่เส้นตรงที่ถูกสร้างจากสมการบัญชีประชาชาติ มีความชันเท่ากับหนึ่งเสมอ การกำหนดระดับการบริโภคอิสระให้มีค่า $a > 0$ และการกำหนดค่าความโน้มเอียงของการบริโภคหน่วยสุดท้าย ให้สอดคล้องกับเงื่อนไข $0 < b < 1$ จึงเป็นเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ ที่ทำให้รายได้ประชาชาติและการบริโภคที่ดุลยภาพ มีเพียงค่าเดียว และมีค่าเป็นบวกเสมอ

1.5 เอกสารอ่านประกอบเพิ่มเติม

Haeussler and Paul (1990) เป็นตำราคณิตศาสตร์ระดับพื้นฐาน สำหรับผู้ไม่มีพื้นฐานทางคณิตศาสตร์มากนัก ที่ประสงค์จะทบทวนหรือศึกษาแนวคิดพื้นฐาน เช่น ฟังก์ชั่น การอ่านกราฟ

ระบบสมการเชิงเส้นเบื้องต้นที่มีตัวแปรไม่เกิน 3 ตัวแปร และการหาคำตอบของระบบสมการด้วยการแทนค่าตัวแปร พร้อมตัวอย่างการประยุกต์ในทางธุรกิจและเศรษฐศาสตร์ Nicholson (2013) และ Kolman and Hill (2014) เป็นตำราพีชคณิตเชิงเส้นระดับต้นถึงระดับกลาง สำหรับนักศึกษาในภาควิชาคณิตศาสตร์โดยเฉพาะ ที่อธิบายวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นอย่างละเอียด พร้อมตัวอย่างประกอบที่น่าสนใจเพิ่มเติม Simon and Blume (1994) เป็นตำราทางคณิตศาสตร์ สำหรับผู้ศึกษาวิชาเศรษฐศาสตร์ในระดับปริญญาโทและปริญญาเอก ที่มีคำอธิบายและเนื้อหาเกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้น ที่เชื่อมโยงกับแนวคิดต่างๆ ทางเศรษฐศาสตร์เป็นการเฉพาะ หนังสือคณิตเศรษฐศาสตร์ที่อธิบายแนวคิดทางเศรษฐศาสตร์ ควบคู่ไปกับเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ต่างๆ ที่เหมาะสมสำหรับผู้ศึกษาในระดับปริญญาตรี ได้แก่ Chiang and Wainwright (2005) อนึ่ง ผู้สนใจเกร็ดความรู้ทางประวัติศาสตร์ และที่มาของแนวคิดเกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้น ตลอดจนประวัตินักคณิตศาสตร์ที่สำคัญ สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากตำราบางเล่ม เช่น Nicholson (2013) หรือจากหนังสือเกี่ยวกับประวัติศาสตร์ของวิชาคณิตศาสตร์โดยเฉพาะ เช่น Motz and Weaver (1993) และสามารถศึกษาประวัติของเกาส์โดยละเอียดจาก Dunnington et al. (2004) ความเป็นมาของการค้นพบวิธีกำลังสองน้อยที่สุดโดยเกาส์จาก Stigler (1981) ข้อถกเถียงเกี่ยวกับการค้นพบการกระจายแบบปกติจาก Stigler (1977) และเรื่องราวเกี่ยวกับจอร์แดน และการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ด้วยวิธีของเกาส์และจอร์-แดนได้จาก Altheon and McLaughlin (1987)

1.6 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงพิจารณาว่าสมการต่อไปนี้เป็นสมการเชิงเส้นหรือไม่

   (1) $5x_1 + x_2 = x_3$

   (2) $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$

   (3) $x_1^n - x_2^{n-1} = 5$ เมื่อ $n = 1$

   (4) $a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_n^2x_n = 0$ เมื่อ $a_1, \ldots, a_n$ คือค่าคงที่

   (5) $a_1x_1^2 + a_2^2x_2^2 + \ldots + a_n^2x_n^2 = 0$ เมื่อ $a_1, \ldots, a_n$ คือค่าคงที่

2. จงพิจารณาว่า $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ และ $(x, y, z) = (1, 2, 2)$ เป็นคำตอบของ $x+y-z = 1$ หรือไม่

3. จงพิจารณาว่า $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ และ $(x, y, z) = (1, 2, 2)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้หรือไม่

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + y + z &= 6 \end{aligned}$$

4. จงหาทุกค่าของ a_1 และ a_2 ที่ทำให้ $(x_1, x_2) = (1, 2)$ เป็นคำตอบของสมการเชิงเส้น $a_1x_1 + a_2x_2 = 2$

5. สวนสนุกแห่งหนึ่งจำหน่ายบัตรค่าเข้าสองประเภท คือ บัตรสำหรับผู้ใหญ่ราคาใบละ 20 บาท และบัตรสำหรับเด็กราคาใบละ 10 บาท สมมติให้ในวันหนึ่งสวนสนุกแห่งนี้จำหน่ายบัตรทุกใบรวมกันได้เท่ากับ 200 ใบ และมีรายได้รวมจากการจำหน่ายบัตรโดยสารเท่ากับ 3000 บาท จงหาจำนวนบัตรแต่ละประเภทที่ขายได้

6. จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นต่อนี้ด้วยวิธีการแทนค่าตัวแปร วิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์ และวิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์และจอร์แดน

(1)
$$\begin{aligned} x - 3y + 6z &= 0 \\ 2x - 4y + 10z &= 1 \\ 3x - 8y + 16z &= 2 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 1 \\ 3x + 4y + z &= 2 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - 8y + 16z &= 2 \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 3 \\ 3x + 3y + 3z &= 5 \end{aligned}$$

7. จงแปลงเมตริกซ์ต่อไปนี้ให้เป็นเมตริกซ์ที่ได้รับการจัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับ และในรูปการเรียงลำดับแบบลดรูป

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

8. จากระบบสมการเชิงเส้น

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

จงระบุเงื่อนไขที่ทำให้ระบบสมการเชิงเส้นข้างต้นไม่มีคำตอบ มีคำตอบหนึ่งชุด และมีคำตอบมากมายไม่จำกัด

9. จงหาค่า a ในระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้ ที่ทำให้ระบบสมการเชิงเส้นนี้มีคำตอบ

$$\begin{aligned} 12x_1 + 2x_2 &= 14 \\ 6x_1 + 2x_2 &= 4 \\ -6x_1 - 2x_2 &= a \end{aligned}$$

10. สมมติให้คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} mx + 2y &= 10 \\ 3x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

เป็นจำนวนเต็ม กล่าวคือ $x, y \in \mathbb{I}$ จงหาค่าของ m

11. จากตัวแบบ IS-LM ทางเศรษฐศาสตร์มหภาค ซึ่งอยู่ในรูประบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G; C = a + bY; I = cY - dR \\ M_d &= M_s; M_d = e + fY - gR \end{aligned}$$

โดยที่ Y คือ รายได้ประชาชาติ C คือ การบริโภคภาคเอกชน I คือ การลงทุนภาคเอกชน G คือ รายจ่ายภาครัฐ R คือ อัตราดอกเบี้ย และ M_d และ M_s คือ อุปสงค์และอุปทานของเงิน ตามลำดับ โดย $a, \ldots, g > 0$ คือค่าพารามิเตอร์ของระบบสมการ ชุดสมการแรก เป็นชุดสมการที่อธิบายตลาดสินค้าและบริการ ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า รายได้จะเท่ากับรายจ่าย และชุดสมการที่สองเป็นชุดสมการที่อธิบายตลาดการเงิน ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า อุปสงค์จะเท่ากับอุปทานของเงิน จากระบบสมการข้างต้น จงหาดุลยภาพของรายได้ และดอกเบี้ย ในรูปของตัวแปรภายนอก และค่า

พารามิเตอร์ของระบบสมการ

12. จากตัวแบบ AD-AS ทางเศรษฐศาสตร์มหภาค ซึ่งอยู่ในรูประบบสมการเชิงเส้น

$$AD : Y = \alpha\left(\frac{M}{P}\right)$$
$$AS : P = \beta Y$$

โดยที่ Y คือ รายได้ประชาชาติ M คือ ปริมาณเงินที่เป็นตัวเลข P คือ ระดับราคา $\alpha, \beta > 0$ คือ พารามิเตอร์ของระบบสมการ จงหาดุลยภาพรายได้และระดับราคาของระบบเศรษฐกิจนี้ ในรูปของตัวแปรภายนอก คือ M ด้วยวิธีการแทนค่าตัวแปร และวิธีการของเกาส์

บทที่ 2

พีชคณิตของเมตริกซ์

แนวคิดเรื่องเมตริกซ์เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญยิ่ง ที่ช่วยขยายความรู้ทางคณิตศาสตร์จากเดิม ซึ่งอาจเป็นเพียงการพิจารณาคำถามไปทีละเรื่อง หรือเป็นคำถามที่อยู่ในรูปความสัมพันธ์ที่มีเพียงตัวแปรเดียว เช่น หาก $x^2 = 1$ ดังนั้น x จะต้องเป็นเท่าใด หรือ ของชิ้นหนึ่งราคา 5 บาท หากซื้อหาก 5 ชิ้น และให้เงินไป 100 บาท จะได้รับเงินทอนเท่าใด เป็นต้น จะเห็นได้ว่าการตั้งคำถามในลักษณะนี้ ล้วนมีโครงสร้างคำถามในลักษณะเชิงเดี่ยว ที่ไม่ซับซ้อน และอาจแสดงให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ ที่มีตัวแปรเดียวได้ไม่ยาก อย่างไรก็ตาม หากคำถามที่กำลังพิจารณา มีโครงสร้างซับซ้อนขึ้น เช่น สมมติชายผู้หนึ่งต้องการจะลดน้ำหนัก โดยการบริโภคอาหารเพียงสองอย่าง ได้แก่ ข้าวและกล้วย หากให้ข้าวหนึ่งจานมีโปรตีน 3 กรัม และคาร์โบไฮเดรต 30 กรัม และหากให้กล้วยหนึ่งผลมีโปรตีน 12 กรัม และคาร์โบไฮเดรต 20 กรัม จงหาว่าชายผู้นี้จะต้องบริโภคข้าวและกล้วยอย่างละเท่าใด จึงจะทำให้ได้รับโปรตีน 60 กรัม และคาร์โบไฮเดรต 300 กรัมในหนึ่งวัน โดยทั่วไปแล้ว คำถามที่มีโครงสร้างซับซ้อนขึ้นเช่นนี้ มักไม่อาจหาคำตอบด้วยวิธีการหาคำตอบของสมการเพียงสมการเดียวได้ แต่จะต้องอาศัยการสร้างระบบสมการ ที่เชื่อมโยงข้อมูลในแต่ละส่วนของโจทย์เข้าด้วยกัน จากนั้นจึงหาคำตอบของระบบสมการด้วยวิธีการต่างๆ ที่เหมาะสม เช่น ในคำถามข้อนี้ หากให้ x_1 และ x_2 คือปริมาณข้าวและกล้วยที่ชายผู้นี้บริโภคตาม

ลำดับ จะสามารถแสดงข้อมูลข้างต้นในรูประบบสมการเชิงเส้น คือ

$$3x_1 + 12x_2 = 60$$
$$30x_1 + 20x_2 = 300$$

โดยหากใช้การหาคำตอบด้วยวิธีการลดทอนตัวแปร ดังที่ได้พิจารณาไปแล้ว จะได้ว่า

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 12 & 60 \\ 30 & 20 & 300 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

ซึ่งให้คำตอบคือ $x_1 = x_2 = 3$

เนื้อหาในบทต่อไปนี้ จะได้พิจารณาอีกแนวทางหนึ่งในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ด้วยวิธีการทางพีชคณิตของเมตริกซ์ โดยเริ่มจากการศึกษาลักษณะของเมตริกซ์ คุณสมบัติของเมตริกซ์ และการคำนวณต่างๆ ของเมตริกซ์ นอกเหนือจากประโยชน์ของวิธีการทางพีชคณิตของเมตริกซ์ เพื่อการแก้คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นแล้ว ความรู้เรื่องพีชคณิตของเมตริกซ์ ยังเป็นพื้นฐานที่จำเป็นและสำคัญยิ่ง ในการศึกษาเศรษฐศาสตร์และการเงินขั้นสูง ซึ่งมักเกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ที่มีตัวแปรจำนวนมาก ด้วยว่าการอธิบายความสัมพันธ์ดังกล่าวด้วยเมตริกซ์จะกระชับ และมีประสิทธิภาพกว่าการเขียนตัวแปรแยกเป็นตัวๆ อาทิ แนวคิดเรื่อง**ตารางปัจจัยการผลิตและผลผลิต (input-output table)** ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปัจจัยการผลิต m ตัว และผลผลิต n ตัว หรือ **เมตริกซ์ของสลัตส์กี้ (Slutsky matrix)** ในทฤษฎีผู้บริโภค ซึ่งอธิบายผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงของราคาสินค้า i ที่มีต่อปริมาณสินค้า j การใช้เมตริกซ์ อธิบายลักษณะ**สหสัมพันธ์ (correlation)** ระหว่างตัวแปรในวิชาเศรษฐมิติและสถิติ ตลอดจนการใช้เมตริกซ์ของอนุพันธ์อันดับที่สองของฟังก์ชั่น คือ **เฮสเซียนเมตริกซ์ (Hessian matrix)** เพื่อจำแนกจุดต่ำสุดและสูงสุด ของฟังก์ชั่นหลายตัวแปร (multivariate function) เป็นต้น

2.1 เมตริกซ์

นิยามที่ 2.1 เมตริกซ์ (matrix) คือ ตัวเลขที่ถูกจัดเรียงเป็นกลุ่มสี่เหลี่ยม โดยทุกตำแหน่งของแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของเมตริกซ์จะต้องมีตัวเลขปรากฏอยู่ กลุ่มตัวเลขนี้นิยมเขียนอยู่ในวงเล็บ () หรือ [] เมตริกซ์ที่ประกอบด้วยแถว n แถวและคอลัมน์ m คอลัมน์ คือเมตริกซ์ที่มี**ขนาด (size)** เท่ากับ $n \times m$ นอกจากนี้ ยังนิยมใช้ $[a_{ij}]$ เป็นสัญลักษณ์แทนเมตริกซ์ ซึ่งประกอบด้วยค่าในเมตริกซ์ คือ a_{ij} ในแถวที่ i และ คอลัมน์ที่ j ■

ตัวอย่างที่ 2.1 กลุ่มตัวเลขต่อไปนี้ คือ เมตริกซ์

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

โดยซึ่งมีขนาดเท่ากับ 2×3, 3×1 และ 2×2 ตามลำดับ อย่างไรก็ตาม กลุ่มตัวเลขต่อไปนี้ คือ

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \end{pmatrix}$$

ไม่ใช่เมตริกซ์ เนื่องจากตำแหน่งแถวที่ 2 และคอลัมน์ที่ 2 ไม่ได้ระบุตัวเลขใดๆ ไว้ $\square$

สำหรับการกำหนดสัญลักษณ์แทนเมตริกซ์นั้น โดยทั่วไปแล้ว นิยมใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่ตัวหนา เช่น $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ แทนเมตริกซ์ขนาดทั่วไป และนิยมใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวเล็กตัวหนา เช่น $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ แทน**เวคเตอร์ (vector)** หรือเมตริกซ์เฉพาะที่มีขนาด $n \times 1$ หรือ $1 \times m$ อนึ่ง ในกรณีที่ประสงค์จะระบุขนาดของเมตริกซ์ให้ชัดเจน มักนิยมเขียนขนาดของเมตริกซ์ กำกับไว้ด้านล่างขวาของเมตริกซ์ เช่น $\boldsymbol{A}_{m \times n}$ คือ เมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ที่มีขนาด $m \times n$ หรือเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ที่ประกอบด้วย m แถว และ n คอลัมน์ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 2.2 จากข้อมูลรายเดือนของธนาคารแห่งประเทศไทย ผู้มีงานทำในประเทศไทยในช่วงไตรมาสสุดท้ายของปี 2563 จำแนกตามระดับการศึกษาจากระดับต่ำสุด คือ ไม่มีการศึกษา จนถึงสูงสุด คือ อุดมศึกษา สามารถแสดงได้ในรูปของตาราง (หน่วยเป็นพันคน) คือ

ระดับการศึกษา	ตุลาคม	พฤศจิกายน	ธันวาคม
ไม่มีการศึกษา	$1,093.43$	$1,123.61$	$1,116.12$
ต่ำกว่าประถมศึกษา	$6,447.83$	$6,460.85$	$6,726.92$
ประถมศึกษา	$7,955.45$	$8,520.56$	$8,824.63$
มัธยมศึกษาตอนต้น	$6,298.00$	$6,378.93$	$6,603.20$
มัธยมศึกษาตอนปลาย	$6,779.12$	$6,702.28$	$6,787.54$
อุดมศึกษา	$8,963.43$	$8,858.00$	$8,429.21$

ที่มา: ธนาคารแห่งประเทศไทย

ข้อมูลจากตารางข้างต้น สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ได้ คือ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1,093.43 & 1,123.61 & 1,116.12 \\ 6,447.83 & 6,460.85 & 6,726.92 \\ 7,955.45 & 8,520.56 & 8,824.63 \\ 6,298.00 & 6,378.93 & 6,603.20 \\ 6,779.12 & 6,702.28 & 6,787.54 \\ 8,963.43 & 8,858.00 & 8,429.21 \end{pmatrix}$$

อนึ่ง มีข้อสังเกตที่สำคัญว่า การแปลงข้อมูลในตารางให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ข้างต้น จะนำเอาเฉพาะตัวเลขในตารางเข้าใส่ในเมตริกซ์เท่านั้น โดยจะไม่นำเอาข้อมูลในคอลัมน์แรก คือ ระดับการศึกษา และข้อมูลในแถวแรก คือ เดือน เข้ารวมในเมตริกซ์ด้วย ทั้งนี้ ก็ด้วยเหตุผลที่ว่า ตามนิยามของเมตริกซ์ข้างต้นนั้น ค่าในเมตริกซ์จะต้องเป็นตัวเลขเสมอ จะมีตัวอักษรร่วมด้วยไม่ได้ การรวมเอาข้อมูลในแถวและคอลัมน์ในตารางซึ่งเป็นตัวอักษรเข้าปนไปกับค่าที่เป็นตัวเลข จึงให้ผลลัพธ์ที่ผิดไปจากนิยามของเมตริกซ์ เหตุผลสำคัญอีกข้อหนึ่ง ที่การแปลงข้อมูลจากตารางเป็นเมตริกซ์ มักไม่รวมเอาแถวหรือคอลัมน์แรกไว้ในเมตริกซ์ ก็เพื่อให้การตีความค่าในเมตริกซ์ในทุกแถวและคอลัมน์เป็นเอกภาพ ไม่สับสน โดยจากเมตริกซ์ข้างต้น จะเห็นได้ว่า ทุกค่าในแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของ $\boldsymbol{A}$ หมายถึง จำนวนผู้มีงานทำ (พันคน) ที่มีการศึกษาในระดับที่ระบุไว้ในแถวที่ i ซึ่งอยู่ในเดือนที่ระบุไว้ในแถวที่ j ดังนี้ หากให้ค่าในแถวหรือคอลัมน์แรกจะเป็นตัวเลข เช่น หากใช้ตัวเลข 10 แทนเดือนตุลาคม ดังนี้ไปเรื่อยๆ แม้การนำค่าในแถวแรกของตารางเข้าใส่ในเมตริกซ์จะสามารถทำได้ แต่ย่อมส่งผลให้การอธิบายค่าในแถวแรกของเมตริกซ์ผิดจากแถวอื่นๆ ไป □

จากลักษณะสำคัญของเมตริกซ์ข้างต้นที่ว่า ข้อมูลที่สามารถจัดเรียงอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้นั้น จะต้องเป็นข้อมูลสมบูรณ์ ที่ทุกตำแหน่งจะต้องมีข้อมูลที่เป็นตัวเลขอยู่ และไม่อาจขาดหายได้ ข้อผิดพลาดหนึ่งที่ผู้ไม่เข้าใจเรื่องข้อมูลดี อาจกระทำไป เพื่อสร้างเมตริกซ์จากข้อมูลที่ไม่สมบูรณ์ คือ การเติมเลข 0 เข้าไปในส่วนที่ข้อมูลขาดหายไป ซึ่งถือเป็นความผิดพลาดอย่างยิ่ง เนื่องจากการไม่มีข้อมูล กับการมีข้อมูลซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์นั้น แตกต่างกันอย่างมาก อนึ่ง ปัญหาข้อมูลไม่ครบนับเป็นปัญหาสำคัญ ที่จำเป็นต้องแก้ไขด้วยวิธีการเฉพาะ โดยผู้สนใจสามารถศึกษาเรื่องนี้ได้โดยละเอียด จากตำราทางสถิติหรือเศรษฐมิติ ที่เขียนอธิบายสภาพปัญหา และวิธีการแก้ไขปัญหาเรื่องนี้โดยตรง อาทิ Little and Rubin (2019) หรือ Enders (2010) เป็นต้น สำหรับอีกประเด็นหนึ่งที่ว่า ข้อมูลที่สามารถจัดเรียงอยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ จะต้องเป็นข้อมูลที่เป็นตัวเลขเท่านั้น ปัญหานี้สามารถจัดการได้ง่ายกว่า โดยการแปลงข้อมูลใดๆ ที่เป็นข้อมูลในเชิงคุณภาพที่ไม่ใช่ตัวเลขแต่ต้นให้เป็นตัวเลขเสียก่อน จากนั้นจึงจัดเรียงข้อมูลทั้งหมดให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ต่อไป

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.3 สมมติให้บริษัทแห่งหนึ่ง มีข้อมูลพนักงานในแผนกหนึ่งจำนวน 5 คน ดังนี้

พนักงานคนที่	เงินเดือน	อายุงาน	เพศ	ระดับการศึกษา
1	$10,000$	2	ชาย	มัธยมต้น
2	$15,000$	2	ชาย	มัธยมปลาย
3	$8,000$	1	หญิง	มัธยมต้น
4	$7,500$	1	หญิง	มัธยมปลาย
5	$20,000$	4	ชาย	ปริญญาตรี

จากตารางข้างต้น โดยที่เพศและระดับการศึกษาเป็นข้อมูลในเชิงคุณภาพ (qualitative data) ที่ไม่ใช่ตัวเลข การจัดเรียงข้อมูลดังกล่าวให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ จึงไม่สามารถทำได้โดยตรง ด้วยข้อจำกัดตามนิยามของเมตริกซ์ที่ว่าค่าในเมตริกซ์จะต้องเป็นตัวเลขเสมอ จึงจำเป็นต้องแปลงข้อมูลเรื่องเพศ และการศึกษา ให้อยู่ในรูปของตัวเลขเสียก่อน เช่น หากนิยามตัวแปรที่มีชื่อว่าเพศชายให้เป็นตัวแปรนามบัญญัติ (nominal variable) ที่เท่ากับ 1 หากข้อมูลเพศในตารางปรากฏเป็นเพศชาย และเท่ากับ 0 หากเป็นเพศหญิง และหากนิยามตัวแปรระดับการศึกษาเสียใหม่ ให้เป็นตัวแปรอันดับ (ordinal variable) ที่มีค่าเรียงกันตามลำดับ จาก $1 - 3$ โดยให้ค่าที่เท่ากับ 1 หมายถึง การศึกษาระดับมัธยมต้น ค่าที่เท่ากับ 2 หมายถึง การศึกษาระดับมัธยมปลาย และ ค่าที่เท่ากับ 3 หมายถึง การศึกษาระดับปริญญาตรี จะได้ตารางใหม่ที่อยู่ในรูป

พนักงานคนที่	เงินเดือน	อายุงาน	เพศชาย	ระดับการศึกษา
1	$10,000$	2	1	1
2	$15,000$	2	1	2
3	$8,000$	1	0	1
4	$7,500$	1	0	2
5	$20,000$	4	1	3

ทั้งนี้ โดยที่ข้อมูลดังปรากฏในคอลัมน์แรก คือ ลำดับของพนักงานที่ถูกบันทึกข้อมูล ซึ่งมีค่าจาก $1, 2, 3, \ldots$ ไล่เรียงกันไปเรื่อยๆ ไม่ได้ให้ข้อมูลที่เป็นสาระอะไร ด้วยว่าเป็นค่าที่ตรงกับแต่ละแถวของตารางอยู่แล้ว แนวปฏิบัติโดยทั่วไปจึงนิยมตัดข้อมูลในคอลัมน์แรกออก เหลือเพียงข้อมูลใน

คอลัมน์อื่นๆ ซึ่งสามารถแสดงในรูปของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ได้ คือ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10000 & 2 & 1 & 1 \\ 15000 & 2 & 1 & 2 \\ 8000 & 1 & 0 & 1 \\ 7500 & 1 & 0 & 2 \\ 20000 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ตัวแปรเพศชายข้างต้น ที่มีค่าที่เป็นไปได้เพียงสองค่า (binary variable) ซึ่งมักถูกนำมาใช้แปลงข้อมูลในเชิงคุณภาพให้เป็นตัวเลขดังเช่นวิธีการข้างต้น มีชื่อเรียกว่า **ตัวแปรหุ่น (dummy variable)** ซึ่งสามารถพบได้บ่อยในการสร้างแบบจำลองทางเศรษฐมิติ ทั้งนี้ การกำหนดตัวแปรนามบัญญัติเพื่อแทนตัวแปรเชิงคุณภาพ คือ เพศข้างต้นนั้น ไม่จำเพาะเจาะจงว่าจะต้องกำหนดตัวแปรเพศชายดังเช่นข้างต้น โดยหากกำหนดตัวแปรเพศหญิงซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 หากเป็นพนักงานเพศหญิง และ 0 หากไม่ใช่พนักงานเพศหญิง ก็เป็นอีกทางเลือกหนึ่งที่แปลงข้อมูลในเชิงคุณภาพ คือ เพศ ไปสู่ข้อมูลในเชิงปริมาณได้อย่างครบถ้วนเช่นกัน นอกจากนี้ ตัวแปรนามอันดับซึ่งกำหนดตัวเลขที่เรียงกันชุดหนึ่ง เพื่อแทนแต่ละระดับการศึกษานั้น หากจะใช้ตัวเลขชุดอื่น เช่น หากกำหนดระดับการศึกษา เป็นตัวแปรที่มีค่าระหว่าง $0 - 2$ โดยให้ค่าที่เท่ากับ 0 หมายถึง การศึกษาระดับมัธยมต้น และไล่ไปเรื่อยๆ ถึงค่าที่เท่ากับ 3 ซึ่งหมายถึง การศึกษาระดับปริญญาตรี ก็ย่อมได้เช่นกัน หรือหากจะจัดลำดับการเรียงเสียใหม่ เช่น ให้ระดับการศึกษา เป็นตัวแปรที่มีค่าระหว่าง $1-3$ โดยค่า 1 หมายถึงระดับการศึกษาสูงสุดจากทั้งหมด คือการศึกษาระดับปริญญาตรีก็ย่อมได้

การแปลงตัวแปรเชิงคุณภาพให้เป็นตัวเลข ยังอาจทำได้โดยการสร้างตัวแปรหุ่นแต่ละตัวเป็นการเฉพาะ สำหรับแต่ละค่าของตัวแปรเชิงคุณภาพได้เช่นกัน เช่น หากสร้างตัวแปรหุ่นขึ้น คือ ตัวแปรชื่อมัธยมต้น ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 หากพนักงานมีการศึกษาระดับมัธยมต้น และเท่ากับ 0 หากไม่ได้มีการศึกษาระดับมัธยมต้น และตัวแปรหุ่นอีกสองตัวที่มีนิยามในลักษณะที่สอดคล้องกัน คือ ตัวแปรชื่อมัธยมปลาย และตัวแปรชื่อปริญญาตรี ดังนี้ จะได้ข้อมูลในรูปของเมตริกซ์ คือ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10000 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 15000 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 8000 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7500 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 20000 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ทั้งนี้ พึงสังเกตได้ว่า ผลรวมของสามคอลัมน์สุดท้ายของ จะเท่ากับ 1 เสมอ อันเกิดจากการที่ทั้งสามคอลัมน์นี้ **ไม่เป็นอิสระจากกัน (linear dependent)** $\square$

2.2 ประเภทของเมตริกซ์ที่สำคัญ

1. เมตริกซ์จัตุรัส (square matrix) คือ เมตริกซ์ที่มีจำนวนแถวและคอลัมน์เท่ากัน เช่น

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

เมื่อ $a, b, c, d \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

2. เมตริกซ์คอลัมน์ (column matrix) หรือ เวคเตอร์คอลัมน์ คือ เมตริกซ์ที่มีคอลัมน์เพียงคอลัมน์เดียว เช่น

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

เมื่อ $a, c \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

3. เมตริกซ์แถว (row matrix) หรือ เวคเตอร์แถว คือ เมตริกซ์ที่มีแถวเพียงเดียว เช่น

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

4. เมตริกซ์ศูนย์ (zero matrix) คือ เมตริกซ์จัตุรัสที่ค่าทุกตัวในเมตริกซ์เท่ากับศูนย์ นิยมแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbf{0}$ หรือบางทีก็ใช้ $\mathbf{0}_n$ เพื่อแสดงให้เห็นขนาดของเมตริกซ์ว่าเท่ากับ $n \times n$ เช่น

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_2$$

5. เมตริกซ์แกน (diagonal matrix) คือ เมตริกซ์จัตุรัสที่ทุกค่านอกแกนของ

เมตริกซ์เท่ากันศูนย์ กล่าวคือ หาก $[a_{ij}]$ คือ เมตริกซ์แกนแล้ว $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$ เมตริกซ์แกน

สามารถแทนด้วย $\mathsf{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ ที่ระบุเฉพาะค่าบนแกนของเมตริกซ์ เพื่อความกระชับได้ เช่น

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \mathsf{diag}(a, b)$$

เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

6. เมตริกซ์อัตลักษณ์ (identity matrix) คือ เมตริกซ์แกน ที่ทุกค่าบนแกนเท่ากับ 1 นิยมแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbf{1}$ หรือบางทีก็ใช้ $\mathbf{1}_n$ เพื่อแสดงให้เห็นขนาดของเมตริกซ์ว่าเท่ากับ $n \times n$ เช่น

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}_2$$

7. เมตริกซ์สมมาตร (symmetric matrix) คือ เมตริกซ์จัตุรัส $[a_{ij}]$ ที่ $a_{ij} = a_{ji}$ สำหรับทุกค่า i และ j กล่าวคือ หาก $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์สมมาตร จะได้ว่า $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$ เช่น

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

เมื่อ $a, b, c, d \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

8. เมตริกซ์สามเหลี่ยมบน (upper-triangular matrix) คือ เมตริกซ์จัตุรัส ที่ค่าที่อยู่ใต้แกนทั้งหมดเท่ากับ 0 กล่าวคือ หาก $[a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน จะได้ว่า $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i > j$ เช่น

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

9. เมตริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (lower-triangular matrix) คือเมตริกซ์จัตุรัส ที่ค่าที่อยู่เหนือแกนทั้งหมดเท่ากับ 0 กล่าวคือ หาก $[a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมล่าง จะได้ว่า $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i < j$ เช่น

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

10. เมตริกซ์นิจพล (idempotent matrix) คือ เมตริกซ์จัตุรัสที่เมื่อคูณตัวเองแล้วได้ผลลัพธ์เท่ากับตัวเอง กล่าวคือ หาก $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์นิจพล จะได้ว่า $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ กฎข้อนี้สามารถขยายได้เป็น $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{A}$ เมื่อ $k \in \mathbb{N}$ เช่น

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{1}$$

ต่างเป็นเมตริกซ์นิจพล

11. เมตริกซ์นิรพล (nilpotent matrix) คือเมตริกซ์จัตุรัส ที่คูณตัวเองเรื่อยๆ จนถึงจุดหนึ่งแล้วเท่ากับเมตริกซ์ศูนย์ กล่าวคือ กล่าวคือ สมมติให้ $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์นิรพล จะได้ว่า

$$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{0}$$

เมื่อ $k \in \mathbb{N}$ ค่า k น้อยที่สุดที่ทำให้เงื่อนไขข้างต้นเป็นจริง เรียกว่าดัชนี (index) ของเมตริกซ์ เช่น

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

เมื่อ $a \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ต่างเป็นเมตริกซ์นิรพล โดยมีดัชนีเท่ากับ 0 และ 1 ตามลำดับ

2.3 โอเปอร์เรชั่นของเมตริกซ์

โอเปอร์เรชั่นของเมตริกซ์ (matrix operation) คือ กระบวนการเพื่อคำนวณเมตริกซ์ในรูปแบบต่างๆ เช่น การบวก ลบ คูณ และการหาอินเวอร์ส ซึ่งเป็นแนวคิดที่สามารถเทียบเคียงได้กับการคำนวณจำนวนจริง อย่างไรก็ตาม โดยที่เมตริกซ์คือกลุ่มของตัวเลข การคำนวณประเภทต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับเมตริกซ์ จึงย่อมซับซ้อนกว่าการคำนวณจำนวนจริงเป็นธรรมดา เนื้อหาต่อไปในส่วนนี้จะได้กล่าวถึงการคำนวณทางเมตริกซ์ในระดับพื้นฐาน คือ การบวกและการลบ ซึ่งเปรียบได้กับการบวกและการลบจำนวนจริงก่อนเป็นลำดับแรก จากนั้นจึงจะได้พิจารณาการคำนวณประเภทอื่นๆ ซึ่งเป็นแนวคิดเฉพาะสำหรับเมตริกซ์ เช่น การทรานส์โพส และการหาเทรส การคูณประเภทต่างๆ ของเมตริกซ์ การหาดีเทอร์มิแนนท์ และการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ ตลอดจนแนวคิดเกี่ยวกับเอกซ์โปเนนเชียลของเมตริกซ์ และลอกการิธึมของเมตริกซ์ ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญในการศึกษาระบบสมการอนุพันธ์เชิงเส้น และการวิเคราะห์ในเชิงพลวัตต่างๆ ทางเศรษฐศาสตร์

2.3.1 การบวกและการลบ

การบวกและลบเมตริกซ์ ทำได้โดยการนำเอาค่าในตำแหน่งเดียวกันของแต่ละเมตริกซ์มาบวกหรือลบกัน กล่าวคือ $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$ จากนิยามนี้ จะเห็นได้ว่า $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ สามารถบวกกันได้ ก็ต่อเมื่อเมตริกซ์ทั้งสองมีขนาดเท่ากัน ดังนี้ $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ และ $\boldsymbol{B}_{p\times q}$ จะสามารถบวกหรือลบกัน ได้ก็ต่อเมื่อ $m = p$ และ $n = q$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.4 สมมติให้

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{C} = (1)$$

จากเมตริกซ์ข้างต้น จะได้ว่า

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ส่วน $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}$ ไม่สามารถหาค่าได้ เนื่องจาก $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{C}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาดต่างกัน □

2.3.2 การคูณ

แม้การคูณจำนวนจริงโดยทั่วไปจะไม่ซับซ้อน เนื่องจากเป็นเพียงการคูณตัวเลขสองตัวเข้าด้วยกัน แต่การคูณเมตริกซ์ซึ่งเป็นการคูณกันระหว่างกลุ่มตัวเลขนั้น ย่อมมีความซับซ้อนกว่ามากเป็นธรรมดา และสามารถจำแนกประเภทการคูณออกไปได้เป็นหลายกรณี อาทิ การคูณสเกลาร์เข้ากับเมตริกซ์ การคูณเมตริกซ์กับเมตริกซ์ ซึ่งเป็นไปได้ก็ต่อเมื่อจำนวนคอลัมน์ของเมตริกซ์ตัวแรกเท่ากับจำนวนแถวของเมตริกซ์ตัวหลัง การคูณแบบอาดามาร์ ที่นำเอาค่าในตำแหน่งเดียวกันของเมตริกซ์หนึ่งคูณเข้ากับค่าในตำแหน่งเดียวกันของอีกเมตริกซ์หนึ่ง และการคูณแบบโครเนคเกอร์ที่ขยายเมตริกซ์หลังด้วยแต่ละค่าของเมตริกซ์แรก ดังนี้

การคูณสเกลาร์กับเมตริกซ์

การนำจำนวนใดจำนวนหนึ่ง หรือที่เรียกว่า **สเกลาร์ (scalar)** เช่น $0, 1,$ หรือ α โดยที่ $\alpha \in$

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$ คูณกับเมตริกซ์ จะให้ผลลัพธ์เท่ากับการนำค่าสเกลาร์นั้น คูณกับทุกค่าในเมตริกซ์ กล่าวคือ

$$\alpha \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

การคูณเมตริกซ์กับเมตริกซ์[1]

การนำเมตริกซ์สองเมตริกซ์มาคูณกันนั้น มีความซับซ้อนกว่าการคูณสเกลาร์กับเมตริกซ์ และไม่สามารถทำได้ในทุกกรณี โดยเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ สามารถคูณกับเมตริกซ์ $\boldsymbol{B}_{p\times q}$ ซึ่งให้ผลลัพธ์คือ $\boldsymbol{AB}$ ได้ ก็ต่อเมื่อ $n = p$ เท่านั้น กล่าวคือ จำนวนคอลัมน์ของเมตริกซ์ตัวหน้า จะต้องเท่ากับจำนวนแถวของเมตริกซ์ตัวหลัง ซึ่งให้ผลลัพธ์ คือ $\boldsymbol{C}$ ที่มีขนาดคือ

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times q} = \boldsymbol{C}_{m\times q}$$

โดยที่

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

ตัวอย่างที่ 2.5 สมมติให้

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix}$$

จากเมตริกซ์ข้างต้น $\boldsymbol{AB}$ ไม่สามารถหาค่าได้เนื่องจาก จำนวนคอลัมน์ของ $\boldsymbol{A}$ คือ 2 ซึ่งไม่เท่ากับ

[1] แนวคิดเรื่องการคูณเมตริกซ์กับเมตริกซ์ ถูกเสนอเป็นครั้งแรกโดย ฌาค บิเนต์ (Jarcques Binet, 1786-1856) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสร่วมสมัยกับ ซีมียง ปัวซง (Siméon Poisson, 1781-1840) และ ออกุส- ตังโกชี (Augustin Cauchy, 1789-1857) ในยุครุ่งเรืองทางคณิตศาสตร์ของฝรั่งเศส งานของบิเนต์ไม่ได้จำกัดอยู่แต่เพียงคณิตศาสตร์เท่านั้น หากยังครอบคลุมศาสตร์สาขาอื่นอย่างกว้างขวาง เช่น วิศวกรรมศาสตร์ ดาราศาสตร์ และสถาปัตยกรรมศาสตร์ นอกเหนือจากผลงานทางพีชคณิตเชิงเส้นเรื่องการคูณของเมตริกซ์แล้ว ผลงานของบิเนต์อีกเรื่องหนึ่งที่เป็นที่รู้จักกันดี คือ การนิยามฟังก์ชั่นเบตา (Beta function) ซึ่งเป็นแนวคิดสำคัญทางความน่าจะเป็นและสถิติ ที่ศึกษาต่อเนื่องกันมาตั้งแต่สมัยของลีโอนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler, 1707-1783) และ อาดรีอง มาครี เลอฌองเรอ (Adrien-Marie Legendre, 1752-1833)

จำนวนแถวของเมตริกซ์ $\boldsymbol{B}$ คือ 1 อย่างไรก็ตาม $\boldsymbol{BA}$ สามารถหาค่าได้ ซึ่งเท่ากับ

$$\begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea+fc & fb+cd \end{pmatrix}$$

ทั้งนี้ มีข้อควรสังเกตว่า $\boldsymbol{B}_{1\times 2}\boldsymbol{A}_{2\times 2} = \boldsymbol{C}_{1\times 2}$ $\square$

ตัวอย่างที่ 2.6 จากเรื่องระบบสมการเชิงเส้นในบทที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

สามารถแสดงให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ คือ

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

โดยที่

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ซึ่งมีความกระชับขึ้นมากกว่าการเขียนระบบสมการแบบแจกแจงทีละสมการ $\square$

ตัวอย่างที่ 2.7 จากนิยามของเมตริกซ์นิรพลข้างต้น จะได้ว่า

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

เป็นเมตริกซ์นิรพล เนื่องจาก

$$\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{BB} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

และโดยที่เมื่อนำ $\boldsymbol{B}$ คูณกับตัวเองเพียงสองครั้งก็จะได้เมตริกซ์ศูนย์ ดัชนีของ $\boldsymbol{B}$ จึงเท่ากับ 2 $\square$

ตัวอย่างที่ 2.8 จากนิยามของเมตริกซ์นิจพลข้างต้น จะได้ว่า

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

เป็นเมตริกซ์นิจพล เนื่องจาก

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \quad \square$$

คุณสมบัติที่น่าสนใจเกี่ยวกับการบวก การลบ และ การคูณเมตริกซ์ คือ หากให้เมตริกซ์ $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ ที่สามารถบวก ลบ หรือคูณกันได้ และ α คือ ค่าสเกลาร์ใดๆ แล้ว จะได้ว่า[1]

1. $(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) \pm \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \pm (\boldsymbol{B} \pm \boldsymbol{C})$

2. $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

3. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$

4. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \pm \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{AB} \pm \boldsymbol{AC}$

5. $(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} \pm \boldsymbol{BC}$

คุณสมบัติสองข้อแรกข้างต้น คือ การเปลี่ยนกลุ่มของการบวก การลบ และการคูณเมตริกซ์ และสองข้อสุดท้าย คือ การกระจายจากข้างหน้าและข้างหลังนั้น เป็นคุณสมบัติที่สอดคล้องกับคุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มและการกระจาย ในลักษณะเดียวกันในกรณีจำนวนจริง สำหรับคุณสมบัติข้อที่สามที่ว่า คุณสมบัติการสลับที่ของเมตริกซ์สามารถใช้ได้แต่เฉพาะการบวก แต่ไม่สามารถใช้กับการลบได้ ซึ่งเป็นเช่นเดียวกันกับคุณสมบัติการสลับที่ของการบวกจำนวนจริง ซึ่งไม่สามารถใช้กับการลบได้เช่นกัน อย่างไรก็ตาม มีข้อควรสังเกตที่สำคัญว่า คุณสมบัติการสลับที่ของการคูณ

[1] การพิสูจน์คุณสมบัติของเมตริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการลบ แม้จะสามารถทำได้โดยง่าย โดยใช้คุณสมบัติการบวกและการลบจำนวนจริง แต่การพิสูจน์คุณสมบัติอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับการคูณเมตริกซ์นั้น อาจทำได้ยากกว่า จากนิยามของการคูณเมตริกซ์ที่ซับซ้อนกว่าการคูณจำนวนจริง ทั้งนี้ ผู้สนใจสามารถทดลองพิสูจน์คุณสมบัติต่างๆ เกี่ยวกับการคูณของเมตริกซ์ได้ในแบบฝึกหัดท้ายบท

ซึ่งสามารถใช้ได้กับจำนวนจริงนั้น กลับไม่สามารถใช้ได้กับการคูณเมตริกซ์ ดังสามารถเห็นได้จากนิยามของการคูณเมตริกซ์ที่ว่า $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ สามารถคูณกับเมตริกซ์ $\boldsymbol{B}_{p\times q}$ ซึ่งให้ผลลัพธ์ คือ $\boldsymbol{AB}$ ได้ก็ต่อเมื่อ $n = p$ ดังนี้ $\boldsymbol{BA}$ จะมีค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $m = q$ อนึ่ง แม้ทั้ง $\boldsymbol{AB}$ และ $\boldsymbol{BA}$ จะเป็นไปได้หรือแม้แต่มีขนาดเท่ากัน แต่ไม่จำเป็นว่า $\boldsymbol{AB}$ จะต้องเท่ากับ $\boldsymbol{BA}$ ทุกกรณี กล่าวคือ โดยทั่วไปแล้ว เมตริกซ์จะไม่มีคุณสมบัติการสลับที่ของการคูณ

การคูณแบบอาดามาร์

การคูณแบบอาดามาร์ (Hadamard product) [1] ของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ กับเมตริกซ์ $\boldsymbol{B}_{m\times n}$ ทำได้โดยการนำเอาตัวเลขของแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของ $\boldsymbol{A}$ คูณเข้ากับตัวเลขของแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของ $\boldsymbol{A}$ การคูณแบบอาดามาร์ระหว่าง $\boldsymbol{A}$ กับ $\boldsymbol{B}$ ใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ $\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B}$ โดยที่

$$\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \dots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & \dots & a_{mn}b_{mn} \end{pmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 2.9 จากเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ ในตัวอย่างที่ 2.4

$$\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}_{2\times 2}$$

แต่ $\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{C}$ และ $\boldsymbol{B} \odot \boldsymbol{C}$ ไม่สามารถหาค่าได้ เนื่องจากขนาดของ $\boldsymbol{C}$ ไม่เท่ากับขนาดของ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ $\square$

ตัวอย่างที่ 2.10 สมมติให้

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \dots & r_{mn} \end{pmatrix}$$

โดยที่ a_{ij} คือจำนวนเงินลงทุนของผู้ลงทุนรายหนึ่งในหลักทรัพย์ i ในปีที่ j และ r_{ij} คืออัตรา

[1] การคูณแบบอาดามาร์ ตั้งชื่อตามนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ ฌาค อาดามาร์ (Jacques Hadamard) ซึ่งมีชีวิตอยู่ระหว่างปี ค.ศ. 1865-1963 ผู้มีผลงานสำคัญเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวน การวิเคราะห์จำนวนเชิงซ้อน และสมการอนุพันธ์บางส่วน อาดามาร์นับเป็นผู้สืบทอดความรู้ทางคณิตศาสตร์ของสำนักฝรั่งเศส ที่ต่อเนื่องกันมานับเป็นรุ่นที่ห้าจากลาปลาส

ผลตอบแทนของหลักทรัพย์ i ในปีที่ j ดังนั้น เมตริกซ์ผลตอบแทนจากการลงทุนจึงเท่ากับ $\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{R}$ $\square$

คุณสมบัติที่น่าสนใจของการคูณแบบอาดามาร์ คือ สำหรับเมตริกซ์ใดๆ ที่สามารถคูณกันแบบอาดามาร์ได้ จะได้ว่า

1. $\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \odot \boldsymbol{A}$

2. $(\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B}) \odot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \odot (\boldsymbol{B} \odot \boldsymbol{C})$

3. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \odot (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{C}) + (\boldsymbol{B} \odot \boldsymbol{C}) + (\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{D}) + (\boldsymbol{B} \odot \boldsymbol{D})$

4. $\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{I} = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ เมื่อ $\boldsymbol{I}$ คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ที่มีขนาด $n \times n$

5. $\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{J} = \boldsymbol{A}$ เมื่อ $\boldsymbol{J}$ คือเมตริกซ์ที่มีค่าทุกค่าเท่ากับ 1

การคูณแบบโครเนคเกอร์

การคูณแบบโครเนคเกอร์ (Kronecker product) [1] ของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ กับเมตริกซ์ $\boldsymbol{B}_{p\times q}$ คือ การเอาค่าแต่ละตัวใน $\boldsymbol{A}$ คูณกับ $\boldsymbol{B}$ ให้ได้ผลลัพธ์เป็นเมตริกซ์ขนาดใหญ่ ที่ทุกค่าใน $\boldsymbol{B}$ ถูกขยายออกโดยแต่ละค่าของ $\boldsymbol{A}$ การคูณแบบโครเนคเกอร์มีความแตกต่างที่สำคัญจากการคูณเมตริกซ์ในลักษณะอื่นๆ คือ เป็นการคูณแบบโครเนคเกอร์ระหว่างเมตริกซ์ใดๆ นั้น เป็นไปได้เสมอ ไม่ว่ามิติของเมตริกซ์แต่ละตัวจะเป็นเท่าใดก็ตาม การคูณแบบโครเนคเกอร์ระหว่าง $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ กับ $\boldsymbol{B}_{p\times q}$ ใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ โดยที่

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & \ldots & a_{1n}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{B} & \ldots & a_{mn}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}_{mn\times pq}$$

[1] การคูณแบบโครเนคเกอร์ ตั้งชื่อตามนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน คือ ลีโอโปล โครเนคเกอร์ (Leopold Kronecker) ซึ่งมีชีวิตอยู่ระหว่างปี ค.ศ. 1823-1891 โครเนคเกอร์มีผลงานสำคัญทางคณิตศาสตร์ในด้านทฤษฎีจำนวนและพีชคณิต และได้รับการยอมรับจากนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันร่วมสมัยเดียวกันมาก ถึงขนาดที่ว่าเคยได้รับการเสนอชื่อให้ดำรงตำแหน่งหัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์ของมหาวิทยาลัยเกิททิงเงน (Göttingen) ซึ่งเป็นสำนักของเกาส์ และถือเป็นสถานศึกษาคณิตศาสตร์ที่สำคัญที่สุดแห่งหนึ่งของโลกในยุคนั้น โครเนคเกอร์นับเป็นผู้สืบทอดความรู้ทางคณิตศาสตร์จากสำนักเยอรมัน และเป็นศิษย์รุ่นหลานของเกาส์

ตัวอย่างที่ 2.11 สมมติให้ $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ ดังนั้น

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \end{pmatrix}$$

ซึ่งเป็นเมตริกซ์ที่มีขนาดเท่ากับ 2×4 $\square$

คุณสมบัติที่น่าสนใจของการคูณแบบโครเนคเกอร์ คือ สำหรับเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ ใดๆ จะได้ว่า

1. $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) \otimes \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \otimes (\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{C})$

2. หาก $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ และ $\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}$ สามารถหาค่าได้แล้ว $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \otimes (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{C}) + (\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{C}) + (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{D}) + (\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{D})$

3. หาก $\boldsymbol{AC}$ และ $\boldsymbol{BD}$ สามารถหาค่าได้แล้ว $(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})(\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{AC}) \otimes (\boldsymbol{BD})$

4. หาก $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ เป็นเมตริกซ์ที่สามารถหาอินเวอร์สได้ ดังนั้น $(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \otimes \boldsymbol{B}^{-1}$

2.3.3 ทรานส์โพส

การ**ทรานส์โพส (transpose)** เมตริกซ์คือการสลับตัวเลขในคอลัมน์ให้เป็นแถว และสลับตัวเลขในแถวให้เป็นคอลัมน์ เมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ที่ถูกทรานส์โพส สามารถแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $\boldsymbol{A}'$ หรือ $\boldsymbol{A}^{\intercal}$ โดยที่

$$\boldsymbol{A}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}'_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

จากนิยามดังกล่าว $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'$ จึงสามารถหาค่าได้เสมอ[1]

[1]แนวคิดเรื่องการทรานส์โพสเมตริกซ์เป็นแนวคิดที่เรียบง่าย ซึ่งเพิ่งถูกเสนอขึ้นไม่นาน โดยนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ คือ อาร์เธอร์ เคลีย์ (Arthur Cayley) เมื่อปี 1858 เมื่อครั้งที่เคลีย์นิยามเรื่องทรานส์โพสเป็นครั้งแรกนั้น ทรานส์โพสของเมตริกซ์ เช่น $\boldsymbol{A}$ ไม่ได้ใช้สัญลักษณ์ว่า $\boldsymbol{A}'$ หรือ $\boldsymbol{A}^{\intercal}$ ดังที่นิยมใช้ในปัจจุบัน แต่กลับใช้สัญลักษณ์ tr$(\boldsymbol{A})$ แทน ซึ่งควรระวังไม่ให้สับสนกับแนวคิดเรื่องเทรสของ $\boldsymbol{A}$ ซึ่งนิยมใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ tr$(\boldsymbol{A})$ ในปัจจุบัน

ตัวอย่างที่ 2.12 จากเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ ในตัวอย่างที่ 2.5

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

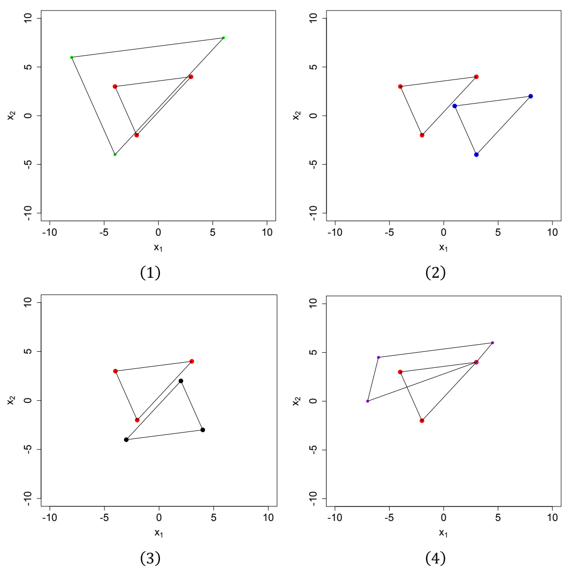
$$\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & ef \\ ef & f^2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' = \begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = (e^2+f^2) \quad \Box$$

คุณสมบัติที่น่าสนใจเกี่ยวกับการทรานส์โพสเมตริกซ์ คือ

1. $(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' \pm \boldsymbol{B}'$
2. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$
3. $(\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A}$
4. $(\alpha\boldsymbol{A})' = \alpha\boldsymbol{A}'$
5. $(\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' \odot \boldsymbol{B}'$
6. $(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' \otimes \boldsymbol{B}'$

ตัวอย่างที่ 2.13 การพิสูจน์คุณสมบัติที่หนึ่ง สาม สี่ และห้าของทรานส์โพสข้างต้น สามารถทำได้โดยง่ายโดยใช้นิยามของทรานส์โพส และเช่นเดียวกันนี้ แม้การพิสูจน์คุณสมบัติข้อที่สองอาจค่อนข้างซับซ้อนอยู่บ้าง แต่ก็สามารถใช้วิธีการพิสูจน์โดยตรงได้ จากนิยามของทรานส์โพส สำหรับการพิสูจน์คุณสมบัติข้อสุดท้าย คือ $(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' \otimes \boldsymbol{B}'$ จากนิยามของการคูณแบบโครเนกเกอร์



รูปที่ 2.1 การตีความโอเปอร์เรเตอร์ของเมตริกซ์ในเชิงเรขาคณิต เมื่อ

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

ในกรณี (1) การขยายขนาดเมตริกซ์ โดยการคูณด้วยค่าสเกลาร์ คือ 2 ซึ่งขยายสามเหลี่ยมที่สร้างได้จาก $\boldsymbol{X}$ ให้เป็นสามเหลี่ยมคล้าย ที่มีขนาดเป็นสองเท่าของสามเหลี่ยมเดิม (2) การขยับ $\boldsymbol{X}$ ด้วย $\boldsymbol{C}$ ซึ่งเลื่อนให้ $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{C}$ ไปอยู่ในตำแหน่งใหม่ (3) การกลับด้าน $\boldsymbol{X}$ โดยการคูณด้วย $\boldsymbol{A}$ (4) การสร้างรูปทรงทางเรขาคณิตใหม่ด้วยการคูณ จาก $\boldsymbol{X}$ ซึ่งเป็นสามเหลี่ยม ให้กลายเป็น $\boldsymbol{XB}$ ซึ่งเป็นสี่เหลี่ยม

หากให้ $\boldsymbol{A}$ คือเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ และ $\boldsymbol{B}$ คือเมตริกซ์ขนาดใดๆ แล้ว จะได้ว่า

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})' = \begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & \dots & a_{1n}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{B} & \dots & a_{mn}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B}' & \dots & a_{m1}\boldsymbol{B}' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}\boldsymbol{B}' & \dots & a_{mn}\boldsymbol{B}' \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}' \otimes \boldsymbol{B}'$$

จากคุณสมบัติข้อที่สี่ของทรานส์โพส คือ $(a_{ij}\boldsymbol{B})' = a_{ij}\boldsymbol{B}'$ □

แนวคิดเรื่องการบวก ลบ และคูณเมตริกซ์ข้างต้น ต่างสามารถตีความในเชิงเรขาคณิตได้ โดยอาศัยความรู้เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ (analytic geometry) เข้าประกอบกับความรู้เรื่องพีช-คณิตของเมตริกซ์ จากรูปที่ 2.1 หากให้

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

โดยที่แต่ละคอลัมน์ $\boldsymbol{x}_i$ ของ $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3)$ คือ จุด $\boldsymbol{x}_i = (x_{1i}, x_{2i})$ บนระนาบสองมิติดังนี้ คอลัมน์ทั้งสามของ $\boldsymbol{X}$ จึงกำหนดจุดสามจุดบนระนาบสองมิติ ซึ่งเมื่อเชื่อมทุกจุดเข้าด้วยกันแล้ว จะได้สามเหลี่ยมดังแสดงในรูปที่ 2.1 (1) การคูณสเกลาร์เข้ากับ $\boldsymbol{X}$ จึงเปรียบได้กับการขยายหรือย่อขนาดของวัตถุทางเรขาคณิต ที่ถูกสร้างขึ้นโดยแต่ละคอลัมน์ของ $\boldsymbol{X}$ ให้ได้วัตถุใหม่ ที่มีขนาดเท่ากับค่าสเกลาร์ที่นำไปคูณเมื่อเปรียบกับวัตถุเดิม อาทิ จากรูปที่ 2.1 (1) เมื่อนำค่าสเกลาร์ คือ 2 คูณเข้ากับ $\boldsymbol{X}$ จะได้วัตถุใหม่ คือ $2\boldsymbol{X}$ ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมคล้าย ที่มีขนาดเป็นสองเท่าของสามเหลี่ยมเดิม เป็นต้น ผลลัพธ์จากการคูณดังกล่าว สามารถเปรียบเทียบได้กับผลลัพธ์จากการบวกเมตริกซ์ในรูปที่ 2.1 (2) โดยหากให้

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{C}$ คือ การขยับสามเหลี่ยมเดิมที่ถูกสร้างขึ้นจาก $\boldsymbol{X}$ ไปทางขวาตามแกนนอน 5 หน่วย และเลื่อนลงด้านล่างตามแกนตั้ง 2 หน่วย การตีความการบวกและการคูณเมตริกซ์ในเชิงเรขาคณิต ในลักษณะที่ว่าการบวกคือการขยับ และการคูณคือการขยายเมตริกซ์เช่นนี้ ชี้ให้เห็นความแตกต่างระหว่างผลลัพธ์จากการบวกและการคูณ ที่อาจไม่สามารถจำแนกออกจากกันได้อย่างชัดเจน ในกรณีการบวกและการคูณจำนวนจริง อาทิ แม้ $2 + 2$ และ 2×2 ต่างเท่ากับ 4 แต่ ผลลัพธ์คือ 4 ที่ได้จาก $2 + 2$ นั้น กลับเป็นการขยับลูกศรที่มีความยาว 2 หน่วยจากจุดกำเนิด

คือ 0 ให้ไกลจากเดิมไปอีก 2 หน่วย ต่างจากผลลัพธ์คือ 4 ที่ได้จาก 2×2 ซึ่งเป็นการขยายลูกศรที่เดิมมีความยาว 2 หน่วยจากจุดกำเนิด ให้ยาวขึ้นเป็น 4 หน่วย เป็นต้น

การตีความการคูณกันระหว่างเมตริกซ์กับเมตริกซ์ในเชิงเรขาคณิต สามารถพิจารณาได้ดังรูปที่ 2.1 (3) และ (4) โดยในกรณีแรก เป็นการพลิกสามเหลี่ยมที่ถูกสร้างจาก $\boldsymbol{X}$ โดยการกำหนดให้

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

จากนั้นเมื่อนำ $\boldsymbol{A}$ คูณข้างหน้า $\boldsymbol{X}$ จะได้

$$\boldsymbol{AX} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{X}$$

ซึ่งให้ผลลัพธ์ในเชิงเรขาคณิต เท่ากับการพลิกรูปสามเหลี่ยมที่ถูกสร้างขึ้นจาก $\boldsymbol{X}$ ให้เป็นไปดังรูปที่ 2.1 (3) การคูณกันระหว่างเมตริกซ์กับเมตริกซ์ ยังสามารถใช้ปรับรูปทรงเรขาคณิตเดิม ให้เปลี่ยนไปเป็นรูปทรงที่ต้องการได้อีกเช่นกัน อาทิ หากให้

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า

$$\boldsymbol{XB} = \begin{pmatrix} -7 & -6 & 4.5 & 3 \\ 0 & 4.5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

ซึ่งแปลงสามเหลี่ยมที่ถูกสร้างขึ้นจาก $\boldsymbol{X}$ ให้เป็นสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าดังรูปที่ 2.1 (4)

2.3.4 เทรส

เทรส (trace)[1] คือ ผลรวมของค่าที่อยู่บนแกนของเมตริกซ์จัตุรัส เทรสของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ ใช้

[1]แนวคิดเรื่องเทรสของเมตริกซ์ ปรากฏเป็นครั้งแรกๆ ในบทความทางวิชาการของริคาร์ด เดเดคิน (Richard Dedekind, 1831-1916) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันผู้เป็นลูกศิษย์ของเกาส์ เทรสไม่ใช่คำที่ใช้กันอยู่แต่เดิม แต่เป็นคำในภาษาอังกฤษที่แปลมาจากคำในภาษาเยอรมันว่า spur (ชปัวร์) ซึ่งมีความหมายว่า การติดตาม ดังเช่นคำว่า trace ในภาษาอังกฤษ อนึ่ง บทความทางวิชาการทางคณิตศาสตร์จำนวนมากในช่วงปลายศตวรรษที่สิบเก้า หรือแม้ตำราทาง

แทนด้วยสัญลักษณ์ tr($\boldsymbol{A}$) โดยที่

$$\text{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

เมื่อ a_{ii} คือค่าของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ จากแถวที่ i และคอลัมน์ที่ i

ตัวอย่างที่ 2.14 จากเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ ในตัวอย่างที่ 2.5 tr($\boldsymbol{A}$) $= a + d$ แต่ tr($\boldsymbol{B}$) ไม่สามารถหาค่าได้ เนื่องจาก $\boldsymbol{B}$ ไม่ใช่เมตริกซ์จัตุรัส □

คุณสมบัติที่น่าสนใจเกี่ยวกับเทรสของเมตริกซ์ คือ หากให้ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ คือเมตริกซ์จัตุรัสใดๆ แล้ว ดังนั้น

1. $\text{tr}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \text{tr}(\boldsymbol{A}) + \text{tr}(\boldsymbol{B})$

2. $\text{tr}(\alpha\boldsymbol{A}) = \alpha\text{tr}(\boldsymbol{A})$

3. $\text{tr}(\boldsymbol{A}') = \text{tr}(\boldsymbol{A})$

4. $\text{tr}(\boldsymbol{AB}) = \text{tr}(\boldsymbol{BA})$

4. $\text{tr}(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) = \text{tr}(\boldsymbol{A}) \cdot \text{tr}(\boldsymbol{B})$

ตัวอย่างที่ 2.15 คุณสมบัติสามข้อแรกของเทรส สามารถเห็นได้โดยง่ายโดยไม่จำเป็นต้องพิสูจน์ การพิสูจน์คุณสมบัติข้อที่สี่นั้น แม้จะค่อนข้างยุ่งยาก แต่สามารถทำได้โดยตรงจากนิยามของการคูณกันของเมตริกซ์ ในการพิสูจน์คุณสมบัติข้อสุดท้าย หากให้ $\boldsymbol{A}$ คือเมตริกซ์ขนาด $m \times m$ และ $\boldsymbol{B}$ คือเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ใดๆ แล้ว จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\text{tr}(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) &= \text{tr}\begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & \ldots & a_{1m}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{B} & \ldots & a_{mm}\boldsymbol{B} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}\text{tr}(\boldsymbol{B}) + \ldots + a_{nn}\text{tr}(\boldsymbol{B}) \\ &= \text{tr}(\boldsymbol{A}) \cdot \text{tr}(\boldsymbol{B}) \quad \square\end{aligned}$$

พีชคณิตเชิงเส้นบางเล่มในปัจจุบัน ต่างใช้คำดั้งเดิมในภาษาเยอรมัน คือ spur และใช้สัญลักษณ์ **spur**($\boldsymbol{A}$) แทนเทรสของเมตริกซ์จัตุรัส $\boldsymbol{A}$ เป็นต้น

2.3.5 การแปลงเมตริกซ์เป็นเวคเตอร์

เครื่องมือที่น่าสนใจอีกอย่างหนึ่งเกี่ยวกับพีชคณิตของเมตริกซ์ คือ การแปลงเมตริกซ์ให้เป็นเวคเตอร์ โดยใช้โอเปอร์เรเตอร์ vec ซึ่งนำเอาแต่ละคอลัมน์ของเมตริกซ์มาต่อกันไปเรื่อยๆ ให้เป็นเวคเตอร์คอลัมน์ โดยสำหรับเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ที่มีขนาด $m \times n$ ใดๆ แล้ว vec($\boldsymbol{A}$) จะสร้างเวคเตอร์ที่มีขนาด $mn \times 1$ โดยที่

$$\text{vec}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

เมื่อ $\boldsymbol{a}_j, j = 1, \ldots, n$ คือ คอลัมน์ที่ j จากเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$

คุณสมบัติที่น่าสนใจของโอเปอร์เรเตอร์ vec คือ สำหรับเวคเตอร์คอลัมน์ $\boldsymbol{a}$ และ $\boldsymbol{b}$ ที่มีขนาด $m \times 1$ และ $n \times 1$ ตามลำดับ และเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ ที่มีขนาด $m \times n$ แล้ว

1. $\text{vec}(\boldsymbol{a}') = \text{vec}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$

2. $\text{vec}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}') = \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a}$

3. $\text{vec}(\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B}) = \text{vec}(\boldsymbol{A}) \odot \text{vec}(\boldsymbol{B})$

4. $\text{vec}(\boldsymbol{A})'\text{vec}(\boldsymbol{B}) = \text{tr}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B})$

นอกเหนือจากคุณสมบัติข้อแรกและข้อที่สามซึ่งเห็นได้อย่างชัดเจนโดยไม่จำเป็นต้องพิสูจน์แล้ว คุณสมบัติอีกสองข้อที่เหลือข้างต้น สามารถพิสูจน์ได้ไม่ยากโดยใช้นิยามของโอเปเรอเตอร์ vec โดยตรง โดยสำหรับคุณสมบัติข้อที่สอง เนื่องจาก

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \ldots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & \ldots & a_m b_n \end{pmatrix} \text{ และ } \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} b_1 \boldsymbol{a} \\ \vdots \\ b_n \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

ซึ่งเห็นได้ชัดว่า $\text{vec}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}') = \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a}$ และสำหรับคุณสมบัติข้อสุดท้าย เมื่อแทนค่าเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ และ

$\boldsymbol{B}$ เข้าในทั้งฝั่งซ้ายและฝั่งขวาของสมการ จะได้ว่า ฝั่งซ้ายของสมการ คือ

$$\begin{aligned}\mathsf{vec}(\boldsymbol{A})'\mathsf{vec}(\boldsymbol{B}) &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} & \dots & b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}' \\ &= \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij}\end{aligned}$$

และสำหรับข้างขวาของสมการ หากให้ $\boldsymbol{A'B} = \boldsymbol{C}$ ดังนั้น

$$c_{11} = \sum_i a_{i1} b_{1i}, \dots, c_{jj} = \sum_i a_{ij} b_{ji}, \dots, c_{nn} = \sum_i c_{in} b_{ni}$$

และจาก $\mathsf{tr}(\boldsymbol{A'B}) = \sum_j c_{jj}$ ดังนั้น

$$\mathsf{tr}(\boldsymbol{A'B}) = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} = \mathsf{vec}(\boldsymbol{A})'\mathsf{vec}(\boldsymbol{B})$$

2.3.6 เอกซ์โปเนนเชียลของเมตริกซ์

แม้แนวคิดเรื่องเอกซ์โปเนนเชียลของจำนวนจริง อาทิ e^x เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ จะสามารถเข้าใจได้ง่ายในรูปของจำนวนยกกำลัง ที่มีฐานเท่ากับ e และกำลังเท่ากับ x การขยายแนวคิดนี้ไปสู่การนิยาม $e^{\boldsymbol{X}}$ เมื่อ $\boldsymbol{X}$ เป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ กลับมีความซับซ้อนกว่า ด้วยว่า $e^{\boldsymbol{X}} \neq [e^{x_{ij}}]$ ในทุกกรณี กล่าวคือ เอกซ์โปเนนเชียลของเมตริกซ์นั้น ไม่จำเป็นที่จะต้องเท่ากับเมตริกซ์ ที่แต่ละค่า x_{ij} ในเมตริกซ์ถูกแปลงให้เป็น $e^{x_{ij}}$ ทั้งนี้ การนิยาม $e^{\boldsymbol{X}}$ ที่ถูกต้อง สามารถเริ่มจากการพิจารณานิยาม e^x ในรูปการขยายของเทย์เลอร์ (Taylor's expansion) ซึ่งเท่ากับ

$$e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \dots$$

จากนั้นจึงขยายนิยามฟังก์ชั่นของจำนวนจริงข้างต้น ไปสู่ฟังก์ชั่นของเมตริกซ์ ดังนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 2.2 เอกซ์โปเนนเชียลของเมตริกซ์ สมมติให้ $\boldsymbol{X}$ เป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ ซึ่งค่า

ในเมตริกซ์อาจเป็นได้ทั้งจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน

$$e^{\boldsymbol{X}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{X}^k}{k!} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{X} + \frac{\boldsymbol{X}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{X}^3}{6} + \frac{\boldsymbol{X}^4}{24} \ldots$$

เมื่อ $\boldsymbol{I}$ คือเมตริกซ์อัตลักษณ์ที่มีขนาด $n \times n$ ■

ตัวอย่างที่ 2.16 ในกรณีเฉพาะเมื่อ $\boldsymbol{X}$ คือเมตริกซ์แกน คือ $\boldsymbol{X} = \mathsf{diag}(x_{11} \ldots x_{nn})$ จะได้ว่า $e^{\boldsymbol{X}} = \mathsf{diag}(e^{x_{11}} \ldots e^{x_{nn}})$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{X}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{X}^k}{k!} \\ &= \mathsf{diag}\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{11}^k}{k!} & \ldots & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{nn}^k}{k!} \end{pmatrix} \\ &= \mathsf{diag}\begin{pmatrix} e^{x_{11}} & \ldots & e^{x_{nn}} \end{pmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2.17 สำหรับเมตริกซ์นิรพลใดๆ ซึ่งมีคุณสมบัติคือ

$$\boldsymbol{X}^n = \mathbf{0}, n \geq k$$

เมื่อ $k \in \mathbb{I}_+$ คือดัชนีของเมตริกซ์ ดังนั้น เอกซ์โปเนนเชียลของเมตริกซ์นิรพล จึงสามารถแสดงให้อยู่ในรูปของผลบวกที่จำกัด (finite sum) ได้ กล่าวคือ

$$e^{\boldsymbol{X}} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\boldsymbol{X}^n}{n!} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{X} + \frac{\boldsymbol{X}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{X}^3}{6} + \frac{\boldsymbol{X}^4}{24} \ldots + \frac{\boldsymbol{X}^{k-1}}{(n-1)!}$$

เนื่องจาก $\boldsymbol{X}^n = \mathbf{0}$ เมื่อ $n \geq k$ □

ตัวอย่างที่ 2.18 จากตัวอย่างที่ 2.11 สำหรับเมตริกซ์จัตุรัสขนาด 2×2 ทั่วไปซึ่งอยู่ในรูป

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

หาก $\boldsymbol{X} \neq 0$ เป็นเมตริกซ์นิรพลซึ่งมีดัชนีเท่ากับ 2 จะได้ว่า

$$\boldsymbol{X}^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

เมื่อ a, b, c, d มีบางตัวที่ไม่เท่ากับ 0 จากข้อกำหนดข้างต้น จะได้ว่า (1) $a^2 = d^2 = -bc$ (2) $b = c = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a + d \neq 0$ คำตอบของระบบสมการที่ไม่เป็นเส้นตรง ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้นที่ทำให้ $\boldsymbol{X} \neq 0$ เป็นเมตริกซ์นิรพลจึงเท่ากับ $a, b \in \mathbb{R}, c = -a^2/b, d = -a$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$$

เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ และ $b \neq 0$ ซึ่งในกรณีนี้จะได้ว่า

$$e^{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a+1 \end{pmatrix}$$

เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ และ $b \neq 0$ $\square$

2.3.7 อนุพันธ์ของเวคเตอร์และเมตริกซ์

แนวคิดเรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นตัวแปรเดียว เช่น $y = \phi(x)$ สามารถขยายให้ครอบคลุมรูปแบบที่หลากหลายยิ่งขึ้น ในกรณีที่ $\boldsymbol{y} = \phi(\boldsymbol{x})$ เมื่อ $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ คือ ฟังก์ชั่นที่เชื่อมโยงค่าจากโดเมน $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ ไปยังเรนจ์ $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m$ ดังนิยามต่อไปนี้

1. $y = \phi(\boldsymbol{x})$ เมื่อ $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ สำหรับ y ซึ่งเป็นค่าสเกลาร์ และ $\boldsymbol{x}$ ซึ่งเป็นเวคเตอร์คอลัมน์ขนาด $n \times 1$:[1]

$$\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{1 \times n}$$

---

[1] สำหรับอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นที่ตัวแปรตามเป็นค่าสเกลาร์ และตัวแปรอธิบายเป็นเวคเตอร์นั้น แม้ตัวแปรอธิบายของอนุพันธ์จะเป็นเวคเตอร์คอลัมน์ แต่นิยามของอนุพันธ์ คือ $\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{x}}$ ในที่นี้จะอยู่ในรูปของเวคเตอร์แถว อนึ่ง มีข้อควรสังเกตสำคัญ คือ การที่เวคเตอร์ของอนุพันธ์จะอยู่ในรูปของเวคเตอร์แถว หรือคอลัมน์นั้น ต่างไม่มีนิยามตายตัว โดยแม้ตำราส่วนใหญ่จะนิยามให้ฟังก์ชั่นซึ่งตัวแปรอธิบายเป็นเวคเตอร์คอลัมน์ มีอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นที่อยู่ในรูปเวคเตอร์แถว แต่ตำราบางเล่ม เช่น Mas-Colell et al. (1995) อาจนิยามให้อนุพันธ์ของฟังก์ชั่นอยู่ในรูปเวคเตอร์คอลัมน์ก็เป็นได้ ทั้งนี้เวคเตอร์ของอนุพันธ์ คือ $\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{x}}$ นั้น อาจเรียกว่า **เวคเตอร์เกรเดียน (gradient vector)** ได้เช่นกัน โดยใช้สัญลักษณ์แทน คือ $\nabla\phi(\boldsymbol{x})$

2. $y = \phi(\boldsymbol{X})$ เมื่อ $\phi : \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$ สำหรับ y ซึ่งเป็นค่าสเกลาร์ และ $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \ldots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$ ซึ่งเป็นเมตริกซ์ขนาด $m \times n$:

$$\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{x}_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{x}_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{m1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_{1n}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{mn}} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

3. $\boldsymbol{y} = \phi(x)$ เมื่อ $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ สำหรับ $\boldsymbol{y}$ ซึ่งเป็นเวคเตอร์คอลัมน์ขนาด $m \times 1$ และ x ซึ่งเป็นสเกลาร์:

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x} \end{pmatrix}_{m \times 1}$$

4. $\boldsymbol{Y} = \phi(x)$ เมื่อ $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m \times n}$ สำหรับ $\boldsymbol{Y}$ ซึ่งเป็นเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ และ x ซึ่งเป็นสเกลาร์:

$$\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_{11}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_{1n}}{\partial x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{m1}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_{mn}}{\partial x} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

5. $\boldsymbol{y} = \phi(\boldsymbol{x})$ เมื่อ $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ สำหรับ $\boldsymbol{y}$ ซึ่งเป็นเวคเตอร์คอลัมน์ขนาด $m \times 1$ และ $\boldsymbol{x}$ ซึ่งเป็นเวคเตอร์คอลัมน์ขนาด $n \times 1$:[1]

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \boldsymbol{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial \boldsymbol{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

---

[1] ตำราบางเล่มนิยมใช้สัญลักษณ์ $D\phi(\boldsymbol{x})$ แทน $\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}$ เวคเตอร์ของอนุพันธ์ เวคเตอร์ของอนุพันธ์ของฟังก์ชั่น $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายในอีกชื่อหนึ่งว่า **ยาโคเบียนเมตริกซ์ (Jacobian matrix)** ของฟังก์ชั่น ซึ่งตั้งตามชื่อของ คาร์ล ยาโคบี (Carl Jacobi, 1804-1851) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ในกรณีของฟังก์ชั่น $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ เมตริกซ์ของอนุพันธ์ลำดับสองของฟังก์ชั่น คือ $D^2\phi(\boldsymbol{x}) = D(\nabla\phi(\boldsymbol{x})')$ เป็นที่รู้จักกันในชื่อ **เฮสเซียนเมตริกซ์ (Hessian matrix)** ของฟังก์ชั่น

ตัวอย่างที่ 2.19 จากทฤษฎีผู้บริโภค หากให้ $e(\boldsymbol{p},u)=\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}^h$ คือ ฟังก์ชั่นค่าใช้จ่ายของผู้บริโภค (expenditure function) เมื่อ $\boldsymbol{p}$ คือ เวคเตอร์ของราคาสินค้า และ $\boldsymbol{x}^h=h(\boldsymbol{p},u)$ คือ อุปสงค์แบบฮิกซ์ (Hicksian demand) ซึ่งเป็นคำตอบของ $\min_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}$ ภายใต้ข้อจำกัด คือ $u(\boldsymbol{x})\geq u$ จากบทตั้งของเชพเพิร์ด (Shepard's lemma) จะได้ว่า $\nabla_{\boldsymbol{p}}e(\boldsymbol{p},u)'=\boldsymbol{x}^h$ คือ ยาโคเบียนเมตริกซ์ของฟังก์ชั่นค่าใช้จ่าย และ $D(\nabla_{\boldsymbol{p}}e(\boldsymbol{p},u)')=\nabla_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}^h$ คือ เฮสเซียนเมตริกซ์ของฟังก์ชั่นค่าใช้จ่าย $\square$

ตัวอย่างที่ 2.20 สมมติให้ (1) $y=x_1^2+x_2^2$ (2) $y=\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}_{n\times n})$ สำหรับ $\boldsymbol{X}=[x_{ij}]$ (3) $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{I}_{n\times n}x$ (4) $\boldsymbol{y}_{n\times 1}=\boldsymbol{A}_{n\times m}\boldsymbol{x}_{m\times 1}$ ซึ่งทั้งหมดเป็นฟังก์ชั่นในรูป $\boldsymbol{y}=\phi(\boldsymbol{x})$ เมื่อ $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ จาก (1) $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ซึ่งมีอนุพันธ์คือ

$$\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}2x_1\\2x_2\end{pmatrix}$$

จาก (2) $\phi:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ กล่าวคือ $y=\sum_{i=1}^n x_{ii}$ ซึ่งมีอนุพันธ์คือ

$$\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{X}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{n1}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial y}{\partial x_{1n}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{nn}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}_{n\times n}$$

จาก (3) $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ ซึ่งมีอนุพันธ์ คือ $\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial x}=\boldsymbol{I}_{n\times n}$ และจาก (4) $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ กล่าวคือ

$$\begin{matrix}y_1 & & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\\ \vdots & = & \vdots\\ y_n & & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\end{matrix}$$

ซึ่งมีอนุพันธ์เท่ากับ

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\quad\square$$

คุณสมบัติที่น่าสนใจของอนุพันธ์ของเวคเตอร์และเมตริกซ์ มีดังนี้

1. $\frac{\partial^2 \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x} \partial \boldsymbol{x}'} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \text{vec}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)'\right]$ สำหรับเวคเตอร์ $\boldsymbol{y}$ และ $\boldsymbol{x}$ ขนาด $m \times 1$ และ $n \times 1$ ตามลำดับ

2. $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}'$ สำหรับเวคเตอร์ $\boldsymbol{x}$ และ $\boldsymbol{a}$ ขนาด $n \times 1$ เมื่อ $\boldsymbol{a}$ ไม่ขึ้นกับ $\boldsymbol{x}$

3. $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}$ สำหรับเวคเตอร์ $\boldsymbol{x}$ ขนาด $n \times 1$ และเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ขนาด $n \times n$ เมื่อ $\boldsymbol{A}$ ไม่ขึ้นกับ $\boldsymbol{x}$

4. $\frac{\partial \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}')$ สำหรับเวคเตอร์ $\boldsymbol{x}$ ขนาด $n \times 1$ และเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ขนาด $n \times n$ เมื่อ $\boldsymbol{A}$ ไม่ขึ้นกับ $\boldsymbol{x}$

5. $\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{x} \partial \boldsymbol{x}'}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}'$ สำหรับเวคเตอร์ $\boldsymbol{x}$ ขนาด $n \times 1$ และเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ขนาด $n \times n$ เมื่อ $\boldsymbol{A}$ ไม่ขึ้นกับ $\boldsymbol{x}$

6. $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{A}} \text{tr}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{I}_n$ และ $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{A}} \text{tr}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) = 2\boldsymbol{A}$ สำหรับเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ขนาด $n \times n$

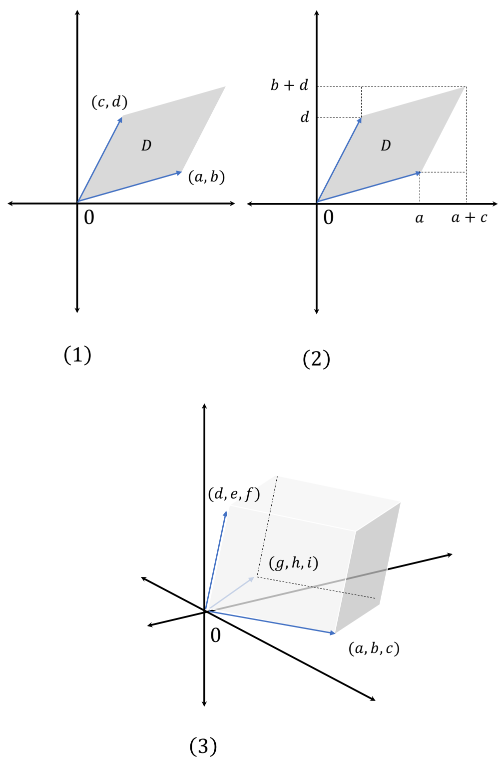
2.4 ตัวกำหนด

ตัวกำหนด (determinant) [1]เป็นแนวคิดสำคัญที่สุดเรื่องหนึ่งในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ความรู้เกี่ยวกับตัวกำหนดเป็นองค์ประกอบสำคัญสำหรับการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ และการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการเท่ากับตัวแปร โดยปกตินั้น แนวคิดเรื่องตัวกำหนดเป็นเรื่องที่มีเนื้อหามาก ซึ่งมักถูกแยกอธิบายเป็นบทเฉพาะในหนังสือพีชคณิตเชิงเส้นหลายเล่ม อย่างไรก็ตาม โดยที่ผู้เขียนต้องการให้โครงสร้างของหนังสือเล่มนี้เป็นไปอย่างกะทัดรัด ในที่นี้จึงได้รวมเอาเรื่องตัวกำหนดไว้ด้วยกันกับพีชคณิตของเมตริกซ์ เพื่อให้บทนี้มีเนื้อหาที่สมบูรณ์เกี่ยวกับการบวก ลบ คูณ และการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์

2.4.1 ตัวกำหนดของเมตริกซ์ขนาด 2×2

---

[1]แนวคิดเรื่องตัวกำหนด มีความเป็นมาที่สามารถย้อนกลับไปได้หลายพันปีในยุคจีนโบราณ ดังปรากฏในคัมภีร์ทั้งเก้าว่าด้วยศิลปะแห่งตัวเลข (Nine chapters on mathematical art) ซึ่งถูกแต่งขึ้นราวหนึ่งพันถึงสองร้อยปีก่อนสากลศักราช (1,000-200 B.C.) อย่างไรก็ตาม แนวคิดเรื่องตัวกำหนดในยุคแรกนั้น ไม่ได้อธิบายตัวกำหนดในเชิงค่าทางคณิตศาสตร์ที่คำนวณได้จากเมตริกซ์ ดังที่เข้าใจกันในปัจจุบันเสียทีเดียว แต่ได้ถูกใช้เพื่ออธิบายคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเสียมากกว่า โดยความหมายของคำว่าตัวกำหนดนั้น หมายถึง เกณฑ์ที่กำหนดว่า ระบบสมการเชิงเส้นหนึ่งจะมีคำตอบหรือไม่



รูปที่ 2.2 การตีความตัวกำหนดในเชิงเรขาคณิต สำหรับ (1) กรณีเมตริกซ์จัตุรัสขนาด $2{\times}2$ โดยค่าของตัวกำหนดของเมตริกซ์ คือ พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่ถูกสร้างจากการเวคเตอร์ในแต่ละแถว คือ $(a\ b)$ และ $(c\ d)$ (2) การหาพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน สามารถหาได้จากพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า หักออกด้วยพื้นที่ส่วนที่เหลือ ซึ่งเท่ากับ $ad - bc$ และ (3) การตีความเชิงเรขาคณิตของตัวกำหนดของเมตริกซ์จัตุรัสที่มีขนาด 3×3

สำหรับเมตริกซ์จัตุรัส

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix}$$

เมื่อ a, b, c, d คือ จำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ $\boldsymbol{a}_1$ และ $\boldsymbol{a}_2$ คือเวคเตอร์ในระนาบสองมิติที่ชี้ไปยังจุด $(a \quad b)$ และ $(c \quad d)$ ตามลำดับดังรูป 2.2 (1) ในกรณีนี้ ตัวกำหนดของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ หรือที่นิยมใช้สัญลักษณ์ $\det(\boldsymbol{A})$ หรือ $|\boldsymbol{A}|$ คือพื้นที่ D ที่ได้จากการสร้างสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelogram) จากเวคเตอร์ทั้งสองเส้น ซึ่งเท่ากับ

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ค่า $\det(\boldsymbol{A})$ หรือ พื้นที่ D ข้างต้น สามารถหาได้จากการสร้างสี่เหลี่ยมมุมฉาก ที่ล้อมเอาสี่เหลี่ยมด้านขนานไว้ดังรูป 2.2 (2) จากรูป โดยที่พื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉากเท่ากับ $(a+c)(b+d) = ab + cd + cb + ad$ ดังนี้ พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ พื้นที่ D จึงเท่ากับพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉากหักเอาพื้นที่ส่วนที่อยู่นอกเหนือจากพื้นที่ D ออก ซึ่งเท่ากับ

$$(ab + cd + cb + ad) - 2bc - cd - ab = ad - bc$$

มีข้อสังเกตที่สำคัญประการหนึ่งคือ จากรูป หากเวคเตอร์ $(a \quad b)$ และ $(c \quad d)$ เรียงตัวกันเป็นเส้นเดียวแล้ว ค่ากำหนดของ $\boldsymbol{A}$ จะเท่ากับ 0 เนื่องจากเวคเตอร์ในลักษณะดังกล่าว ไม่สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานดังรูปที่ 2.2 (1) ได้ หรือในอีกนัยหนึ่งนั้น ในกรณีที่เวคเตอร์ทั้งสองเส้นเรียงตัวเป็นเส้นเดียวกัน พื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดขึ้นจะมีค่าเท่ากับ 0 อนึ่ง เมตริกซ์ ที่มีลักษณะเช่นนี้ จะมีอันดับน้อยกว่าจำนวนแถวและคอลัมน์เสมอ และมีชื่อเรียกเฉพาะว่า**เมตริกซ์เอกฐาน (singular matrix)** และในทางกลับกัน เมตริกซ์ซึ่งมีค่าตัวกำหนดไม่เท่ากับศูนย์ คือเมตริกซ์ที่มีอันดับ เท่ากับจำนวนแถวและคอลัมน์ มีชื่อเรียกว่า**เมตริกซ์ที่ไม่ใช่เอกฐาน (non-singular matrix)**

ตัวอย่างที่ 2.21 จากเมตริกซ์

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

เมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ คือ เมตริกซ์ที่ไม่ใช่เอกฐาน ซึ่งมีตัวกำหนดเท่ากับ 1 ในกรณีนี้ เวคเตอร์ในแต่ละแถวของ $\boldsymbol{A}$ ซึ่งชี้ไปยังจุด $(1,0)$ และ $(0,1)$ จะประกอบกันขึ้นเป็น สี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านแต่ละด้านที่มีความยาวเท่ากับ 1 ส่วนเมตริกซ์ $\boldsymbol{B}$ คือ เมตริกซ์เอกฐาน ซึ่งเวคเตอร์ในแถวที่สอง เป็นเวคเตอร์ที่ชี้ไปในทิศทางเดียวกัน แต่มีความยาวเป็นสองเท่าของเวคเตอร์ในแถวที่หนึ่ง โดย $\boldsymbol{B}$ มีตัวกำหนดเท่ากับ 0 และอันดับเท่ากับ 1 $\square$

การตีความแนวคิดเรื่องตัวกำหนดในเชิงเรขาคณิต ของเมตริกซ์จัตุรัสที่มีขนาด 2×2 สามารถขยายความไปสู่เมตริกซ์จัตุรัสที่มีขนาดใหญ่ขึ้นได้ โดยสำหรับเมตริกซ์จัตุรัสที่มีขนาด 3×3 เช่น

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix}$$

เมื่อ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,$ และ $\boldsymbol{a}_3$ คือ เวคเตอร์ในระนาบสามมิติสามเส้น ดังรูป 2.2 (3) ค่ากำหนดของ $\boldsymbol{A}$ ในกรณีนี้ คือ ปริมาตร (volume) ของลูกบาสก์ด้านขนาน โดยหาก $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์เอกฐานซึ่งมีอันดับน้อยกว่าจำนวนแถวและคอลัมน์แล้ว เวคเตอร์เส้นใดเส้นหนึ่ง ที่ถูกสร้างขึ้นจากแต่ละแถวในเมตริกซ์ จะทาบกันไปเป็นเส้นตรงเดียวกัน จนไม่อาจสร้างลูกบาสก์ด้านขนานดังรูป 2.2 (3) ได้ ส่งผลให้ ค่ากำหนดของเมตริกซ์ หรือปริมาตรของลูกบาสก์เท่ากับ 0

ข้อสำคัญประการหนึ่ง เกี่ยวกับการตีความเรื่องตัวกำหนดในเชิงเรขาคณิต ในรูปพื้นที่ หรือปริมาตรของรูปหรือรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่ได้จากการประกอบเวคเตอร์ในเมตริกซ์ ขึ้นเป็นเมตริกซ์จัตุรัส คือ พื้นที่หรือปริมาตรนั้นย่อมมีค่าเป็นบวก แต่ค่าของตัวกำหนดอาจเป็นบวกหรือลบก็ได้ ดังพิจารณาได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.22 จากเมตริกซ์

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า $\det(\boldsymbol{A}) = 1(4) - 3(2) = -2$ ส่วน $\det(\boldsymbol{B}) = 3(2) - 1(4) = 2$ ทั้งนี้ มีข้อสังเกตสำคัญ คือ เมตริกซ์ $\boldsymbol{B}$ เกิดจากการสลับแถวของ $\boldsymbol{A}$ $\square$

จากตัวอย่างข้างต้น ค่าสัมบูรณ์ของตัวกำหนดของ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ แม้จะเท่ากัน แต่เครื่องหมายของตัวกำหนดทั้งสองกลับสลับค่ากัน ดังนี้ การตีความตัวกำหนดของเมตริกซ์ในเชิงเรขาคณิตที่

เคร่งครัด จึงไม่ใช่การตีความในเชิงพื้นที่หรือปริมาตรเสียทีเดียว หากต้องเป็น ค่าบวกหรือลบของพื้นที่หรือปริมาตรของรูปหรือรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเสียมากกว่า โดยจากตัวอย่างที่ 2.21 นั้น หากตีความเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ ในเชิงเรขาคณิต ที่แต่ละแถวของเมตริกซ์สร้างเวคเตอร์แต่ละเส้นในระนาบสองมิติแล้ว รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจากเวคเตอร์ที่ถูกสร้างจาก $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ จึงย่อมต้องเป็นรูปเดียวกัน ด้วยว่าการจะถือเอาเวคเตอร์เส้นใดเป็นเส้นแรกและเส้นหลัง ย่อมไม่ส่งผลต่อสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ถูกสร้างขึ้น อนึ่ง จากผลลัพธ์ข้างต้นที่ว่า การสลับแถวระหว่างเมตริกซ์จะส่งผลให้เครื่องหมายด้านหน้าของพื้นที่เปลี่ยนไป แต่ไม่ส่งผลต่อค่าสมบูรณ์ของตัวกำหนดนั้น เป็นคุณสมบัติหนึ่งที่สำคัญของตัวกำหนด ซึ่งจะได้พิจารณาและรวบรวมไว้อีกครั้งในส่วนต่อไป

2.4.2 ตัวกำหนดของเมตริกซ์ขนาด $n \times n$

การหาตัวกำหนดที่ได้พิจารณาก่อนหน้านี้ เป็นการหาตัวกำหนดในกรณีเฉพาะ ของเมตริกซ์ที่มีขนาด 2×2 ในเมตริกซ์จัตุรัสใดๆ ที่มีขนาด $n \times n$ การหาตัวกำหนดสามารถพิจารณาได้จากนิยามของไลบ์นิซ ดังนี้[1]

นิยามที่ 2.2 ตัวกำหนด (determinant) จากสูตรของไลบ์นิซ (Leibniz's formula) ตัวกำหนดของเมตริกซ์จัตุรัส $\boldsymbol{A}$ ขนาด $n \times n$ คือ ผลรวมของจำนวน $n!$ จำนวน โดยที่

$$\mathsf{det}(\boldsymbol{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\mathsf{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma_i} \right)$$

เมื่อ $a_{i\sigma_i}$ คือ ค่าของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ในแถวที่ i และคอลัมน์ที่ได้จากการสลับ (permutation) คอลัมน์ของเมตริกซ์จากรูปแบบ σ_i $\mathsf{sgn}(\sigma)$ คือเครื่องหมายของการสลับค่าที่มีค่าเป็น $+$ หากเป็นการสลับคอลัมน์จำนวนเลขคู่ และมีค่าเป็น $-$ หากเป็นการสลับคอลัมน์จำนวนเลขคี่ และ S_n คือ เซตของการสลับค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากเซตที่มีสมาชิก n ตัว ซึ่งมีจำนวนสมาชิกทั้งหมดเท่ากับ $n!$ ■

[1] มีข้อสำคัญที่พึงสังเกตว่า ตัวกำหนดจากสูตรของไลบ์นิซ ซึ่งจะได้พิจารณาในที่นี้ อยู่ในรูปของนิยาม (definition) ซึ่งถือเป็นจริงด้วยว่าเป็นสิ่งที่ถูกกำหนดมาให้เป็นเช่นนี้แต่ต้น ซึ่งไม่ต้องการการพิสูจน์ใดๆ ดังเช่น ทฤษฎีบท (theorem) ข้อเสนอ (proposition) หรือบทตั้ง (lemma)

รูปที่ 2.3 ก็อทฟรีด วิลเฮล์ม ไลบ์นิซ (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716)* เป็นนักคณิตศาสตร์ และนักปรัชญา ชาวเยอรมันที่มีชีวิตอยู่ระหว่างปี ค.ศ. 1646-1716 ผลงานทางคณิตศาสตร์ที่ยิ่งใหญ่ที่สุดของไลบ์นิซ คือ การคิดค้นแคลคูลัส ได้ในเวลาใกล้เคียงกันกับนิวตัน (Issac Newton, 1642-1726) ไลบ์นิซเป็นผู้ที่มีพื้นฐานทางคณิตศาสตร์และความรู้อื่นๆ ดีมาตั้งแต่เด็ก เนื่องจากมีพ่อเป็นอาจารย์วิชาปรัชญาแห่งมหาวิทยาลัยไลบ์ซิก และมีห้องสมุดส่วนตัวที่สะสมหนังสือเกี่ยวกับความรู้ต่างๆ เป็นจำนวนมาก ที่ไลบ์นิซสามารถศึกษาค้นคว้าได้ ทั้งนี้ แม้ไลบ์นิซจะเป็นนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงที่สุดคนหนึ่งในประวัติศาสตร์ แต่ไลบ์นิซกลับจบปริญญาเอกทางกฎหมาย ไม่ได้จบทางด้านคณิตศาสตร์โดยตรงหรือฟิสิกส์ ดังเช่นนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงอื่นๆ อย่างไรก็ตาม ภายหลังจากที่จบการศึกษาในด้านกฎหมายแล้ว ไลบ์นิซได้มุ่งศึกษาและสร้างผลงานในทางคณิตศาสตร์และปรัชญา ซึ่งเป็นมรดกสำคัญของโลกหลายชิ้น ทั้งการคิดค้นแคลคูลัส การพัฒนาแนวคิดสำคัญหลายเรื่อง ในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น และการประดิษฐ์เครื่องมือที่กล่าวได้ว่าเป็นต้นกำเนิดของเครื่องคิดเลข ดังที่รู้จักกันในปัจจุบัน

*รูปประกอบจากภาพพิมพ์ยุคต้นศตวรรษที่ 20 ศิลปะสะสมของผู้เขียน

จากนิยามข้างต้น สำหรับเมตริกซ์ขนาด 2×2 เมื่อ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ในกรณีนี้ จะเห็นได้ว่า เมตริกซ์ขนาด 2×2 สามารถสลับทั้ง 2 คอลัมน์ แบบไม่ซ้ำกันได้ $2! = 2$ แบบ คือ เมตริกซ์เดิมที่ไม่ต้องสลับคอลัมน์ใดๆ และเมตริกซ์ใหม่ที่เกิดจากการสลับคอลัมน์ของเมตริกซ์เดิมหนึ่งครั้ง กล่าวคือ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} ; \boldsymbol{A}\{\overleftrightarrow{1,2}\} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix}$$

โดยที่สัญลักษณ์ $\boldsymbol{A}\{\overleftrightarrow{i,j}\}$ หมายถึง เมตริกซ์ที่ได้จากการสลับคอลัมน์ของ $\boldsymbol{A}$ ระหว่างคอลัมน์ที่ i และ j จะเห็นได้ว่า ในกรณีเมตริกซ์ขนาด 2×2 การวางตำแหน่งคอลัมน์โดยที่ตำแหน่งของคอลัมน์ไม่ซ้ำกัน สามารถทำได้สองแบบด้วยกัน คือ ในรูปแบบแรกซึ่งเป็นตำแหน่งตั้งต้น ถือเป็นการสลับตำแหน่งที่ได้ทำ 0 ครั้งซึ่งเป็นเลขคู่ ค่าเครื่องหมายของการสลับตำแหน่งในที่นี้จึงเป็นค่าบวก คือ $\mathsf{sgn}(\sigma) = +$ โดยมี $\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma_i} = a_{11}a_{22}$ ในรูปแบบที่สองซึ่งเป็นรูปแบบสุดท้ายของการสลับคอลัมน์ในเมตริกซ์ขนาด 2×2 เป็นการสลับตำแหน่งจาก $\{1, 2\}$ เป็น $\{2, 1\}$ ที่ได้สลับไป 1 ครั้ง ซึ่งถือเป็นเลขคี่ ค่าเครื่องหมายของการสลับตำแหน่งในที่นี้จึงเป็นค่าลบ คือ $\mathsf{sgn}(\sigma) = -$ โดยมี $\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma_i} = a_{12}a_{21}$ ดังนั้น ตัวกำหนดของเมตริกซ์ขนาด 2×2 จึงเท่ากับ

$$\mathsf{det}(\boldsymbol{A}_{2\times2}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ซึ่งสอดคล้องกับการตีความในเชิงเรขาคณิตของตัวกำหนดของเมตริกซ์ขนาด 2×2 ที่ได้พิจารณาก่อนหน้านี้

สำหรับเมตริกซ์ขนาด 3×3 เมื่อ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

การสลับคอลัมน์ของ $\boldsymbol{A}$ ซึ่งประกอบด้วย 3 คอลัมน์ในกรณีนี้ สามารถทำแบบไม่ซ้ำกันได้ทั้งสิ้น $3! = 6$ แบบ โดยมี ผลลัพธ์ของ $\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma_i}$ เพื่อใช้คำนวณตัวกำหนดตามสูตรของไลบ์นิซดัง

แสดงในตารางที่ 2.1 ในการจัดเรียงแบบแรกซึ่งเป็นแบบตั้งต้น คือ $\{1, 2, 3\}$ ถือได้ว่าเป็นการสลับตำแหน่งที่ได้ทำ 0 ครั้งซึ่งเป็นเลขคู่ ค่าเครื่องหมายของการสลับตำแหน่งในที่นี้จึงเป็นค่าบวก คือ $\mathsf{sgn}(\sigma) = +$ โดยมี $\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma_i} = a_{11}a_{22}a_{33}$ ในการจัดเรียงแบบที่สองซึ่งเป็นการสลับตำแหน่งคอลัมน์สองตำแหน่งหลังก่อน คือ จาก $\{1, \overleftrightarrow{2, 3}\}$ เป็น $\{1, 3, 2\}$ ถือเป็นการสลับตำแหน่งที่ได้ทำ 1 ครั้งซึ่งเป็นเลขคี่ ค่าเครื่องหมายของการสลับตำแหน่งในที่นี้จึงเป็นค่าลบ คือ $\mathsf{sgn}(\sigma) = -$ โดยมี $\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma_i} = a_{11}a_{23}a_{32}$ จากนั้นเมื่อได้สลับตำแหน่งในรูปแบบเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนถึงการจัดเรียงตำแหน่งในรูปแบบสุดท้าย[1] และเมื่อได้รวมค่าทุกค่าพร้อมเครื่องหมายเข้าด้วยกัน จะให้ผลรวมคือตัวกำหนดของเมตริกซ์จัตุรัสขนาด 3×3

อนึ่ง เป็นที่น่าสังเกตว่านิยามตัวกำหนดของไลบ์นิซนั้น อาจตีความในเชิงเรขาคณิต ว่าเปรียบได้กับการนำลูกเต๋าใน $n \times n$ มิติ มาถากเอาส่วนที่ไม่เกี่ยวข้องออกไป จนได้ลูกบาศก์สี่เหลี่ยมด้านขนานที่ถูกสร้างขึ้นจากแต่ละแถวของเมตริกซ์ อาทิ ในกรณีเมตริกซ์ขนาด 2×2 และ 3×3 ซึ่งแสดงการหาพื้นที่และปริมาตรของลูกบาศก์สี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังรูปที่ 2.2 (3)

ส่วนท้ายของตารางที่ 2.1 เป็นการแสดงวิธีการหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ขนาด 4×4 เพียงบางส่วน เนื่องจากจำนวนที่ต้องบวกรวมเข้าด้วยกันในกรณีนี้มีมากถึง $4! = 24$ ตัว อย่างไรก็ตาม แม้กระบวนการหาตัวกำหนดในกรณีเมตริกซ์ขนาดใหญ่ขึ้นเช่นนี้ ย่อมมีความซับซ้อนขึ้น ตามรูปแบบการสลับคอลัมน์ซึ่งหลากหลายขึ้น แต่ยังคงเป็นรูปแบบที่เทียบเคียงกันได้ กับกระบวนการหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ขนาด 3×3 ดังได้พิจารณาก่อนหน้านี้ เช่น ในการจัดเรียงแบบแรกซึ่งเป็นแบบตั้งต้น คือ $\{1, 2, 3, 4\}$ ถือได้ว่าเป็นการสลับตำแหน่งที่ได้ทำ 0 ครั้งซึ่งเป็นเลขคู่ ค่าเครื่องหมายของการสลับตำแหน่งในที่นี้จึงเป็นค่าบวก คือ $\mathsf{sgn}(\sigma) = +$ โดยมี $\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma_i} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ ต่อไปจึงเป็นการสลับตำแหน่งคอลัมน์สองตำแหน่งหลัง คือ จาก $\{1, 2, \overleftrightarrow{3, 4}\}$ เป็น $\{1, \overleftrightarrow{2, 4}, 3\}$ ที่ถือเป็นการสลับตำแหน่งที่ได้ทำไป 1 ครั้งซึ่งเป็นเลขคี่ ค่าเครื่องหมายของการสลับตำแหน่งในที่นี้จึงเป็นค่าลบ คือ $\mathsf{sgn}(\sigma) = -$ โดยมี $\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma_i} = a_{11}a_{23}a_{34}a_{43}$ ต่อไปจึงเป็นการสลับตำแหน่งระหว่างตำแหน่งที่ 2 และ 3 ซึ่งถือเป็นการสลับตำแหน่งคอลัมน์ที่ได้ทำไปแล้ว 2 ครั้งซึ่งเป็นเลขคู่ ค่าเครื่องหมายของการสลับตำแหน่งในที่นี้จึงเป็นค่าบวก คือ $\mathsf{sgn}(\sigma) = +$ โดยมี $\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma_i} = a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$ กระบวนการเช่นนี้จะดำเนินต่อไปเรื่อยๆ จนถึงการจัดเรียงในรูปแบบสุดท้าย คือ $\left\{\overleftrightarrow{2, 1}, 3, 4\right\}$ ซึ่งหากได้มีการสลับตำแหน่งจะให้ผลลัพธ์คือการจัดเรียงคอลัมน์เช่นเดียวกับรูปแบบตั้งต้น คือ $\{1, 2, 3, 4\}$ เป็นต้น

[1] ทั้งนี้ หากได้สลับตำแหน่งดังที่เป็นอยู่ในรูปแบบสุดท้ายอีกครั้ง คือ $\left\{\overleftrightarrow{2, 1}, 3\right\}$ จะนำไปสู่การจัดเรียงตำแหน่งเมื่อตั้งต้น คือ $\{1, 2, 3\}$ จึงถือได้ว่าตำแหน่งในรูปแบบสุดท้าย คือ $\{2, 1, 3\}$ เป็นรูปแบบการสลับสุดท้าย ที่ไม่อาจสลับให้ได้ตำแหน่งที่ต่างจากรูปแบบอื่นๆ ที่เคยมีมาได้อีก

n	σ	$\mathsf{sgn}(\sigma)$	$\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma_i}$
2	$\left\{\overleftrightarrow{1,2}\right\}$	$+$	$a_{11}a_{22}$
	$\{2,1\}$	$-$	$a_{12}a_{21}$
3	$\left\{1,\overleftrightarrow{2,3}\right\}$	$+$	$a_{11}a_{22}a_{33}$
	$\left\{\overleftrightarrow{1,3},2\right\}$	$-$	$a_{11}a_{23}a_{32}$
	$\left\{3,\overleftrightarrow{1,2}\right\}$	$+$	$a_{13}a_{21}a_{32}$
	$\left\{\overleftrightarrow{3,2},1\right\}$	$-$	$a_{13}a_{22}a_{31}$
	$\left\{2,\overleftrightarrow{3,1}\right\}$	$+$	$a_{12}a_{23}a_{31}$
	$\{2,1,3\}$	$-$	$a_{12}a_{21}a_{33}$
4	$\left\{1,2,\overleftrightarrow{3,4}\right\}$	$+$	$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$
	$\left\{1,\overleftrightarrow{2,4},3\right\}$	$-$	$a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$
	$\left\{\overleftrightarrow{1,4},2,3\right\}$	$+$	$a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$
	$\left\{4,1,\overleftrightarrow{2,3}\right\}$	$-$	$a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$
	$\left\{4,\overleftrightarrow{1,3},2\right\}$	$+$	$a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$
	$\left\{\overleftrightarrow{4,3},1,2\right\}$	$-$	$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$
	$\left\{3,4,\overleftrightarrow{1,2}\right\}$	$+$	$a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$
	$\left\{3,\overleftrightarrow{4,2},1\right\}$	$-$	$a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ตารางที่ 2.1 องค์ประกอบในการคำนวณตัวกำหนดตามนิยามของไลบ์นิซ กรณีเมตริกซ์ขนาด 2×2 ขนาด 3×3 และขนาด 4×4 ตามลำดับ เครื่องหมาย $\overleftrightarrow{i,j}$ แทนการสลับที่ให้เป็น j,i

การหาตัวกำหนดอีกวิธีหนึ่งซึ่งจะได้พิจารณาต่อไป คือ **วิธีการขยายของลาปลาส (Laplace expansion)**[1]โดยคำว่าขยายในที่นี้ หมายถึงการขยายตัวกำหนดให้อยู่ในรูปของผลบวกและผลลบของตัวกำหนดของเมตริกซ์ขนาดย่อยลงไป จากนั้นจึงขยายตัวกำหนดของเมตริกซ์ขนาดย่อยให้เป็นผลบวกและผลลบของตัวกำหนดของเมตริกซ์ขนาดย่อยลงไปอีก เช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนได้ขนาดเมตริกซ์ย่อยที่ง่ายต่อการคำนวณตัวกำหนดด้วยสูตรสำเร็จ เช่น เมตริกซ์ย่อยขนาด 2×2 เป็นต้น

นิยามที่ 2.3 ตัวกำหนด (determinant) จากการขยายของลาปลาส (Laplace expansion) ตัวกำหนดของเมตริกซ์จัตุรัส $\boldsymbol{A}$ ขนาด $n \times n$ คือ ผลรวมของจำนวน n จำนวน โดยที่

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{i+j} a_{ij} \boldsymbol{M}_{ij}\right)$$

สำหรับทุกค่า $i = 1, \ldots, n$ เมื่อ a_{ij} คือ ค่าในแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{M}_{ij}$ หรือ **ไมเนอร์ (minor)** [2]ของแถว i คอลัมน์ j คือ ตัวกำหนดที่ได้จากเมตริกซ์ย่อยที่เกิดจากการตัดแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของ $\boldsymbol{A}$ ตัวกำหนดจากการขยายของลาปลาส สามารถแสดงในอีกรูปแบบหนึ่งได้ คือ

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{C}_{ij}$$

เมื่อ $\boldsymbol{C}_{ij} = (-1)^{i+j} \boldsymbol{M}_{ij}$ คือ **ตัวปัจจัยร่วม (cofactor)** ของ a_{ij} ในเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ■

จากนิยามข้างต้น มีข้อสำคัญที่ควรสังเกตว่า การขยายของลาปลาสที่ว่านี้ ไม่ได้จำกัดว่าจะ

---

[1]ตัวกำหนดที่คำนวณได้จากวิธีการของลาปลาส สามารถพิสูจน์ได้ว่า มีค่าเท่ากับตัวกำหนดตามนิยามของไลบ์นิซ โดยผู้สนใจสามารถค้นคว้าเพิ่มเติมได้ จากหนังสือพีชคณิตเชิงเส้น เช่น Rose (2002) เป็นต้น อนึ่ง แม้ ตำราบางเล่มจะถือเอาวิธีการของลาปลาสในการหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ ว่าเป็นทฤษฎีบทหนึ่ง ที่จำต้องมีการพิสูจน์ให้เห็นว่าสอดคล้องกับนิยามดั้งเดิมของไลบ์นิซก็ตาม แต่ตำราบางเล่มกลับถือเอาวิธีการของลาปลาสเป็นอีกหนึ่งนิยามของตัวกำหนด ซึ่งไม่จำเป็นต้องมีการพิสูจน์ใดๆ ทั้งนี้ โดยที่ เนื้อหาในหนังสือเล่มนี้ ไม่ได้แสดงการพิสูจน์ความเชื่อมโยงระหว่างตัวกำหนดทั้งสองแบบ จึงจะได้ถือเอาการหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ ด้วยวิธีการของลาปลาส ว่าเป็นอีกนิยามหนึ่งของตัวกำหนด เช่นเดียวกับตัวกำหนดตามนิยามของไลบ์นิซ

[2]ไมเนอร์ (minor) หรือเมตริกซ์ย่อย ที่ได้จากการลดรูปเมตริกซ์เดิม โดยการตัดแถวและคอลัมน์ในลักษณะเช่นนี้ เป็นคำที่เกี่ยวข้องเชื่อมโยงอย่างใกล้ชิดกับคำว่า เมตริกซ์ (matrix) ด้วยว่าแม้แนวคิดเรื่องเมตริกซ์จะมีประวัติความเป็นมาที่ยาวนาน ย้อนกลับไปได้หลายพันปี แต่การใช้คำว่าเมตริกซ์เพื่อแทนแนวคิดเกี่ยวกับเมตริกซ์นั้น กลับปรากฏหลักฐานครั้งแรกในงานของ เจมส์ ซิลเวสเตอร์ (James Sylvester, 1814-1897) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ เมื่อราวปี 1850 ด้วยเหตุผลที่ว่าเมตริกซ์นั้น เป็นคำในภาษาลาตินที่แปลว่า ครรภ์ ซึ่งแผลงมาจากคำว่า *mater* ที่แปลว่า แม่ อีกต่อหนึ่ง โดยซิลเวสเตอร์ผู้บัญญัติคำนี้ ได้เปรียบเมตริกซ์ เสมือนครรภ์มารดา ซึ่งให้กำหนดลูก คือ ค่ากำหนดในลักษณะต่างๆ จากการขยายของลาปลาสข้างต้น

ต้องขยายที่แถวใด หรือคอลัมน์ใดเป็นการเฉพาะเท่านั้น และไม่ว่าจะขยายที่แถวใดหรือคอลัมน์ใด ก็จะให้ผลลัพธ์ที่เท่ากับตัวกำหนดของเมตริกซ์เสมอ ดังนี้ ในทางปฏิบัตินั้น การเลือกแถวหรือคอลัมน์ที่จะขยายเพื่อคำนวณหาตัวกำหนด จึงนิยมเลือกแถวหรือคอลัมน์ที่มีค่าข้างในคือ a_{ij} ซึ่งเท่ากับ 0 ให้ได้มากที่สุด เพื่อช่วยลดภาระการคำนวณให้เหลือเฉพาะส่วนที่ a_{ij} ไม่เท่ากับศูนย์เท่านั้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.23 ตัวกำหนดของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ซึ่งมีคอลัมน์หรือแถวใด ประกอบด้วยค่าศูนย์ทั้งหมดจะเท่ากับศูนย์เสมอ เนื่องจากหากคำนวณตัวกำหนดจากการขยายคอลัมน์หรือแถวที่ประกอบด้วยค่าศูนย์ทั้งหมด จะได้ผลลัพธ์ คือ

$$\mathsf{det}(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} (0) C_{ij} = 0 \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 2.24 เมตริกซ์แกน เมตริกซ์สามเหลี่ยมบน และเมตริกซ์สามเหลี่ยมล่างทุกเมตริกซ์มีตัวกำหนดเท่ากับผลคูณของค่าบนแกนของเมตริกซ์นั้น อาทิ หากให้ $\boldsymbol{A} = \mathsf{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ จากการหากำหนดด้วยวิธีการขยายของลาปลาส หากเลือกขยายตามคอลัมน์ของเมตริกซ์ที่มีเพียงค่าเดียวที่ไม่ใช่ศูนย์ คือ a_i ไปเรื่อยๆ จะได้ว่า $|\boldsymbol{A}| = (-1)^{1+1} a_1 \boldsymbol{M}_{11}$ จากนั้นเมื่อหา $\boldsymbol{M}_{11}$ ด้วยการขยายของลาปลาสในลักษณะเดียวกัน จะได้ว่า

$$|\boldsymbol{A}| = a_1 a_2 \cdots a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

ทั้งนี้ ตัวกำหนดของเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน และสามเหลี่ยมล่าง สามารถหาได้ด้วยกระบวนการเดียวกัน ซึ่งให้ตัวกำหนดเท่ากับ ผลคูณของทุกค่าตามแกนของเมตริกซ์ $\square$

ตัวอย่างที่ 2.25 จากเมตริกซ์

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

จากข้างต้น แถวที่ 2 ของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ มีเพียงค่าในคอลัมน์ที่ 3 เท่านั้นที่ไม่ใช่ 0 หากเลือกขยายตัว

รูปที่ 2.4 ปิแยร์-ซีมง ลาปลาส (Pierre-Simon Laplace, 1749-1827)* เป็นนักคณิต-ศาสตร์ นักฟิสิกส์ นักสถิติ และนักดาราศาสตร์ ชาวฝรั่งเศส โดยสถานะของลาปลาสในวงการคณิตศาสตร์ของฝรั่งเศสนั้น ยิ่งใหญ่ถึงกับมีคำกล่าวว่า หากเยอรมนีมีเกาส์ และอังกฤษมีนิวตัน ฝรั่งเศสก็มีลาปลาส เลยทีเดียว ผลงานของลาปลาสครอบคลุมศาสตร์สาขา ที่เป็นวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์แทบทุกด้าน และยังเป็นผลงานที่มีความสำคัญในระดับสูงสุด จนกระทั่งลาปลาสได้รับการยกย่อง ให้เป็นนักวิทยาศาสตร์ที่สำคัญที่สุดคนหนึ่ง เท่าที่โลกนี้เคยมีมา ลาปลาสเป็นนักคณิตศาสตร์ ที่ไม่เพียงแต่มีชื่อเสียงในทางวิชาการเท่านั้น หากยังมีบทบาททางการเมืองค่อนข้างสูง จากการที่ลาปลาสได้มีโอกาสเป็นอาจารย์ของจักรพรรดินโปเลียน เมื่อครั้งที่นโปเลียนยังเป็นนักศึกษาในวิทยาลัยทหาร (École Militaire) ของฝรั่งเศส ภายหลังลาปลาสจึงได้รับพระราชทานบรรดาศักดิ์เป็นมาควิส (marquis) ซึ่งเทียบได้กับสมเด็จเจ้าพระยาของไทย

*รูปประกอบจากภาพพิมพ์หินยุคศตวรรษที่ 19 ศิลปะสะสมของผู้เขียน

กำหนดของ $\boldsymbol{A}$ ด้วยวิธีการของลาปลาสที่แถวนี้ จะได้

$$\begin{aligned}\mathsf{det}(\boldsymbol{A}) &= (-1)^{2+1}(0)M_{21} + (-1)^{2+2}(0)M_{22} + (-1)^{2+3}(1)M_{23} + (-1)^{2+4}(0)M_{24} \\ &= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3\end{aligned}$$

ซึ่งเป็นวิธีการหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ขนาดใหญ่ที่สามารถทำได้อย่างรวดเร็ว และเช่นเดียวกัน หากเลือกหาตัวกำหนดของ $\boldsymbol{A}$ โดยการขยายที่คอลัมน์ที่ 4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathsf{det}(\boldsymbol{A}) &= (-1)^{1+4}(0)M_{14} + (-1)^{2+4}(0)M_{24} + (-1)^{3+4}(1)M_{34} + (-1)^{4+4}(2)M_{44} \\ &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3\end{aligned}$$

ซึ่งเท่ากับค่าที่หาได้จากการขยายที่แถวที่ 2 $\square$

2.4.3 คุณสมบัติของตัวกำหนด

การทำความเข้าใจคำจำกัดความของตัวกำหนดทั้งตามนิยามของไลบ์นิซ และด้วยการขยายของลาปลาส ตลอดจนการตีความตัวกำหนดในเชิงเรขาคณิต มีประโยชน์สำคัญที่ช่วยให้เข้าใจคุณสมบัติของตัวกำหนดได้ดียิ่งขึ้น อีกทั้งยังสามารถขยายต่อยอดไปสู่ความรู้ทางพีชคณิตเชิงเส้นอื่นๆ เช่น การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นด้วยอินเวอร์สของเมตริกซ์ กฎของคราเมร์ ตลอดจนเรขาคณิตวิเคราะห์ของพีชคณิตเชิงเส้น ทั้งนี้ แม้คุณสมบัติของตัวกำหนดดังที่ได้รวบรวมต่อไปนี้ อาจไม่ได้มีการพิสูจน์อย่างเป็นแบบแผน แต่ยังคงจะได้อธิบายเหตุผลสนับสนุนคุณสมบัติแต่ละข้อของตัวกำหนดตามสมควร เพื่อให้ผู้สนใจ สามารถนำไปใช้ในการพิสูจน์อย่างละเอียดต่อไป โดยคุณสมบัติทุกข้อที่จะได้กล่าวถึงต่อไปนี้ เป็นคุณสมบัติของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ที่มีขนาด $n \times n$

1. $\mathsf{det}(\boldsymbol{A}) = \mathsf{det}(\boldsymbol{A}')$ ■

คุณสมบัติข้อนี้ สามารถพิจารณาได้จากการตีความตัวกำหนดในเชิงเรขาคณิต โดยที่ $\mathsf{det}(\boldsymbol{A})$ เท่ากับค่าบวกหรือค่าลบของพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่ถูกสร้างจากแต่ละแถวของ $\boldsymbol{A}$ ค่าทรานส์โพสของ $\boldsymbol{A}$ จึงเป็นเพียงการสลับแถวและคอลัมน์ของเมตริกซ์ ซึ่งเปรียบได้กับการสลับแกน ดังนี้

ตัวกำหนดหรือพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่ถูกสร้างจากแถวหรือคอลัมน์ของเมตริกซ์ จึงย่อมมีค่าเท่าเดิม

2. $\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}\right) = \sum_{h=1}^{n} \left((-1)^{h+j} a_{hj} M_{hj}\right)$ สำหรับทุกค่า $i, j = 1, \ldots, n$ $\blacksquare$

ส่วนแรกของคุณสมบัติข้างต้น คือ การขยายของลาปลาสตามแถวที่ i ดังที่ได้อธิบายไว้ก่อนหน้านี้ ส่วนที่สอง คือ การขยายของลาปลาสตามคอลัมน์ที่ j ซึ่งเป็นคุณสมบัติที่ต่อเนื่องกันมา จากคุณสมบัติข้อแรกของค่ากำหนดที่ว่า ค่ากำหนดของเมตริกซ์จะต้องเท่ากับค่ากำหนดของทรานส์โพส กล่าวคือ วิธีการขยายของลาปลาส สามารถใช้กับแถวใด หรือคอลัมน์ใดของเมตริกซ์ก็ได้

3. $\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ เมื่อ $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์แกน หรือเมตริกซ์สามเหลี่ยมล่าง หรือเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน[1] $\blacksquare$

4. หากเมตริกซ์ $\boldsymbol{B}$ คือ เมตริกซ์ที่ได้จากการสลับแถวใดแถวหนึ่ง หรือคอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่ง ของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ แล้ว

$$\det(\boldsymbol{A}) = -\det(\boldsymbol{B}) \quad \blacksquare$$

คุณสมบัติข้อนี้ สามารถพิจารณาได้จากการตีความในเชิงเรขาคณิตของตัวกำหนด ที่ว่า การสลับแถวของเมตริกซ์เป็นเพียงการสลับตำแหน่งของแต่ละจุดที่ถูกกำหนดโดยเมตริกซ์ ซึ่งเพียงส่งผลต่อเครื่องหมายบวกลบของตัวกำหนด แต่จะไม่ส่งผลต่อพื้นที่หรือปริมาตรของรูปที่ถูกสร้างจากเมตริกซ์ ดังเห็นได้ชัดในกรณีของเมตริกซ์ขนาด 2×2 อนึ่ง คุณสมบัติดังกล่าวนี้ สามารถขยายรวมถึงการสลับคอลัมน์ของเมตริกซ์ได้ จากคุณสมบัติของตัวกำหนดที่ว่า ค่ากำหนดของเมตริกซ์จะต้องเท่ากับค่ากำหนดของทรานส์โพส[2]

5. หากเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ มีแถวใดแถวหนึ่ง หรือคอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่งที่เท่ากัน หรือมีแถวใดแถวหนึ่ง ที่เท่ากับค่าคงที่คูณอีกแถวหนึ่ง หรือคอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่ง ที่เท่ากับค่าคงที่คูณอีกคอลัมน์หนึ่งแล้ว จะได้ว่า

$$\det(\boldsymbol{A}) = 0 \quad \blacksquare$$

คุณสมบัติข้อนี้สามารถพิจารณาได้จากการตีความตัวกำหนดในเชิงเรขาคณิต โดยเวคเตอร์แต่ละ

---

[1] ดูตัวอย่างที่ 2.24

[2] ดูตัวอย่างที่ 2.22

แถวหรือคอลัมน์ของเมตริกซ์ที่มีขนาด $n \times n$ จะสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานในมิติ $n \times n$ ที่ให้ค่ากำหนดของเมตริกซ์ เท่ากับค่าบวกหรือลบของปริมาตรของสี่เหลี่ยมด้านขนานในมิติ $n \times n$ ได้ ก็ต่อเมื่อ เวคเตอร์ในแต่ละแถว มี**ความเป็นอิสระแบบเชิงเส้น (linear indendent)** ต่อกัน กล่าวคือ อันดับของเมตริกซ์จะต้องเท่ากับ n เช่น ในกรณีเมตริกซ์ขนาด 2×2 หากแต่ละแถวในเมตริกซ์เท่ากัน หรือแถวหนึ่งเท่ากับค่าคงที่คูณอีกแถวหนึ่งแล้ว อันดับของเมตริกซ์จะเท่ากับ 1 ซึ่งส่งผลให้เส้นตรงแต่ละเส้น ที่เกิดจากเวคเตอร์ในแต่ละแถวของเมตริกซ์ อยู่บนระนาบเดียวกัน และทำให้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ถูกสร้างขึ้นเท่ากับ 0

6. สมมติให้ $\boldsymbol{A}$ คือ เมตริกซ์ที่มีทุกค่าในแถวใดแถวหนึ่ง หรือคอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่งเท่ากับศูนย์

$$\mathsf{det}(\boldsymbol{A}) = 0 \quad \blacksquare$$

ซึ่งเป็นคุณสมบัติที่สามารถเห็นได้ชัด จากการหาค่ากำหนดด้วยวิธีการขยายของลาปลาส

7. สมมติให้ k คือ ค่าคงที่ และให้

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_i & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}'; \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & k\boldsymbol{a}_i & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}'$$

จะได้ว่า

$$\mathsf{det}(\boldsymbol{B}) = k\ \mathsf{det}(\boldsymbol{A}) \text{ และ } \mathsf{det}(k\boldsymbol{A}) = k^n \mathsf{det}(\boldsymbol{A}) \quad \blacksquare$$

คุณสมบัติข้อนี้ สามารถพิจารณาได้จากการหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ ด้วยการขยายที่แถว i กล่าวคือ

$$\mathsf{det}(\boldsymbol{B}) = \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{i+j} k a_{ij} M_{ij}\right) = k \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}\right) = k\ \mathsf{det}(\boldsymbol{A})$$

การพิสูจน์คุณสมบัติส่วนที่สอง สามารถพิจารณาได้จากคุณสมบัติส่วนแรกที่ว่า หากนำค่าคงที่ k คูณเข้ากับแถวใดแถวหนึ่งในเมตริกซ์ จะได้ตัวกำหนดของเมตริกซ์ใหม่ ซึ่งเท่ากับ k คูณกับตัวกำหนดของเมตริกซ์เดิม ดังนี้ การนำค่าคงที่ k คูณกับทุกค่าในเมตริกซ์ให้ได้เมตริกซ์ใหม่ คือ $k\boldsymbol{A}$ จึงเปรียบได้กับการนำค่าคงที่คูณกับทุกแถวในเมตริกซ์ การหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ $k\boldsymbol{A}$ จึงเป็นการทำกระบวนการเดิมซ้ำกันทุกแถวซึ่งมีอยู่ทั้งหมด n แถว ซึ่งให้ผลลัพธ์ คือ $\mathsf{det}(k\boldsymbol{A}) = k^n \mathsf{det}(\boldsymbol{A})$

8. หากให้เมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ และเมตริกซ์ $\boldsymbol{B}$ ต่างกันเพียงแถว หรือคอลัมน์ที่ i กล่าวคือ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_i & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}'; \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{b}_i & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}'$$

จะได้ว่า

$$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}) + \det(\boldsymbol{B}) \quad \blacksquare$$

การพิสูจน์คุณสมบัติข้อนี้ สามารถพิจารณาได้จาก

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2\boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i & \ldots & 2\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}'$$

ดังนี้ ค่ากำหนดของ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ ซึ่งได้จากการขยายของลาปลาสที่แถว i จึงเท่ากับ

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &= \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{i+j}(a_{ij}+b_{ij})M_{ij}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{i+k}a_{ij}M_{ij}\right) + \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{i+k}b_{ij}M_{ij}\right) \\
&= \det(\boldsymbol{A}) + \det(\boldsymbol{B})
\end{aligned}$$

ทั้งนี้ มีข้อสังเกตที่สำคัญ คือ คุณสมบัติที่ว่า $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}) + \det(\boldsymbol{B})$ จะใช้ได้กับกรณีที่ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ มีเพียงแถว หรือคอลัมน์เดียวที่ต่างกันเท่านั้น ไม่อาจใช้ได้กับทุกกรณี

9. หากให้เมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ถูกแปลงไปในลักษณะที่ให้ทุกค่าในแถว j ของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ถูกรวมด้วยค่าคงที่ k คูณด้วยทุกค่าในแถว i จะได้ว่าตัวกำหนดของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ เท่ากับตัวกำหนดของเมตริกซ์ที่ได้ถูกแปลงค่าไป กล่าวคือ หากให้

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_i & \ldots & \boldsymbol{a}_j & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}' \\
\boldsymbol{B} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_i & \ldots & k\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}'
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{B}) \quad \blacksquare$$

คุณสมบัติข้างต้น เป็นคุณสมบัติที่ต่อเนื่องมาจากข้ออื่นๆ ก่อนหน้านี้ กล่าวคือ โดยที่ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ ต่างกันเพียงแถวเดียว ดังนี้

$$\begin{aligned}\text{det}(\boldsymbol{B}) = k\text{det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_i & \dots & \boldsymbol{a}_i & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}' \\ + \text{det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_i & \dots & \boldsymbol{a}_j & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}'\end{aligned}$$

และเนื่องจาก เมตริกซ์แรกในด้านขวามือมีสองแถวที่เท่ากัน ซึ่งมีตัวกำหนดเท่ากับ 0 และจากข้อเท็จจริงที่ว่าเมตริกซ์ที่สองในด้านขวามือ คือ $\boldsymbol{A}$ ดังนั้น

$$\text{det}(\boldsymbol{B}) = \text{det}(\boldsymbol{A})$$

10. สำหรับเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ ที่มีขนาด $n \times n$

$$\text{det}(\boldsymbol{AB}) = \text{det}(\boldsymbol{A}) \cdot \text{det}(\boldsymbol{B}) \quad \blacksquare$$

คุณสมบัติการคูณกันของตัวกำหนดข้างต้น เป็นคุณสมบัติสำคัญ ซึ่งสามารถใช้หาตัวกำหนดของเมตริกซ์ที่ซับซ้อน โดยการแยกองค์ประกอบของเมตริกซ์ตั้งต้น ในรูปการคูณกันของเมตริกซ์ที่สามารถหาตัวกำหนดได้ง่าย ทั้งนี้ แม้การพิสูจน์คุณสมบัตินี้จะค่อนข้างยาว แต่โดยมากแล้วก็เป็นเพียงการนำเอาคุณสมบัติเกี่ยวกับตัวกำหนด และระบบสมการเชิงเส้น ที่ได้กล่าวถึงก่อนหน้านี้ มาใช้ในขั้นตอนต่างๆ ของการพิสูจน์ โดยในขั้นตอนแรก จะเริ่มจากการพิจารณาเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$ คือ

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & 1 \end{pmatrix}$$

ซึ่งมีค่ากำหนด คือ $\text{det}(\boldsymbol{I}) = 1$ จากคุณสมบัติของตัวกำหนดข้อที่ 3 ข้างต้น การจัดการพื้นฐานกับ $\boldsymbol{I}$ ข้างต้น สามารถสร้างนิยาม **เมตริกซ์พื้นฐาน (Elementary matrix)** ได้สามรูปแบบ คือ

(1) $\boldsymbol{E}_{ij}$ คือ เมตริกซ์ที่ได้จากการสลับแถวที่ i และ j ของเมตริกซ์ $\boldsymbol{I}$ ซึ่งมี $\text{det}(\boldsymbol{E}_{ij}) = -\text{det}(\boldsymbol{I}) = -1$ จากคุณสมบัติของตัวกำหนดข้อที่ 4

(2) $\boldsymbol{E}_i(k)$ คือ เมตริกซ์ที่ได้จากการนำเอาค่าคงที่ k คูณเข้ากับทุกค่าในแถวที่ i ของเมตริกซ์ $\boldsymbol{I}$

ซึ่งมี det$(\boldsymbol{E}_i(k)) = k$ det$(\boldsymbol{I}) = k$ จากคุณสมบัติของตัวกำหนดข้อที่ 7

(3) $\boldsymbol{E}_{ij}(k)$ คือ เมตริกซ์ที่ได้จากการนำเอาค่าคงที่ k คูณเข้ากับทุกค่าในแถวที่ i และนำไปรวมกับแถวที่ j ของเมตริกซ์ $\boldsymbol{I}$ ซึ่งมี det$(\boldsymbol{E}_i(k)) =$ det$(\boldsymbol{I}) = 1$ จากคุณสมบัติของตัวกำหนดข้อที่ 9

เมตริกซ์พื้นฐานทั้งสามประเภทข้างต้น เป็นเครื่องมือสำคัญที่เชื่อมโยงแนวคิดเรื่องพีชคณิตของเมตริกซ์ เข้ากับวิธีการจัดการแถวพื้นฐานที่ได้พิจารณาในบทที่หนึ่ง โดยการนำเมตริกซ์พื้นฐานแต่ละประเภท คูณเข้าข้างหน้าเมตริกซ์ใดๆ จะให้ผลลัพธ์เป็นเมตริกซ์ที่ถูกสลับแถว หรือเมตริกซ์แถวใดแถวหนึ่งของเมตริกซ์ ถูกคูณด้วยค่าคงที่ หรือเมตริกซ์ที่แถวใดแถวหนึ่ง ถูกคูณด้วยค่าคงที่และนำไปรวมกับอีกแถวหนึ่งของเมตริกซ์ แล้วแต่กรณี เช่น หากให้

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า

$$\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_1(k)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_{12}(k)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} + a_{21} & ka_{12} + a_{22} \end{pmatrix}$$

จากข้างต้น กระบวนการแปลงเมตริกซ์สัมประสิทธิ์จากระบบสมการเชิงเส้น ให้อยู่ในรูปการจัดแถวแบบลดรูป ด้วยวิธีการจัดการแถวพื้นฐานต่างๆ จึงเปรียบได้กับผลคูณของเมตริกซ์พื้นฐานประเภทต่างๆ กับเมตริกซ์เอกลักษณ์ กล่าวคือ สำหรับเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ใดๆ ที่มีขนาด $m \times n$ จะได้ว่า

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_{(1)} \ldots \boldsymbol{E}_{(p)}\boldsymbol{U}$$

เมื่อ $\boldsymbol{E}_{(1)}, \ldots, \boldsymbol{E}_{(p)}$ คือเมตริกซ์พื้นฐานประเภทใดประเภทหนึ่ง จากทั้งสามประเภทตามนิยามข้างต้น และ $\boldsymbol{U}$ คือเมตริกซ์ ที่ถูกจัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแบบลดรูป นอกจากนี้ หาก $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์จัตุรัส ซึ่งตัวกำหนดไม่เท่ากับ 0 จะได้ว่า $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}$ เสมอ กล่าวคือ เมตริกซ์จัตุรัสใดๆ

ซึ่งสามารถหาอินเวอร์สได้ ย่อมสามารถแสดงอยู่ในรูปผลคูณของเมตริกซ์พื้นฐานต่างๆ ได้เสมอ[1]

จากคุณสมบัติของตัวกำหนดของเมตริกซ์พื้นฐาน จะได้ว่า หาก $\boldsymbol{E}$ เป็นเมตริกซ์พื้นฐาน และ $\boldsymbol{B}$ เป็นเมตริกซ์จัตุรัส ที่ต่างมีขนาด $n \times n$ แล้ว

$$\det(\boldsymbol{EB}) = \det(\boldsymbol{E}) \cdot \det(\boldsymbol{B})$$

และจากข้อเท็จจริงข้างต้นที่ว่า หาก $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์จัตุรัสซึ่งมีตัวกำหนดไม่เท่ากับศูนย์ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_{(1)} \ldots \boldsymbol{E}_{(p)}$$

ดังนี้

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{AB}) &= \det(\boldsymbol{E}_{(1)} \ldots \boldsymbol{E}_{(p)}\boldsymbol{B}) \\
&= \det(\boldsymbol{E}_{(1)})\det(\boldsymbol{E}_{(2)} \ldots \boldsymbol{E}_{(p)}\boldsymbol{B}) \\
&= \det(\boldsymbol{E}_{(1)} \ldots \boldsymbol{E}_{(p)})\det(\boldsymbol{B}) \\
&= \det(\boldsymbol{A}) \cdot \det(\boldsymbol{B})
\end{aligned}$$

คุณสมบัติของตัวกำหนดข้างต้น เป็นรากฐานสำคัญของการศึกษาพีชคณิตของเมตริกซ์ระดับสูง เช่น ในการหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ที่มีขนาดใหญ่ซึ่งอาจยุ่งยากและใช้เวลานานนั้น นักคณิตศาสตร์ได้พัฒนาวิธีการ เช่น **การแยกองค์ประกอบของเมตริกซ์ (matrix decomposition)**[2] เพื่อแปลงเมตริกซ์ให้อยู่ในรูปของผลคูณของเมตริกซ์ ที่สามารถหาตัวกำหนดได้ง่าย จากนั้นจึงใช้คุณสมบัติข้างต้นเพื่อหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ตั้งต้นต่อไป เช่น จากคุณสมบัติของตัวกำหนดที่ว่า

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \det(\boldsymbol{B})$$

---

[1] การแสดง $\boldsymbol{A}$ ในรูปผลคูณของเมตริกซ์พื้นฐานประเภทต่างๆ กับเมตริกซ์เอกลักษณ์ เป็นอีกกระบวนการหนึ่ง ซึ่งสามารถใช้หาอินเวอร์สของ $\boldsymbol{A}$ ได้ ดังจะได้พิจารณาโดยละเอียด ในส่วนต่อไปของบทนี้

[2] แนวคิดเรื่องการแยกองค์ประกอบของเมตริกซ์ในที่นี้ ซึ่งตรงกับคำเรียกในภาษาอังกฤษว่า matrix decomposition หรือ matrix factorization หมายรวมเฉพาะแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงเมตริกซ์ ให้อยู่ในรูปที่สามารถหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ได้ง่ายขึ้น อย่างไรก็ตาม คำว่า matrix decomposition ยังอาจครอบคลุมแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงเมตริกซ์ให้อยู่ในรูปต่างๆ อาทิ การแยกให้ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Sigma V}'$ เมื่อ $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ เป็นเมตริกซ์จัตุรัสใดๆ $\boldsymbol{U}_{n\times n}$ และ $\boldsymbol{V}_{n\times n}$ มีคุณสมบัติตั้งฉากกัน และ $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1 \ldots \sigma_n)$ ซึ่งในกรณีนี้ จะได้ว่า**ค่าประจำแบบโฟรบีเนียส (Frobinius norm)** ของ $\boldsymbol{A}$ หรือ

$$\| \boldsymbol{A} \|^2 = \sum_i \sum_j a_{ij}^2 = \sum_i \sigma_i^2$$

ดังนี้ หากให้ $\boldsymbol{C}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ใดๆ ซึ่งสามารถแปลงให้อยู่ในรูปของผลคูณกันระหว่าง $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ ซึ่งเป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมล่างหรือบน ขนาด $n \times n$ ตามลำดับ การหาตัวกำหนดของ $\boldsymbol{C}$ ย่อมทำได้โดยง่าย ด้วยว่าตัวกำหนดของ $\boldsymbol{C}$ มีค่าเท่ากับผลคูณของค่ากำหนดของ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ ซึ่งเท่ากับผลคูณของทุกค่าบนแกนของ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ จากคุณสมบัติของตัวกำหนดของเมตริกซ์สามเหลี่ยมล่าง และสามเหลี่ยมบน ดังที่ได้พิจารณาแล้วข้างต้น กล่าวคือ[1]

$$\det(\boldsymbol{C}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} b_{ii}$$

11. **สูตรของโคชชี่และบิเนต์ (Cauchy-Binet formula)**[2] สำหรับเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ขนาด $m \times n$ และ $\boldsymbol{B}$ ขนาด $n \times m$

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \sum_{S \in \mathscr{S}} \det(\boldsymbol{A}_{[m],S}) \cdot \det(\boldsymbol{B}_{S,[m]});\ \mathscr{S} = \begin{pmatrix} [n] \\ m \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

สูตรของโคชชี่และบิเนต์ เป็นการขยายผลลัพธ์ของข้อเท็จจริงที่ 10 ให้ครอบคลุมเมตริกซ์ขนาดใดๆ ที่สามารถคูณกันได้ โดยไม่จำกัดว่า จะต้องเป็นการคูณกันของเมตริกซ์จัตุรัส ที่มีขนาดเท่ากันเท่านั้น ทั้งนี้ แม้การพิสูจน์สูตรของโคชชี่และบิเนต์ จะนอกเหนือขอบเขตของหนังสือเล่มนี้ แต่ถือเป็นสูตรที่สามารถทำความเข้าใจได้ไม่ยาก กล่าวคือ ตัวกำหนดของผลคูณของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ขนาด $m \times n$ และ $\boldsymbol{B}$ ขนาด $n \times m$ จะเท่ากับผลรวมของผลคูณของค่ากำหนดของ ที่ถูกจำกัดขนาดให้เป็นเมตริกซ์จัตุรัส สำหรับทุกความเป็นไปได้ของเมตริกซ์จัตุรัสย่อยทั้งหมด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.26 สมมติให้

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

---

[1] การแยกองค์ประกอบของเมตริกซ์ในลักษณะนี้ มีชื่อว่า **การแยกองค์ประกอบแบบล่างบน (lower-upper decomposition)** ซึ่งถูกเสนอโดย ทาเดยุส บานาเชวิค (Tadeusz Banachiewicz, 1882-1954) นักคณิตศาสตร์ชาวโปแลนด์ในปี 1938 ผู้สนใจการแยกองค์ประกอบของเมตริกซ์แบบล่างบน หรือประเภทอื่นๆ สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากหนังสือพีชคณิตเชิงเส้น เช่น Poole (2006)

[2] การพิสูจน์คุณสมบัติข้อนี้ ปรากฏครั้งแรกในงานประชุมของสถาบันแห่งชาติฝรั่งเศส (Institut de France) ในปี 1812 ในงานของ โอกุสตัง หลุย โคชชี (Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857) และฌาค บีเนต์ (Jacques Binet, 1786-1856) ซึ่งต่างเสนอบทพิสูจน์คุณสมบัติข้อนี้อย่างเป็นเอกเทศกัน

ซึ่งมี $\det(\boldsymbol{AB}) = -2$ และหากใช้สูตรของโคชชี่และบิเนต์ จะได้

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

โดยพจน์แรกทางฝั่งขวาของสมการ คือ ผลคูณของตัวกำหนดของเมตริกซ์ย่อย ที่ตัดคอลัมน์และแถวที่สามของ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ ตามลำดับ พจน์ที่สอง คือ ผลคูณของตัวกำหนดของเมตริกซ์ย่อย ที่ตัดคอลัมน์และแถวที่สองของ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ และพจน์ที่สาม คือ ผลคูณของตัวกำหนดของเมตริกซ์ย่อยที่ตัดคอลัมน์และแถวที่หนึ่งของ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ $\square$

2.5 อินเวอร์ส

อินเวอร์สเป็นแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับการหาร เช่น สมมติให้ $a \neq 0, a \in \mathbb{R}$ อินเวอร์สของ a ซึ่งนิยมแทนด้วย a^{-1} หรือ $\frac{1}{a}$ คือ จำนวนจริงที่เมื่อคูณกับ a แล้ว ให้ผลลัพธ์เท่ากับ 1 ด้วยอุปมาในลักษณะเดียวกันนี้ อินเวอร์สของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ที่มีขนาด $n \times n$ คือ เมตริกซ์ $\boldsymbol{A}^{-1}$ ที่มีขนาด $n \times n$ ซึ่งเมื่อนำไปคูณทางด้านหน้าหรือด้านหลังของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ แล้ว ให้ผลลัพธ์เท่ากับเมตริกซ์เอกลักษณ์ $\boldsymbol{I}$

อย่างไรก็ตาม โดยที่พีชคณิตของเมตริกซ์ เกี่ยวเนื่องกับการคำนวณในหลายมิติ ที่มีความซับซ้อนมากกว่าพีชคณิตของจำนวนจริงทั่วไป การหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ จึงย่อมมีความซับซ้อนมากกว่าการหาอินเวอร์สของจำนวนจริงเป็นธรรมดา ทั้งนี้ แม้การหาอินเวอร์สของเมตริกซ์จะมีหลายวิธี แต่ที่จะได้พิจารณาในที่นี้มี 2 วิธี คือ วิธีการหาอินเวอร์สจากการกระจายของลาปลาส และวิธีการหาอินเวอร์สด้วยการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์และจอร์แดน

2.5.1 การหาอินเวอร์สจากการกระจายของลาปลาส

การหาอินเวอร์สของเมตริกซ์วิธีแรกที่จะได้พิจารณาต่อไปนี้ อาจเริ่มได้จากนิยามของตัวกำหนดแบบลาปลาส โดยตัวกำหนดของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ที่มีขนาด $n \times n$ จะเท่ากับ

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{C}_{ij}$$

เมื่อ $\boldsymbol{C}_{ij} = (-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$ คือ ปัจจัยร่วมของ a_{ij} และ $\boldsymbol{M}_{ij}$ คือ ตัวกำหนดของเมตริกซ์ย่อย ที่

ได้จากการตัดแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของ $\boldsymbol{A}$ ทั้งนี้ มีข้อสำคัญที่ได้กล่าวถึงแล้ว คือ การกระจายของลาปลาสเพื่อให้ได้ตัวกำหนดดังกล่าว จะกระจายที่แถวใดก็ได้

เพื่อให้เห็นภาพชัดเจนยิ่งขึ้น สำหรับกรณีเฉพาะที่ $\boldsymbol{A}$ มีขนาด 3×3 คือ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

จากนิยามของตัวกำหนดด้วยวิธีการกระจายของลาปลาส หากกระจายแถวที่ 2 ของเมตริกซ์ จะได้

$$|\boldsymbol{A}| = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$$

และหากกระจายแถวที่ 1 จะได้

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

จะเห็นได้ว่า การกระจายของลาปลาสเพื่อให้ได้ค่ากำหนดของเมตริกซ์นั้น การกระจายจะต้องให้ค่าในแต่ละแถว ตรงกันกับตัวปัจจัยร่วมในแถวเดียวกัน คำถามสำคัญซึ่งจะไปนำไปสู่การหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ต่อไป คือ หากการกระจายของลาปลาสผิดแถว ในลักษณะที่ว่าค่าที่ใช้กระจายในแต่ละแถว อยู่ต่างแถวกับตัวปัจจัยร่วม เช่น หากกระจายโดยใช้ค่าในแถวที่ 1 ร่วมกับตัวปัจจัยร่วมในแถวที่ 2 ซึ่งเท่ากับ

$$a_{11}\boldsymbol{C}_{21} + a_{12}\boldsymbol{C}_{22} + a_{13}\boldsymbol{C}_{23}$$

ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นเท่าใด ในกรณีนี้ จะเห็นได้ว่าค่าข้างต้น จะเท่ากับค่าของตัวกำหนดของเมตริกซ์พิเศษ ที่มีค่าในแถวที่ 1 และ 2 เหมือนกันทุกประการ กล่าวคือ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\boldsymbol{C}_{21} + a_{12}\boldsymbol{C}_{22} + a_{13}\boldsymbol{C}_{23}$$

ดังนี้ จากคุณสมบัติของตัวกำหนดในข้อ 5 ที่ว่า เมตริกซ์ที่มีแถวใดซ้ำกับอีกแถวหนึ่ง หรือมีคอลัมน์ใดซ้ำกับอีกคอลัมน์หนึ่ง จะมีค่ากำหนดเท่ากับศูนย์ การกระจายของลาปลาสแบบผิดแถว จึงให้ค่ากำหนดที่เท่ากับศูนย์

คุณสมบัติของการกระจายแบบลาปลาสที่ได้พิจารณาข้างต้น สามารถสรุปรวมได้ว่า สำหรับ $\boldsymbol{A}$ ที่มีขนาด $n \times n$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{C}_{kj} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & j = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{C}_{ik} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & i = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

ซึ่งสามารถแสดงในรูปของเมตริกซ์ คือ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \dots & \boldsymbol{C}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{1n} & \dots & \boldsymbol{C}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix}$$

และหากนำ $|\boldsymbol{A}|^{-1}$ คูณเข้าทางขวาของทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \dots & \boldsymbol{C}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{1n} & \dots & \boldsymbol{C}_{nn} \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}$$

ซึ่งให้

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \dots & \boldsymbol{C}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{1n} & \dots & \boldsymbol{C}_{nn} \end{pmatrix}$$

จากนิยามของอินเวอร์สที่ว่า $\boldsymbol{A}^{-1}$ เป็นอินเวอร์สของ $\boldsymbol{A}$ ก็ต่อเมื่อ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$

กระบวนการหาอินเวอร์สทั้งหมดข้างต้น สามารถนำประมวลเป็นทฤษฎีบท ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอินเวอร์สของเมตริกซ์จัตุรัสที่สามารถหาอินเวอร์สได้ กับตัวกำหนด และปัจจัยร่วมของเมตริกซ์ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.1 การหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ สมมติให้ $\boldsymbol{A}$ คือ เมตริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ ที่มี

อินเวอร์สคือ $\boldsymbol{A}^{-1}$ แล้ว

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{-1} &= \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \dots & \boldsymbol{C}_{n1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{1n} & \dots & \boldsymbol{C}_{nn}\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\cdot\mathsf{adj}(\boldsymbol{A})\end{aligned}$$

เมื่อ $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ โดย $\mathsf{adj}(\boldsymbol{A})$ คือ **เมตริกซ์ผูกพัน (adjoint matrix)** ของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ซึ่งเท่ากับทรานส์โพสของ**เมตริกซ์ปัจจัยร่วม (cofactor matrix)** คือ

$$\mathscr{C} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \dots & \boldsymbol{C}_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{n1} & \dots & \boldsymbol{C}_{nn}\end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 2.27 สำหรับเมตริกซ์ขนาด 2×2 เช่น

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

ซึ่งมีตัวกำหนด คือ $|\boldsymbol{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ และเมตริกซ์ผูกพัน คือ

$$\mathsf{adj}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}$$

ดังนี้ อินเวอร์สของ $\boldsymbol{A}$ ภายใต้เงื่อนไขที่ $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ จึงเท่ากับ

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}$$

อนึ่ง การตรวจสอบคำตอบข้างต้น สามารถทำได้จากนิยามของอินเวอร์ส โดยการแสดงให้เห็นว่า

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$ กล่าวคือ

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} &= \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}\begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & -a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11} \\ a_{21}a_{22} - a_{21}a_{22} & -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \square
\end{aligned}
$$

2.5.2 การหาอินเวอร์สจากการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์และจอร์แดน

การหาอินเวอร์สด้วยการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์และจอร์แดน มีพื้นฐานมาจากการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ด้วยวิธีลดทอนตัวแปรแบบเกาส์และจอร์แดน โดยการหาอินเวอร์สของ $\boldsymbol{A}$ ขนาด $n \times n$ สามารถทำได้โดยเริ่มจากการเขียนเมตริกซ์ขยายที่มีเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาบไปกับ $\boldsymbol{A}$ ในรูป $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I})$ จากนั้นจึงใช้วิธีพื้นฐานในการจัดการแถวไปเรื่อยๆ จนกระทั่งได้ผลลัพธ์สุดท้ายเป็น $(\boldsymbol{I}|\boldsymbol{B})$ โดย $\boldsymbol{B}$ ในขั้นตอนท้ายสุด จะเท่ากับอินเวอร์สของ $\boldsymbol{A}$ แต่หากไม่มีวิธีการใดที่จะแปลง $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I})$ ให้ได้ผลลัพธ์สุดท้ายคือ $(\boldsymbol{I}|\boldsymbol{B})$ ก็ถือได้ว่า $\boldsymbol{A}$ ไม่มีอินเวอร์ส ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.28 สำหรับเมตริกซ์จัตุรัสขนาด 2×2 ซึ่งอยู่ในรูป

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ซึ่งให้เมตริกซ์ที่ขยายด้วยเมตริกซ์เอกลักษณ์ คือ

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}) = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

กระบวนการแปลงให้เมตริกซ์ทางซ้ายของเท่ากับเมตริกซ์อัตลักษณ์ สามารถทำได้โดยการเอา $-c/a$ คูณกับทุกค่าในแถวแรก และนำไปรวมกับแถวที่สอง ซึ่งเท่ากับ

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right)$$

จากนั้นเมื่อเอา $a/(ad-bc)$ คูณทุกค่าในแถวที่สองจะได้

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

ในขั้นตอนสุดท้าย หากนำเอา $-b$ คูณทุกค่าในแถวที่สองและนำไปรวมกับแถวแรก จากนั้นจึงหาก ทุกตัวในแถวแรกด้วย a จะได้

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

ซึ่งมีเมตริกซ์ทางขวา เท่ากับอินเวอร์สของเมตริกซ์ทั่วไปขนาด 2×2 ที่คำนวณได้ในตัวอย่างที่ 2.26 □

ตัวอย่างที่ 2.29 จากเมตริกซ์

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ซึ่งให้เมตริกซ์ที่ขยายด้วยเมตริกซ์เอกลักษณ์ คือ

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

เมื่อนำ -1 คูณกับแถวที่ 1 และเอาไปรวมกับแถวที่ 2 และ 3 ตามลำดับ จะได้

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

จากนั้น หากนำ -2 คูณกับแถวที่ 2 และนำไปรวมกับแถวที่ 1 และนำ -2 คูณกับแถวที่ 3 และ

นำไปรวมกับแถวที่ 1 จากนั้นจึงสลับแถวที่ 2 และ 3 จะได้

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

จากผลลัพธ์ข้างต้น จึงได้ว่า

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นได้โดยง่ายด้วยการคูณเมตริกซ์ว่า $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ $\square$

ตัวอย่างที่ 2.30 ในกรณีที่เมตริกซ์ไม่มีอินเวอร์ส เช่น หากกำหนดให้

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ซึ่งเท่ากับ $\boldsymbol{A}$ จากตัวอย่างที่ 2.29 ที่ถูกเปลี่ยนให้แถวแรกและแถวที่สองเท่ากัน ในกรณีนี้ โดยที่ $|\boldsymbol{B}| = 0$ จึงเห็นได้จากวิธีการหาอินเวอร์ส ด้วยการกระจายของลาปลาสว่า $\boldsymbol{B}$ ไม่มีอินเวอร์ส ดังนี้ การพยายามหาอินเวอร์สของ $\boldsymbol{B}$ ด้วยวิธีด้วยการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์และจอร์แดน จึงไม่อาจแปลง $(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{I})$ ให้เป็น $(\boldsymbol{I}|\boldsymbol{B}^{-1})$ ได้ โดยจากเมตริกซ์ขยาย

$$(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{I}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

เนื่องจากแถวสุดท้ายของเมตริกซ์ขยายข้างต้น มีค่าทั้งหมดเท่ากับ 0 จึงไม่สามารถใช้วิธีการจัดการแถวเบื้องต้นใดๆ ที่สามารถจัดรูปเมตริกซ์ทางซ้ายให้เท่ากับเมตริกซ์อัตลักษณ์ได้อีกต่อไป กล่าวคือ $\boldsymbol{B}$ ไม่มีอินเวอร์ส $\square$

2.5.3 คุณสมบัติของอินเวอร์ส

สำหรับเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ ขนาด $n \times n$ ที่มีอินเวอร์สคือ $\boldsymbol{A}^{-1}$ และ $\boldsymbol{B}^{-1}$ ตามลำดับ[1]

1. $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$

2. หาก $\boldsymbol{AB}$ สามารถหาอินเวอร์สได้แล้ว $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

3. อินเวอร์สของ $\boldsymbol{A}'$ คือ $(\boldsymbol{A}')^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})'$

4. สมมติให้ $k \neq 0$ คือค่าคงที่ $(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

5. $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$

6. สมมติให้ $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์ที่ขึ้นกับค่าของ x

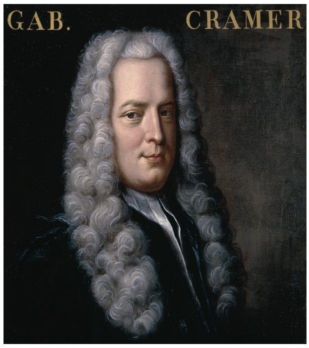
$$\frac{d\boldsymbol{A}^{-1}}{dx} = -\boldsymbol{A}^{-1}\frac{d\boldsymbol{A}}{dx}\boldsymbol{A}^{-1}$$

2.5.4 กฎของคราเมร์

กฎของคราเมร์ (Cramer's rule) เป็นเครื่องมือสำคัญที่สามารถใช้หาค่าของตัวแปรในระบบสมการเชิงเส้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งถูกเสนอโดย กาบรีเยล คราเมร์ (Gabriel Cramer, 1704-1752) นักคณิตศาสตร์ชาวสวิส โดยจากระบบสมการเชิงเส้น n สมการและ n ตัวแปร ซึ่งอยู่ในรูป $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ หาก $\boldsymbol{A}$ มีอินเวอร์ส การหาคำตอบของระบบสมการนี้ สามารถทำได้โดยการนำเอา $\boldsymbol{A}^{-1}$ คูณเข้าด้านหน้าของสมการ ซึ่งให้ผลลัพธ์ คือ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ จากนั้น เมื่อแทนค่าของ $\boldsymbol{A}^{-1}$ จากการขยายของลาปลาส จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \dots & \boldsymbol{C}_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{1j} & \dots & \boldsymbol{C}_{nj} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{1n} & \dots & \boldsymbol{C}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

[1] ผู้สนใจสามารถทดสอบการพิสูจน์คุณสมบัติข้อ 1-4 ได้ ในแบบฝึกหัดท้ายบท



รูปที่ 2.5 กาบรีเยล คราเมร์ (Gabriel Cramer, 1704-1752)* เป็นนักคณิตศาสตร์ นักฟิสิกส์ นักสถิติ และนักดาราศาสตร์ ชาวสวิส คราเมร์เป็นนักคณิตศาสตร์ที่ฉายอัจฉริยภาพทางคณิตศาสตร์ตั้งแต่อายุน้อย คือ ได้รับปริญญาเอกในสาขาคณิตศาสตร์จากมหาวิทยาลัยเจนีวา เมื่ออายุเพียงสิบแปดปี และหลังจากนั้นอีกเพียงสองปี ก็ได้รับแต่งตั้งให้เป็นหัวหน้าภาควิชาร่วมในสาขาคณิตศาสตร์ ในมหาวิทยาลัยเดียวกัน ผลงานทางคณิตศาสตร์ของคราเมร์ที่มีชื่อเสียงที่สุด คือ กฎของคราเมร์ที่ใช้หาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการและตัวแปรเท่ากัน ซึ่งยังคงเป็นเครื่องมือที่ใช้อย่างแพร่หลายในปัจจุบัน นอกจากนี้ คราเมร์ยังมีผลงานสำคัญเกี่ยวกับเรื่องความน่าจะเป็น และทฤษฎีอรรถประโยชน์ที่คาดหวัง (expected utility theory) ความเสี่ยง ตลอดจนทฤษฎีทางการเงิน และคณิตศาสตร์ประกันภัย

*https://en.wikipedia.org/wiki/Gabriel_Cramer#/media/File:Gabriel_Cramer.jpg

ดังนี้ จึงได้คำตอบของตัวแปรในระบบสมการแต่ละตัว คือ

$$x_j = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{C}_{ij}, j = 1, \ldots, n$$

โดยจากการพิจารณาค่า $\sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{C}_{ij}$ จะได้ว่า ค่าดังกล่าวคือค่ากำหนดของ $\boldsymbol{A}$ ที่ถูกเอาเวคเตอร์ฝั่งขวามือ คือ $\boldsymbol{b}$ เข้าแทนที่คอลัมน์ j ในเมตริกซ์เดิม ผลลัพธ์ทั้งหมดข้างต้น สามารถสรุปรวมเป็นทฤษฎีบทได้ ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.2 กฎของคราเมร์ (Cramer's rule) สมมติให้ระบบสมการเชิงเส้นหนึ่งซึ่งมีสมการ n สมการ และตัวแปร n ตัวแปร อยู่ในรูป $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ โดยที่ $\boldsymbol{A}$ คือเมตริกซ์จัตุรัสของสัมประสิทธิ์ขนาด $n \times n$ ที่มีตัวกำหนดคือ $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ $\boldsymbol{x}$ คือเวคเตอร์ตัวแปร และ $\boldsymbol{b}$ คือค่าทางฝั่งขวาของระบบสมการ สมมติให้ $|\boldsymbol{A}_j|$ คือ ตัวกำหนดของเมตริกซ์ที่ได้จากการนำเอา $\boldsymbol{b}$ ไปแทนที่คอลัมน์ j ในเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ แล้ว จะได้ว่า

$$x_i = \frac{|\boldsymbol{A}_j|}{|\boldsymbol{A}|}$$

สำหรับทุกค่า $i = 1, \ldots, n$ ■

กฎของคราเมร์ เป็นวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่มักทำได้รวดเร็วกว่าวิธีอื่นๆ เช่น การใช้อินเวอร์สของเมตริกซ์ เนื่องด้วยสามารถใช้แสดงคำตอบของระบบสมการในรูปเศษส่วนของค่ากำหนด ซึ่งไม่ยุ่งยากดังเช่นการใช้อินเวอร์สของเมตริกซ์ โดยเฉพาะในกรณีระบบสมการเชิงเส้นขนาดใหญ่ ที่การหาเมตริกซ์ปัจจัยร่วมมักมีความซับซ้อนเป็นอย่างมาก อีกทั้งยังเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพในกรณีที่ประสงค์จะทราบเฉพาะคำตอบของบางตัวแปร ไม่ใช่คำตอบของทั้งระบบสมการ อนึ่ง กฎของคราเมร์ยังเป็นเครื่องมือ ที่เป็นที่นิยมใช้ในทางเศรษฐศาสตร์ ใน **การวิเคราะห์เชิงสถิตเปรียบเทียบ (comparative static analysis)** เพื่อวิเคราะห์ผลกระทบของตัวแปรอิสระ ต่อตัวแปรตามในความสัมพันธ์ทางเศรษฐศาสตร์ต่างๆ ดังจะได้พิจารณาเพิ่มเติมในส่วนท้ายของบท

ตัวอย่างที่ 2.31 ในกรณีระบบสมการเชิงเส้นสองสมการและสองตัวแปร คือ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

จากกฎของคราเมร์ จะได้ว่า

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

และ

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

ซึ่งเท่ากับผลลัพธ์ที่ได้จากการหาคำตอบของระบบสมการ ด้วยวิธีแทนค่าตัวแปร และวิธีลดทอนตัวแปรแบบเกาส์ และวิธีการใช้อินเวอร์สของเมตริกซ์ □

ตัวอย่างที่ 2.32 จากระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{array}{rrrcl} \alpha x & -2y & & = & 1 \\ x & +y & +z & = & 1 \\ & y & -z & = & 0 \end{array}$$

การหาค่า α ที่ทำให้ระบบสมการนี้มีคำตอบ และค่าของ α ที่ทำให้ $x = y = z$ สามารถทำได้ โดยแปลง ระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น ให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ คือ

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

เมื่อ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

โดยที่เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอที่ทำให้ระบบสมการมีคำตอบ คือ $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ และจากค่ากำหนดที่

เท่ากับ

$$\begin{vmatrix} \alpha & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\alpha - \alpha - 2 = -2(\alpha + 1)$$

ดังนี้ ค่าของ α ที่ทำให้ $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ คือ $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$

จากกฎของคราเมร์ หากให้ $|\boldsymbol{A}_1|, |\boldsymbol{A}_2|$ และ $|\boldsymbol{A}_3|$ แทนตัวกำหนดของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ที่คอลัมน์ที่ $1, 2$ และ 3 ถูกแทนค่าด้วย $\boldsymbol{b}$ ตามลำดับ ดังนี้

$$x = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{1}{-2(\alpha+1)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{2}{\alpha + 1}$$

$$y = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{1}{-2(\alpha+1)} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{\alpha - 1}{2(\alpha + 1)}$$

$$z = \frac{|\boldsymbol{A}_3|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{1}{-2(\alpha+1)} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\alpha - 1}{2(\alpha + 1)}$$

จากข้างต้น ค่าของ y และ z ซึ่งเป็นคำตอบของระบบสมการจะเท่ากันเสมอ ค่าของ α ที่ทำให้ $x = y = z$ จึงต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข $2 = \frac{\alpha-1}{2}$ กล่าวคือ $\alpha = 5$ $\square$

ตัวอย่างที่ 2.33 จากระบบสมการเชิงเส้น 3 สมการและ 3 ตัวแปรที่มีลักษณะเดียวกัน ซึ่งอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 &= 0 \\ bx_1 + cx_2 + ax_3 &= 0 \\ cx_1 + ax_2 + bx_3 &= 0 \end{aligned}$$

ระบบสมการเชิงเส้นนี้ลักษณะที่น่าสนใจ คือ เป็นระบบสมการที่มีค่าสัมประสิทธิ์ของระบบสมการเพียง 3 ค่า โดยที่แต่ละสมการมีค่าสัมประสิทธิ์ไม่ซ้ำกัน เมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีลักษณะสมมาตรและแถวและคอลัมน์แรกของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ต่างมีสัมประสิทธิ์เรียงกันไปในรูป a b c ระบบ

สมการนี้มีคำตอบที่เป็นสาระก็ต่อเมื่อ

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3) = 0$$

หรือ

$$(a^3 + b^3 + c^3) - 3abc = 0 \quad \square$$

2.6 ค่าของเมตริกซ์

คือ **ค่าของเมตริกซ์ (matrix definiteness)** เป็น แนวคิดสำคัญทางพีชคณิตเชิงเส้น ที่ช่วยให้สามารถจำแนกจุดต่ำสุดหรือสูงสุดของฟังก์ชั่นหลายตัวแปรได้ ทั้งนี้ ในการจำแนกจุดต่ำสุดหรือสูงสุด ของฟังก์ชั่นที่มีตัวแปรอธิบายเพียงตัวแปรเดียวนั้น เป็นที่ทราบกันดีว่าจำเป็นต้องพิจารณาเงื่อนไขในลำดับที่สอง ว่า อนุพันธ์ในลำดับที่สองของฟังก์ชั่นนั้น มีค่าเป็นบวกหรือเป็นลบ และเช่นเดียวกันนี้ การจำแนกจุดต่ำสุดหรือสูงสุดของฟังก์ชั่นหลายตัวแปร จึงจำเป็นต้องพิจารณาเงื่อนไขลำดับที่สอง ว่าค่าของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่เกี่ยวข้องว่าเป็นเช่นใด[1]

แนวคิดเรื่องค่าของเมตริกซ์ในที่นี้ พอจะเทียบได้กับแนวคิดเรื่องค่าของจำนวนจริง ที่พิจารณาว่า $a \in \mathbb{R}$ มีค่าเป็นบวก หรือมีค่าเป็นลบ ซึ่งสำหรับกรณีที่ต้องการพิจารณาค่าของ $a \in \mathbb{R}$ นั้น ถือเป็นเรื่องง่าย และแม้ไม่ได้มีการวิเคราะห์ให้ลึกซึ้ง ก็พอจะได้คำตอบ ที่เสมือนเป็นคำตอบตามนิยามของค่าบวกและค่าลบที่ว่า a เป็นบวกหาก $a > 0$ และ a เป็นลบหาก $a < 0$ แต่ในกรณีของเมตริกซ์ซึ่งเป็นกลุ่มตัวเลขนั้น คำถามที่ว่าค่าของเมตริกซ์เป็นบวกหรือลบ ย่อมเป็นคำถามที่จำต้องวิเคราะห์อย่างละเอียดลึกซึ้งขึ้น ซึ่งไม่อาจพิจารณาแต่เพียงเครื่องหมายของค่าใดค่าหนึ่งในเมตริกซ์ได้

อย่างไรก็ตาม หากได้ย้อนกลับไปใคร่ครวญการกำหนดค่าของจำนวนจริงว่า $a \in \mathbb{R}$ มีค่าเป็นบวกหรือลบให้ลึกซึ้งขึ้นแล้ว จะเห็นได้ว่า การพิจารณาค่าของจำนวนจริง ว่าเป็นบวกหรือลบนั้นไม่ได้มีเพียงวิธีเดียว โดยวิธีแรกคือการดูค่าของ a อย่างตรงไปตรงมาว่ามากกว่าหรือน้อยกว่า

---

[1] เงื่อนไขลำดับที่สองเพื่อจำแนกจุดต่ำสุดและสูงสุดของฟังก์ชั่นหลายตัวแปร ดังจะได้พิจารณาในที่นี้ จะครอบคลุมเฉพาะการหาจุดต่ำสุดหรือสูงสุดที่ไม่มีข้อจำกัด (unconstrained optimization) เท่านั้น ผู้ประสงค์จะศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับเงื่อนไขลำดับแรกและลำดับที่สอง ของการหาจุดต่ำสุดหรือสูงสุดที่มีข้อจำกัด (constrained optimization) และตัวอย่างการประยุกต์ในทางเศรษฐศาสตร์ สามารถค้นคว้าได้จาก Simon and Blume (1994)

ศูนย์ แต่อีกวิธีหนึ่ง ซึ่งเป็นแนวคิดที่สามารถนำไปขยาย เพื่อใช้พิจารณาค่าของเมตริกซ์ได้ คือ การพิจารณาว่า ค่าของ ax^2เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใดๆ นั้น มากกว่าหรือน้อยกว่าศูนย์ ซึ่งหาก $ax^2 > 0$ สำหรับทุกค่า $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ ก็จะสรุปได้ว่า a มีค่าเป็นบวก และในทางกลับกัน หาก $ax^2 < 0$ สำหรับทุกค่า $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ ก็จะสรุปได้ว่า a มีค่าเป็นลบ แนวคิดดังกล่าวซึ่งใช้พิจารณาค่าของจำนวนจริง สามารถนำไปเทียบเคียงกับการพิจารณาค่าของเมตริกซ์ได้ ดังสรุปไว้เป็นนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 2.4 ค่าของเมตริกซ์ (matrix definiteness) เมตริกซ์สมมาตร $\boldsymbol{A}$ ขนาด $n \times n$

1. มี**ค่าบวก (positive definite)** หาก $\boldsymbol{x'Ax} > 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

2. มี**ค่ากึ่งบวก (positive semidefinite)** หาก $\boldsymbol{x'Ax} \geq 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

3. มี**ค่าลบ (negative definite)** หาก $\boldsymbol{x'Ax} < 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

4. มี**ค่ากึ่งลบ (negative semidefinite)** หาก $\boldsymbol{x'Ax} \leq 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

5. **ระบุค่าไม่ได้ (indefinite)** หาก $\boldsymbol{x'Ax} > 0, \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ และ $\boldsymbol{x'Ax} < 0, \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ■

จากนิยามข้างต้น มีข้อสังเกตสำคัญ คือ ค่าของเมตริกซ์เป็นนิยามที่ยึดโยงกับเมตริกซ์สมมาตรเท่านั้น อย่างไรก็ตาม ในกรณีของฟังก์ชั่นที่อยู่ในรูปกำลังสอง (quadratic form) คือ $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x'Bx}$ นั้น แม้ $\boldsymbol{B}$ จะไม่ได้อยู่ในรูปของเมตริกซ์สมมาตรแต่แรก แต่ก็สามารถแปลงให้อยู่ในรูปที่สมมาตรได้ไม่ยากโดยอาศัยข้อเท็จจริงที่ว่า

$$\boldsymbol{x'Bx} = \boldsymbol{x'Ax}$$

เมื่อ $\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B'}}{2}$ คือเมตริกซ์สมมาตร[1]

ตัวอย่างที่ 2.34 เมตริกซ์เอกลักษณ์ $\boldsymbol{I}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีค่าบวก เนื่องจาก $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{x'Ix} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$$

เมตริกซ์ศูนย์ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ เป็นเมตริกซ์ที่ทั้งมีค่ากึ่งบวก และมีค่ากึ่งลบ เนื่องจากสอดคล้องกับทั้งสอง

[1] ผู้สนใจสามารถทดลองพิสูจน์ข้อเท็จจริงนี้ได้ในแบบฝึกหัดท้ายบท

เงื่อนไข คือ $\boldsymbol{x'Ax} = 0 \geq 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ และ $\boldsymbol{x'Ax} = 0 \leq 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ $\square$

ตัวอย่างที่ 2.35 เมตริกซ์แกน $\boldsymbol{A} = \text{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ ซึ่ง $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{x'Ax} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$$

มีค่าบวกหาก $\forall a_i > 0$ มีค่ากึ่งบวกหาก $\forall a_i \geq 0$ มีค่าเป็นลบหาก $\forall a_i < 0$ ระบุค่าไม่ได้ $\exists a_i > 0$ และ $\exists a_j < 0$ $\square$

ตัวอย่างที่ 2.36 จากเมตริกซ์

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

สำหรับกรณีแรก

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x'Ax} &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 + x_2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

กล่าวคือ $\boldsymbol{x'Ax} \geq 0$ โดยจะเท่ากับศูนย์เมื่อ $x_1 = -x_2$ ดังนี้ เมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ จึงมีค่ากึ่งบวก กรณีนี้ให้ข้อสังเกตที่น่าสนใจคือ การที่ทุกค่าในเมตริกซ์เป็นบวกทั้งหมด ไม่ใช่เงื่อนไขที่เพียงพอที่ทำให้เมตริกซ์มีค่าบวก สำหรับกรณีที่สอง

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x'Bx} &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 \end{aligned}$$

ซึ่งมีค่าน้อยกว่าศูนย์หาก $x_1 = 1$ และ $x_2 = -1$ แต่มีค่ามากกว่าศูนย์หาก $x_1 = x_2 = 1$ ซึ่ง

จากนิยามสามารถสรุปได้ว่า เมตริกซ์ $\boldsymbol{B}$ ไม่สามารถระบุค่าได้ และสำหรับกรณีสุดท้าย

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x'Cx} &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0\end{aligned}$$

อนึ่ง มีข้อสังเกตสำคัญจากกรณีสุดท้ายว่า เมตริกซ์อาจมีค่าบวกได้ แม้บางค่าในเมตริกซ์อาจเป็นค่าลบ $\square$

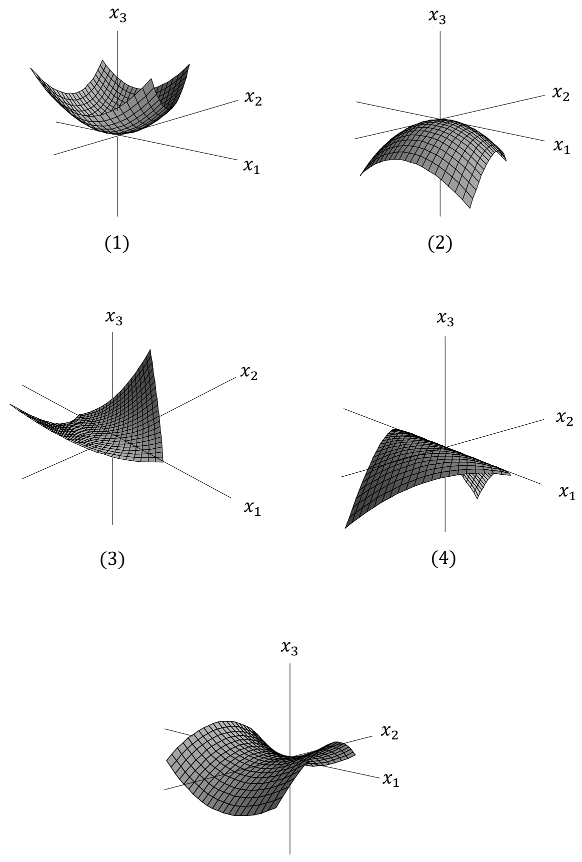
ตัวอย่างข้างต้นแสดงให้เห็นว่า แม้การพิจารณาค่าของเมตริกซ์แกนจะสามารถทำได้ง่าย จากการพิจารณาค่าภายในเมตริกซ์ แต่หากไม่ใช่เมตริกซ์แกน การพิจารณาค่าของเมตริกซ์มักซับซ้อนขึ้น และไม่อาจใช้ค่าของตัวเลขภายในเมตริกซ์แต่ละตัว มาตัดสินได้ว่าค่าของเมตริกซ์จะเป็นเช่นใด อีกทั้งแม้ในกรณีที่ตัวเลขทุกตัวในเมตริกซ์จะมีค่าเป็นบวก ก็ไม่อาจจรับรองได้ว่าเมตริกซ์จะมีค่าเป็นบวกเสมอ

อนึ่ง เกณฑ์ที่ใช้พิจารณาค่าของเมตริกซ์ คือ $\boldsymbol{x'Ax}$ นั้น สามารถตีความในเชิงเรขาคณิตได้อย่างน่าสนใจ เนื่องจาก

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x'Ax} \equiv f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i \le j} a_{ij} x_i x_j$$

เมื่อ $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ คือ ฟังก์ชั่นใน**รูปแบบกำลังสอง (quadratic form)** ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์ใน $\boldsymbol{A}$ เป็นตัวกำหนดรูปร่างของฟังก์ชั่น อาทิ สำหรับฟังก์ชั่นสองตัวแปร คือ $f(x_1, x_2)$ ค่าใน $\boldsymbol{A}$ สามารถกำหนดฟังก์ชั่นในรูปแบบกำลังสอง ให้เป็นรูปร่างต่างๆ ซึ่งสอดคล้องกับค่าของเมตริกซ์ทั้ง 5 ประเภทตามนิยามข้างต้นได้ คือ รูปกรวยหงาย รูปกรวยคว่ำ รูปม้วนขึ้น รูปม้วนลง รูปอานม้า ดังรูปที่ 2.6

ในกรณีที่ (1) เมตริกซ์ $\boldsymbol{A} = \text{diag}(1, 1)$ เป็นเมตริกซ์ที่มีค่าบวก ซึ่งสร้างให้ $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x'Ax}$ มีลักษณะเป็นกรวยหงาย ที่มีจุดต่ำสุดที่ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ โดยที่ $f(\boldsymbol{x}) > 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ในกรณีที่ (2) เมตริกซ์ $\boldsymbol{A} = \text{diag}(-1, -1)$ เป็นเมตริกซ์ที่มีค่าลบ ซึ่งสร้างให้ $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x'Ax}$ มีลักษณะ



รูปที่ 2.6 ฟังก์ชั่นสองตัวแปรในรูปแบบกำลังสอง $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ เมื่อ (1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ (5) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

เป็นกรวยคว่ำ ที่มีจุดสูงสุดที่ $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ โดยที่ $f(\boldsymbol{x}) < 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ ในกรณีที่ (3) เมตริกซ์

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

เป็นเมตริกซ์ที่มีค่ากึ่งบวก ซึ่งสร้างให้ $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x'Ax}$ มีลักษณะเป็นแผ่นระนาบที่ถูกม้วนขึ้น โดยที่ $f(\boldsymbol{x}) \geq 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ ทั้งนี้ จุดต่ำสุดของกราฟไม่ได้มีเพียงจุดเดียว แต่คือทุกจุดที่ประกอบกันเป็นแกนของกราฟ กล่าวคือ $f(\boldsymbol{x}) = 0$ ที่ $(x_1, 0), x_1 \in \mathbb{R}$ ในกรณีที่ (4) เมตริกซ์

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

เป็นเมตริกซ์ที่มีค่ากึ่งลบ ที่ให้ $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x'Ax}$ มีลักษณะเป็นแผ่นระนาบที่ถูกม้วนลง โดยที่ $f(\boldsymbol{x}) \leq 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ จุดสูงสุดของกราฟไม่ได้มีเพียงจุดเดียว แต่คือทุกจุดที่ประกอบกันเป็นแกนของกราฟ กล่าวคือ $f(\boldsymbol{x}) = 0$ ที่ $(x_1, 0), x_1 \in \mathbb{R}$ และในกรณีที่ (5) เมตริกซ์ $\boldsymbol{A} = \text{diag}(1, -1)$ เป็นเมตริกซ์ที่ไม่สามารถกำหนดค่าได้ เนื่องจาก $f(\boldsymbol{x}) > 0,$ หาก $x_1^2 > x_2^2$ และ $f(\boldsymbol{x}) < 0,$ หาก $x_1^2 < x_2^2$

อนึ่ง จากข้อสังเกตข้างต้นที่ว่า เมตริกซ์แกน เป็นเมตริกซ์พิเศษซึ่งมีคุณสมบัติพิเศษ ที่ค่าของเมตริกซ์สามารถพิจารณาได้โดยตรงจากตัวเลขในเมตริกซ์ ต่างจากเมตริกซ์ที่ไม่ใช่เมตริกซ์แกน ซึ่งค่าของเมตริกซ์ไม่อาจสรุปได้โดยตรง การพิจารณาค่าของเมตริกซ์ซึ่งไม่ใช่เมตริกซ์แกน จึงจำเป็นต้องอาศัยหลักเกณฑ์ที่ได้ถูกพัฒนาขึ้นเป็นการเฉพาะ โดยวิธีแรก คือ **การแปลงให้เป็นเมตริกซ์แกน (matrix diagonalization)** เพื่อให้เมตริกซ์แกนที่ถูกสร้างขึ้นจากเมตริกซ์ดั้งเดิม ยังคงลักษณะที่สำคัญเช่นเดียวกันกับเมตริกซ์เดิม แล้วจึงคำนวณค่าต่างๆ ที่ต้องการจากเมตริกซ์แกนต่อไป วิธีที่สอง คือ **การพิจารณาค่าเฉพาะ (eigenvalue)** ของเมตริกซ์[1] และอีกวิธีหนึ่งซึ่งจะได้ศึกษาโดยละเอียดต่อไปนี้ คือ **การพิจารณาตัวกำหนดของเมตริกซ์ย่อย** โดยจากนิยามของตัวกำหนดด้วยวิธีการขยายของลาปลาส ซึ่งได้นิยามไมเนอร์ที่แถว i และคอลัมน์ j ของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}_{n \times n}$ โดยใช้สัญลักษณ์แทนคือ $\boldsymbol{M}_{ij}$ ว่าเท่ากับตัวกำหนดที่ได้จากการตัดแถว i และคอลัมน์ j ของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ออก แนวคิดดังกล่าวสามารถขยายสู่นิยามเพื่อใช้พิจารณาค่าของเมตริกซ์ ดังนี้

นิยามที่ 2.5 ค่ากำหนดของเมตริกซ์ย่อยประเภทต่างๆ สำหรับเมตริกซ์จัตุรัส $\boldsymbol{A}$ ขนาด $n \times n$

[1] แนวคิดเรื่องการแปลงเมตริกซ์ทั่วไปให้เป็นเมตริกซ์แกน และแนวคิดเรื่องค่าเฉพาะ เป็นเนื้อหาสำคัญของวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ซึ่งจะได้ยกขึ้นพิจารณาเป็นการเฉพาะในบทต่อไป

ไมเนอร์ (minor) ของแถว i คอลัมน์ j ของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ใช้สัญลักษณ์แทนว่า $\boldsymbol{M}_{ij}$ คือ ตัวกำหนดของ**เมตริกซ์ย่อย (submatrix)** ที่ได้จากการตัดแถว i และคอลัมน์ j ของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ออก

เมตริกซ์ย่อยของ $\boldsymbol{A}$ ขนาด $k \times k$ ที่ได้จากการตัดแถวและคอลัมน์เดียวกันออกไป $n-k$ แถวและคอลัมน์ มีชื่อเรียกว่า **เมตริกซ์ย่อยหลัก (principal submatrix)** ที่ระดับ k ของ $\boldsymbol{A}$ โดยตัวกำหนดของเมตริกซ์ย่อยหลัก มีชื่อเรียกว่า **ไมเนอร์หลัก (principal minor)** ที่ระดับ k ของ $\boldsymbol{A}$ ใช้สัญลักษณ์แทนว่า $\widehat{\boldsymbol{M}}_{(k)}$

เมตริกซ์ย่อยของ $\boldsymbol{A}$ ขนาด $k \times k$ ที่ได้จากการตัดแถวสุดท้ายและคอลัมน์สุดท้ายเดียวกันออกไป $n-k$ แถวและคอลัมน์ มีชื่อเรียกว่า **เมตริกซ์ย่อยหลักแบบเรียง (leading principal submatrix)** ที่ระดับ k ของ $\boldsymbol{A}$ โดยตัวกำหนดของเมตริกซ์ย่อยหลักแบบเรียง มีชื่อเรียกว่า **ไมเนอร์หลักแบบเรียง (leading principal minor)** ที่ระดับ k ของ $\boldsymbol{A}$ ใช้สัญลักษณ์แทนว่า $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(k)}$ ■

ตัวอย่างที่ 2.34 จากเมตริกซ์

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

เมตริกซ์ย่อย คือ เมตริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของ $\boldsymbol{A}$ เช่น หากเราตัดแถวที่ 1 และคอลัมน์ที่ 2 ของ และหาค่ากำหนดของเมตริกซ์ย่อย หรือไมเนอร์ของแถวที่ 1 และคอลัมน์ที่ 2 ของ $\boldsymbol{A}$ จะได้ $\boldsymbol{M}_{12} = (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$ ทั้งนี้ มีข้อสังเกตที่สำคัญว่า เมตริกซ์ย่อยที่ได้จากการตัดแถวและคอลัมน์ของ $\boldsymbol{A}$ เพื่อหาไมเนอร์นั้น ไม่จำเป็นต้องตัดแถวและคอลัมน์เดียวกัน แต่สามารถตัดได้เพียงหนึ่งแถวและหนึ่งคอลัมน์เท่านั้น เมตริกซ์ทั่วไปที่มีขนาด $n \times n$ สามารถให้ค่าไมเนอร์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ n^2 ตัว ซึ่งในกรณีของเมตริกซ์ขนาด 3×3 ข้างต้น จะสามารถมีไมเนอร์ได้ทั้งสิ้น 9 ตัว

เมตริกซ์ย่อยหลักของ $\boldsymbol{A}$ ที่ระดับ 1 มี 3 แบบ คือ เมตริกซ์ย่อยที่ได้จากการตัดแถวที่ $1, 2$ และคอลัมน์ที่ $1, 2$ ซึ่งให้ $\widehat{\boldsymbol{M}}_{(1)} = a_{33}$ เมตริกซ์ย่อยที่ได้จากการตัดแถวที่ $1, 3$ และคอลัมน์ที่ $1, 3$ ซึ่งให้ $\widehat{\boldsymbol{M}}_{(1)} = a_{22}$ และ เมตริกซ์ย่อยที่ได้จากการตัดแถวที่ $2, 3$ และคอลัมน์ที่ $2, 3$ ซึ่งให้ $\widehat{\boldsymbol{M}}_{(1)} = a_{11}$ เมตริกซ์ย่อยหลักของ $\boldsymbol{A}$ ที่ระดับ 2 มี 3 แบบ คือ เมตริกซ์ย่อยที่ได้จากการตัดแถวที่ 1 และคอลัมน์ที่ 1 ซึ่งให้ $\widehat{\boldsymbol{M}}_{(2)} = (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$ เมตริกซ์ย่อยที่ได้จากการตัดแถวที่ 2 และคอลัมน์ที่ 2 ซึ่งให้ $\widehat{\boldsymbol{M}}_{(2)} = (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})$ และ เมตริกซ์ย่อยที่ได้จากการตัดแถวที่ 3

และคอลัมน์ที่ 3 ซึ่งให้ $\widehat{\boldsymbol{M}}_{(2)} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ และในท้ายที่สุด เมตริกซ์ย่อยหลักของ $\boldsymbol{A}$ ที่ระดับ 3 คือ $\boldsymbol{A}$ ซึ่งให้ $\widehat{\boldsymbol{M}}_{(3)} = |\boldsymbol{A}|$

เมตริกซ์ย่อยหลักแบบเรียงของ $\boldsymbol{A}$ ที่ระดับ 1 คือเมตริกซ์ย่อยที่ประกอบด้วยแถวที่ 1 และคอลัมน์ที่ 1 ซึ่งให้ $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(1)} = a_{11}$ เมตริกซ์ย่อยหลักแบบเรียงของ $\boldsymbol{A}$ ที่ระดับ 2 คือเมตริกซ์ย่อยที่ประกอบด้วยแถวที่ $1, 2$ และคอลัมน์ที่ $1, 2$ ซึ่งให้ $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(2)} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ เมตริกซ์ย่อยหลักแบบเรียงของ $\boldsymbol{A}$ ที่ระดับ 3 คือเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ซึ่งให้ $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(3)} = |\boldsymbol{A}|$ □

นิยามไมเนอร์หลักแบบเรียง และไมเนอร์หลักตามนิยามที่ 2.5 ข้างต้น เป็นแนวคิดสำคัญซึ่งสามารถใช้จำแนกค่าของเมตริกซ์ ว่าเป็นประเภทใดในแต่ละประเภทดังที่ได้กล่าวไว้ในนิยามที่ 2.4 ได้ ดังสรุปไว้ในรูปทฤษฎีบท ต่อไปนี้[1]

ทฤษฎีบทที่ 2.4 การจำแนกค่าของเมตริกซ์ด้วยไมเนอร์หลักและไมเนอร์หลักแบบเรียง สำหรับเมตริกซ์สมมาตร $\boldsymbol{A}$ ขนาด $n \times n$ ที่มีไมเนอร์หลักที่ระดับ $0 < k \leq n$ คือ $\widehat{\boldsymbol{M}}_{(k)}$และไมเนอร์หลักแบบเรียงที่ระดับ $0 < k \leq n$ คือ $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(k)}$

1. $\boldsymbol{A}$ มีค่าบวก ก็ต่อเมื่อ ไมเนอร์หลักแบบเรียงของ $\boldsymbol{A}$ ทุกค่า มีค่ามากกว่าศูนย์ กล่าวคือ $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(k)} > 0$ สำหรับทุกค่า k ที่ $0 < k \leq n$

2. $\boldsymbol{A}$ มีค่าลบ ก็ต่อเมื่อ ไมเนอร์หลักแบบเรียงของ $\boldsymbol{A}$ มีเครื่องหมายสลับกัน กล่าวคือ $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(k)} < 0$ เมื่อ k เป็นเลขคี่ และ $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(k)} > 0$ เมื่อ k เป็นเลขคู่ สำหรับทุกค่า k ที่ $0 < k \leq n$

3. $\boldsymbol{A}$ ไม่สามารถระบุค่าได้ หากรูปแบบของไมเนอร์หลักแบบเรียงของ $\boldsymbol{A}$ ไม่ได้เป็นไปตามข้อ 1 หรือข้อ 2

4. $\boldsymbol{A}$ มีค่ากึ่งบวก ก็ต่อเมื่อ ไมเนอร์หลักของ $\boldsymbol{A}$ ทุกค่า มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ กล่าวคือ $\widehat{\boldsymbol{M}}_{(k)} \geq 0$ สำหรับทุกค่า k ที่ $0 < k \leq n$

5. $\boldsymbol{A}$ มีค่ากึ่งลบ ก็ต่อเมื่อ ไมเนอร์หลักทุกค่าของ $\boldsymbol{A}$ สำหรับอันดับที่เป็นเลขคี่และเลขคู่ มีเครื่องหมายสลับกัน กล่าวคือ $\widehat{\boldsymbol{M}}_{(k)} \leq 0$ เมื่อ k เป็นเลขคี่ และ $\widehat{\boldsymbol{M}}_{(k)} \geq 0$ เมื่อ k เป็นเลขคู่ สำหรับทุกค่า k ที่ $0 < k \leq n$ ■

[1] ผู้สนใจสามารถศึกษาการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้โดยละเอียดได้จาก Simon and Blume (1994)

จากทฤษฎีบทข้างต้น การจำแนกว่าเมตริกซ์มีค่าบวก ค่าลบ หรือไม่จำแนกค่าได้ สามารถทำได้โดยพิจารณา แต่เพียงรูปแบบไมเนอร์หลักแบบเรียงเท่านั้น ส่วนการจำแนกว่าเมตริกซ์มีค่ากึ่งบวกหรือกึ่งลบนั้น จะต้องพิจารณารูปแบบไมเนอร์หลักทั้งหมด ดังนี้ การจำแนกค่าของเมตริกซ์ ว่ามีค่าเป็นบวกหรือลบหรือไม่สามารถระบุค่าได้ ย่อมทำได้อย่างรวดเร็วกว่า เนื่องจากเมตริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ จะมีจำนวนไมเนอร์หลักแบบเรียงที่ต้องพิจารณาเพียง n ตัว ต่างจากการจำแนกค่าของเมตริกซ์ว่ามีค่ากึ่งบวกหรือกึ่งลบ ที่ต้องพิจารณารูปแบบของไมเนอร์หลักทั้งหมด ซึ่งมีมากถึง

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right) + \ldots + \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$$

ตัวอย่างที่ 2.37 สำหรับเมตริกซ์แกน $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ จากนิยามของค่าของเมตริกซ์และคุณสมบัติของเมตริกซ์แกน ที่ว่า ตัวกำหนดของเมตริกซ์แกนจะเท่ากับผลคูณของทุกค่าบนแกนของเมตริกซ์ ดังนี้ จึงอาจพิจารณาให้เห็นความเชื่อมโยงระหว่างนิยามของค่าของเมตริกซ์และรูปแบบของไมเนอร์หลักแบบเรียงตามทฤษฎีบทข้างต้นได้ คือ หาก $\boldsymbol{A}$ มีค่าบวก กล่าวคือ $a_i > 0, \forall i$ เมตริกซ์ย่อยหลักแบบเรียงของ $\boldsymbol{A}$ ที่ต่างเป็นเมตริกซ์แกนด้วย จะให้ค่าไมเนอร์หลักแบบเรียงของ $\boldsymbol{A}$ คือ $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(k)} = \prod_{i=1}^{k} a_i > 0, \forall k$ ซึ่งสอดคล้องกับรูปแบบของค่าเมตริกซ์ที่เป็นบวกดังที่ได้ระบุในทฤษฎีบท หาก $\boldsymbol{A}$ มีค่าลบ กล่าวคือ $a_i < 0, \forall i$ เมตริกซ์ย่อยหลักแบบเรียงของ $\boldsymbol{A}$ ที่ต่างเป็นเมตริกซ์แกนด้วย จะให้ค่าไมเนอร์หลักแบบเรียงของ $\boldsymbol{A}$ คือ $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(k)} = \prod_{i=1}^{k} a_i$ โดยที่ $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(k)} < 0$ หาก k เป็นเลขคี่ และ $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(k)} > 0$ หาก k เป็นเลขคู่ ซึ่งสอดคล้องกับรูปแบบของค่าเมตริกซ์ที่เป็นลบดังที่ได้ระบุในทฤษฎีบท □

ตัวอย่างที่ 2.38 สมมติให้ $\boldsymbol{A}$ คือ เมตริกซ์ทั่วไปที่มีขนาด 4×4 การตรวจสอบค่าของเมตริกซ์ว่าเป็นประเภทใดตามนิยามข้างต้น สามารถทำได้ตามขั้นตอน ดังนี้

1. คำนวณค่าไมเนอร์หลักแบบเรียงของ $\boldsymbol{A}$ ซึ่งมีทั้งหมด 4 ค่า ได้แก่ $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(1)}, \ldots, \widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(4)}$

   1) หาก $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(1)} > 0$, $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(2)} > 0$, $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(3)} > 0, \widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(4)} > 0$ แล้ว $\boldsymbol{A}$ จะเป็นเมตริกซ์ที่มีค่าบวก

   2) หาก $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(1)} < 0$, $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(2)} > 0$, $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(3)} < 0, \widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(4)} > 0$ แล้ว $\boldsymbol{A}$ จะเป็นเมตริกซ์ที่มีค่าลบ

   3) หาก $\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(1)}, \ldots, \widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}_{(4)}$ ไม่เป็นไปตามรูปแบบข้างต้นแล้ว $\boldsymbol{A}$ จะเป็นเมตริกซ์ที่ระบุค่าไม่ได้

2. คำนวณค่าไมเนอร์หลักของ $\boldsymbol{A}$ ซึ่งมีทั้งหมด

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 + 6 + 4 + 1 = 15 \text{ ค่า}$$

ได้แก่ $\widehat{\boldsymbol{M}}_{(1)}, \ldots, \widehat{\boldsymbol{M}}_{(15)}$

1) หาก $\widehat{\boldsymbol{M}}_{(1)} \geq 0, \widehat{\boldsymbol{M}}_{(2)} \geq 0, \ldots, \widehat{\boldsymbol{M}}_{(15)} \geq 0$ แล้ว $\boldsymbol{A}$ จะเป็นเมตริกซ์ที่มีค่ากึ่งบวก

2) หาก $\widehat{\boldsymbol{M}}_{(1)} \leq 0, \widehat{\boldsymbol{M}}_{(2)} \geq 0, \ldots, \widehat{\boldsymbol{M}}_{(15)} \leq 0$ แล้ว $\boldsymbol{A}$ จะเป็นเมตริกซ์ที่มีค่ากึ่งลบ □

2.7 อินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรส

อินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรส (Moore-Penrose inverse)[1] คือ การขยายแนวคิดการหาอินเวอร์สให้ครอบคลุมเมตริกซ์ทุกประเภท ทั้งในกรณีของเมตริกซ์จัตุรัสที่มีตัวกำหนดเท่ากับศูนย์และในกรณีที่ไม่ใช่เมตริกซ์จัตุรัส จากคุณสมบัตินี้ อินเวอร์สของมอร์และเพนโรส จึงเป็นเครื่องมือที่ใช้ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นทั่วไป ซึ่งอาจมีจำนวนสมการไม่เท่ากับตัวแปรก็ได้ ต่างจากอินเวอร์สของเมตริกซ์ ที่ใช้หาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น เฉพาะในกรณีที่จำนวนสมการเท่ากับตัวแปรเท่านั้น

อินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรส มีนิยามที่คล้ายคลึงกับนิยามของอินเวอร์สทั่วไป คือ

นิยามที่ 2.6 อินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรส สำหรับเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ขนาด $m \times n$ เมตริกซ์ $\boldsymbol{X}$ ขนาด $n \times m$ เป็นอินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรสของ $\boldsymbol{A}$ ก็ต่อเมื่อ

1. $\boldsymbol{AXA} = \boldsymbol{A}$

2. $\boldsymbol{XAX} = \boldsymbol{X}$

3. $(\boldsymbol{AX})' = \boldsymbol{AX}$

---

[1] แนวคิดเรื่องอินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรส ถูกพัฒนาโดยนักคณิตศาสตร์ชาวอเมริกัน คือ เอเลียมคิด มอร์ (Eliakim Moore, 1862-1932) และนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ คือ โรเจอร์ เพนโรส (Roger Penrose, 1931) อย่างเป็นเอกเทศกัน อีกทั้งยังมีหลักฐานปรากฏในงานของนักวิทยาศาสตร์ชาวสวีดิช คือ อาร์น บิวฮามมาร์ (Erne Bjerhammar, 1917-2011) ทั้งนี้ บทความทางคณิตศาสตร์ในภาษาอังกฤษ ยังนิยมใช้คำอื่นๆ แทนอินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรส อาทิ อินเวอร์สแฝง (pseudoinverse) และ อินเวอร์สแบบทั่วไป (generalized inverse) เป็นต้น

4. $(\boldsymbol{XA})' = \boldsymbol{XA}$ ■

ทั้งนี้ มีข้อสังเกตที่สำคัญเกี่ยวกับนิยามของอินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรสข้างต้น คือ ผลคูณของเมตริกซ์กับอินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรสของเมตริกซ์ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับเมตริกซ์เอกลักษณ์ ดังเช่นคุณสมบัติของอินเวอร์สทั่วไป อย่างไรก็ดี อินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรสยังคงมีคุณสมบัติบางข้อ ที่คล้ายกันกับอินเวอร์สทั่วไป กล่าวคือ หากให้ $\boldsymbol{A}^{-1}$ เป็นอินเวอร์สทั่วไป จะได้ว่า $\boldsymbol{AA}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ ด้วยว่า $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}$ ต่างจากอินเวอร์สของมอร์และเพนโรส ซึ่งแม้ $\boldsymbol{AXA} = \boldsymbol{A}$ แต่ใช่ว่า $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I}$ เสมอไป เป็นต้น ซึ่งในแง่นี้ อาจถือได้ว่าอินเวอร์สทั้งสองประเภท มีคุณสมบัติบางข้อที่เหมือนกัน เช่น คุณสมบัติการนำอินเวอร์ส (เมตริกซ์ตั้งต้น) ประกบคูณเข้าข้างหน้าและข้างหลังเมตริกซ์ตั้งต้น (อินเวอร์ส) ซึ่งให้ผลลัพธ์เท่ากับอินเวอร์ส (เมตริกซ์ตั้งต้น) แต่มีบางข้อที่เหลื่อมกันอยู่ โดยแม้อินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรสจะสามารถใช้ได้อย่างกว้างขวางกว่า ทั้งในกรณีที่ตัวกำหนดเป็นศูนย์ และในกรณีที่เมตริกซ์ตั้งต้นไม่ใช่เมตริกซ์จัตุรัส แต่ก็ขาดคุณสมบัติของอินเวอร์สตามแนวคิดแบบดั้งเดิม เช่น การที่อินเวอร์สคูณกับเมตริกซ์ตั้งต้น ให้ผลลัพธ์คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ เป็นต้น อนึ่ง มีข้อสำคัญที่พึงสังเกตว่า อินเวอร์สตามแนวคิดแบบดั้งเดิมนั้น มีคุณสมบัติตามนิยามของอินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรส ทั้งสี่ข้อข้างต้นเช่นกัน

อินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรสของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ นิยมใช้สัญลักษณ์ คือ $\boldsymbol{A}^{+}$ โดยสำหรับเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ใดๆ อินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรสของ $\boldsymbol{A}$ คือ $\boldsymbol{A}^{+}$ จะมีอยู่เสมอ และมีอยู่เพียงตัวเดียว ซึ่งเป็นคุณสมบัติที่น่าสนใจโดยเปรียบเทียบกับอินเวอร์สทั่วๆ ไปของเมตริกซ์ คือ $\boldsymbol{A}^{-1}$ ซึ่งอาจมีหรือไม่มีก็ได้ แม้ว่าหากเมตริกซ์มีอินเวอร์สแล้ว จะมีอินเวอร์สอยู่เพียงตัวเดียวเช่นกัน

คุณสมบัติอื่นๆ ที่สำคัญของอินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรส คือ สำหรับเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ขนาดใดๆ แล้ว

1. $\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A}^{-1}$ หากเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์ที่สามารถหาอินเวอร์สได้

2. $(\boldsymbol{A}^{+})^{+} = \boldsymbol{A}$

3. $(\boldsymbol{A}')^{+} = (\boldsymbol{A}^{+})'$

4. สำหรับเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ที่เป็นเมตริกซ์สมมาตรและเป็นเมตริกซ์นิจพล $\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A}$

5. $\boldsymbol{AA}^{+}$ และ $\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์นิจพล

6. $(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^{+} = \boldsymbol{A}^{+} \otimes \boldsymbol{B}^{+}$

คุณประโยชน์สำคัญของแนวคิดเรื่องอินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรส คือ การเป็นเครื่องมือสำคัญในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในกรณีทั่วไป ที่จำนวนสมการและตัวแปรอาจแตกต่างกันได้ เช่นเดียวกับการใช้อินเวอร์สแบบดั้งเดิม เพื่อหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในกรณีเฉพาะ ที่จำนวนสมการและตัวแปรเท่ากัน อนึ่ง แม้การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในกรณีที่จำนวนสมการและตัวแปรต่างกัน จะสามารถทำได้อย่างรวดเร็วด้วยวิธีต่างๆ กัน อาทิ การลดทอนตัวแปรแบบเกาส์ หรือแบบเกาส์และจอร์แดน ดังที่ได้พิจารณามาแล้ว แต่วิธีต่างๆ เหล่านั้นอาจดูเสมือนว่าเป็นวิธีที่มีกระบวนการหาคำตอบค่อนข้างหลากหลาย ขึ้นอยู่กับวิธีที่ผู้ที่หาคำตอบแต่ละคนจะคิดได้ จึงอาจดูเป็นกระบวนการที่ไม่เป็นระบบนัก เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการเช่นการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ หรือการใช้กฎของคราเมร์

จากคุณสมบัติข้างต้น อินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรส จึงถือเป็นแนวคิดที่ลดทอนข้อด้อยบางประการ ของวิธีการหาคำตอบของระบบสมการแบบก่อนๆ เนื่องจากการใช้อินเวอร์สของมอร์และเพนโรส เพื่อหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในกรณีทั่วไปนั้น จะให้คำตอบของระบบสมการในลักษณะที่คล้ายคลึงกับการใช้อินเวอร์สของเมตริกซ์จัตุรัส เพื่อหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ที่มีจำนวนสมการและตัวแปรเท่ากัน อนึ่ง โดยที่การหาอินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรส เป็นเรื่องซับซ้อนเกินกว่าขอบเขตของหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนจึงจะไม่ได้กล่าวถึงวิธีหาอินเวอร์สดังกล่าวในที่นี้โดยตรง แต่จะได้อธิบายแนวทางการใช้อินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรส เพื่อหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในกรณีต่างๆ และในการกำหนดเงื่อนไข ว่าระบบสมการเชิงเส้นใดๆ จะมีคำตอบหรือไม่ จากทฤษฎีบทต่างๆ ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.5 คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่มีลักษณะเดียวกัน ในรูปอินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรสคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่มีลักษณะเดียวกัน ที่อยู่ในรูป $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ คือ

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{w}$$

เมื่อ $\boldsymbol{w}$ คือเวคเตอร์ใดๆ ที่มีมิติสอดคล้องกับสมการข้างต้น[1] ■

[1] การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้สามารถทำได้โดยตรงด้วยการนำค่า $\boldsymbol{x}$ ที่แสดงอยู่ในรูปแบบข้างต้นเข้าไปแทนค่าในระบบสมการและแสดงให้เห็นว่าค่าทั้งสองฝั่งของของสมการเท่ากัน ซึ่งจากนิยามของอินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรส และคุณสมบัติการกระจายของการคูณเมตริกซ์แล้ว เมื่อนำค่า $\boldsymbol{x}$ ข้างต้นเข้าแทน จะได้ว่า $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ซึ่งเป็นจริง ทั้งนี้จากคุณสมบัติที่ว่า ระบบสมการเชิงเส้นที่มีลักษณะเดียวกัน จะมีคำตอบอย่างน้อยหนึ่งชุดเสมอ อันได้แก่ คำตอบที่ไม่เป็นสาระ คือ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ และหากระบบมีคำตอบมากกว่าหนึ่งชุด จะมีคำตอบมากมายนับไม่ถ้วนในรูปของตัวแปรอิสระ ซึ่งคือเวคเตอร์ $\boldsymbol{w}$ ตามทฤษฎีบทข้างต้น

ตัวอย่างที่ 2.39 จากระบบสมการเชิงเส้นที่มีลักษณะเดียวกัน คือ

$$x_1 + x_2 = 0$$

ซึ่งเห็นได้ชัดเจนว่าเป็นระบบที่มีคำตอบมากมายนับไม่ถ้วนที่ทุกค่า $x_1 = -x_2$ คือคำตอบของระบบ ระบบข้างต้นสามารถเขียนในรูปของ $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ ได้ โดยมี

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ และ } \boldsymbol{A}^{+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

ดังนั้น

$$\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ซึ่งเมื่อนำไปแทนค่าในคำตอบของระบบสมการนี้ตามทฤษฎีบทข้างต้น จะได้ว่า

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(w_1 - w_2) \\ \frac{1}{2}(w_2 - w_1) \end{pmatrix}$$

กล่าวคือ $x_1 = -x_2$ สำหรับทุกค่าของ $\boldsymbol{w}$ ซึ่งสอดคล้องกับคำตอบข้างต้น □

นอกจากประโยชน์ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่มีลักษณะข้างต้นแล้ว อินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรส ยังสามารถใช้ระบุเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ ของการที่ระบบสมการเชิงเส้นทั่วไปจะมีคำตอบ และคำตอบของระบบสมการได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.6 คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นทั่วไป ในรูปอินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรส เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ ที่ทำให้ระบบสมการเชิงเส้น $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ใดๆ มีคำตอบ คือ

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$$

โดยมีคำตอบของระบบ คือ

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{w}$$

เมื่อ $\boldsymbol{w}$ คือเวคเตอร์ใดๆ ที่มีมิติสอดคล้องกับสมการข้างต้น[1] ■

ตัวอย่างที่ 2.40 จากระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 \\ -x_1 &= b_2 \end{aligned}$$

ระบบสมการนี้ประกอบด้วย 2 สมการและ 1 ตัวแปร ซึ่งมีคำตอบชุดเดียวหาก $b_1 = -b_2$ คือ $x_1 = b_1$ และไม่มีคำตอบหาก $b_1 \neq -b_2$ ระบบสมการข้างต้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ โดยมีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ เวคเตอร์ฝั่งขวา และอินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรส คือ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ และ } \boldsymbol{A}^+ = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

จากเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่ระบบสมการนี้มีคำตอบ จะได้ว่า

$$\boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(b_1 - b_2) \\ \frac{1}{2}(b_2 - b_1) \end{pmatrix}$$

ซึ่งเท่ากับ $\boldsymbol{b}$ ก็ต่อเมื่อ $b_1 = -b_2$ ทั้งนี้ หากสมมติให้ระบบมีคำตอบ คำตอบของระบบจะเท่ากับ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{w} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(b_1 - b_2) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

คำตอบของระบบข้างต้นด้วยวิธีการหาอินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรส คือ x_2 ซึ่งไม่ใช่ตัวแปรแท้จริงในระบบ มีค่าเท่ากับ w_2 ซึ่งเท่ากับอะไรก็ได้ ส่วน x_1 ซึ่งเป็นคำตอบของระบบสมการ เมื่อ $b_1 = -b_2$ จะเท่ากับ $x_1 = \frac{1}{2}(b_1 - b_2)$ □

[1] การพิสูจน์ว่า $\boldsymbol{x}$ คือคำตอบของระบบสมการสามารถทำได้โดยการแทนค่าเช่นในกรณีข้างต้น สำหรับเงื่อนไขของการมีคำตอบเราสามารถพิสูจน์โดยคร่าวด้วยการแสดงให้เห็นได้ว่า สมมติให้ $\boldsymbol{x}$ คือคำตอบของระบบ ดังนั้น $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ หรือ $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{b}$ กล่าวคือ $\boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$ ซึ่งเป็นเงื่อนไขในทฤษฎีบท

ตัวอย่างที่ 2.41 จากระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= b_1 \\ x_1 + x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

ระบบสมการนี้จะมีไม่มีคำตอบหาก $b_1 \neq b_2$ แต่จะมีคำตอบมากมายนับไม่ถ้วนหาก $b_1 = b_2$ โดยทุกค่าที่ $x_1 = b_1 - x_2$ ต่างเป็นคำตอบของระบบ ระบบสมการข้างต้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ โดยมีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ เวคเตอร์ฝั่งขวา และอินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรส คือ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ และ } \boldsymbol{A}^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

จากเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการมีคำตอบของระบบนี้ตามทฤษฎีบท จะได้ว่า

$$\boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \\ \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \end{pmatrix}$$

ซึ่งเท่ากับ $\boldsymbol{b}$ ก็ต่อเมื่อ $b_1 = b_2 \equiv b$ หากให้ระบบมีคำตอบ คำตอบของระบบจะเท่ากับ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{w} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(w_1 - w_2) \\ \frac{1}{2}(w_2 - w_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ซึ่งสอดคล้องกับคำตอบข้างต้น สำหรับทุกค่าที่เป็นไปได้ของ $\boldsymbol{w}$ $\square$

2.8 การประยุกต์ในเศรษฐศาสตร์

การประยุกต์แนวคิดทางพีชคณิตของเมตริกซ์ในทางเศรษฐศาสตร์นั้น มีมากจนไม่อาจกล่าวถึงได้ครบในที่นี้ ด้วยว่าแนวคิดในทางเศรษฐศาสตร์ระดับสูงในปัจจุบัน ล้วนถูกอธิบายและสื่อออกมาในรูปของเมตริกซ์ทั้งนั้น ตัวอย่างการประยุกต์ในเศรษฐศาสตร์ดังที่จะได้พิจารณาต่อไปนี้ จึงเป็น

เพียงการคัดเลือกเฉพาะบางเรื่องที่สำคัญ และเป็นพื้นฐานที่จำเป็นในการศึกษาวิชาเศรษฐศาสตร์ในระดับกลาง

2.8.1 เมตริกซ์ของปัจจัยการผลิตและผลผลิต

เมตริกซ์ของปัจจัยการผลิตและผลผลิต (input-output matrix) [1] คือ เมตริกซ์ที่อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างผลผลิตและปัจจัยการผลิต ว่า ในการผลิตสินค้าประเภทหนึ่ง จำเป็นต้องใช้ปัจจัยการผลิตในรูปสินค้าอื่นๆ อย่างไรบ้าง การสร้างเมตริกซ์ของปัจจัยการผลิตและผลผลิต ตั้งอยู่บนแนวคิดที่ว่า สำหรับสินค้าทุกประเภทนั้น ที่ระดับดุลยภาพ อุปทานจะต้องเท่ากับอุปสงค์ของสินค้า โดยอุปสงค์ของสินค้า สามารถแยกย่อยได้เป็นอุปสงค์เพื่อการบริโภคโดยผู้บริโภค และอุปสงค์เพื่อการผลิตโดยผู้ผลิตซึ่งนับเป็นปัจจัยการผลิตสินค้าชนิดนั้น แนวคิดเรื่องเมตริกซ์ของปัจจัยการผลิตเป็นพื้นฐานของเครื่องมือทางเศรษฐศาสตร์ที่สำคัญยิ่งเรื่องหนึ่ง คือ **ตัวแบบคำนวณดุลยภาพทั่วไป (computable general equilibrium model)** ซึ่งช่วยให้นักเศรษฐศาสตร์สามารถพยากรณ์ผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงของปัจจัยต่างๆ ต่อตัวแปรที่สำคัญในระบบเศรษฐกิจได้

สำหรับระบบเศรษฐกิจอย่างง่ายที่มีสินค้าสามประเภท เมื่อ x_1, x_2 และ x_3 และ d_1, d_2 และ d_3 แทนอุปทานรวม และอุปสงค์เพื่อการบริโภคสินค้าประเภทที่หนึ่ง สอง และสามตามลำดับ หากสมมติให้การผลิตสินค้าประเภทที่หนึ่งจำนวน 1 หน่วย จำเป็นต้องใช้สินค้าประเภทที่สามจำนวน a หน่วย การผลิตสินค้าประเภทที่สองจำนวน 1 หน่วย จำเป็นต้องใช้สินค้าประเภทที่หนึ่งจำนวน b หน่วย และการผลิตสินค้าประเภทที่สามจำนวน 1 หน่วย จำเป็นต้องใช้สินค้าประเภทที่สองจำนวน c หน่วย จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างผลผลิตและปัจจัยการผลิตในรูปสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{aligned} x_1 &= bx_2 + d_1 \\ x_2 &= cx_3 + d_2 \\ x_3 &= ax_1 + d_3 \end{aligned}$$

กล่าวคือ ความต้องการสินค้าประเภทที่หนึ่ง มีทั้งสิ้น x_1 หน่วย จำแนกเป็น bx_2 เพื่อใช้ในการผลิต

[1] แนวคิดเกี่ยวกับเมตริกซ์ของปัจจัยการผลิตและผลผลิต ถูกเสนอโดย วาสซิลี ลีอองทีฟ (Wassily Leontief, 1905-1999) นักเศรษฐศาสตร์ชาวรัสเซีย ผู้ได้รับรางวัลโนเบลในสาขาเศรษฐศาสตร์ในปี 1973 โดยเป็นแนวคิดที่ถูกพัฒนาต่อยอดมาจากวิทยานิพนธ์ในระดับปริญญาเอก ซึ่งมีชื่อว่า The economy as a circular flow ของลีอองทีฟเอง เมตริกซ์ของปัจจัยการผลิตและผลผลิต เป็นเครื่องมือทางเศรษฐศาสตร์มหภาคที่สำคัญ ซึ่งยังนิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน เพื่ออธิบายโครงสร้างการผลิตสินค้าและบริการของประเทศ และจัดทำบัญชีรายได้ประชาชาติ (national income accounting)

x_2 และ d_1 เพื่อใช้ในการบริโภค เป็นต้น คำตอบของระบบสมการนี้ สามารถหาได้ด้วยวิธีการใดวิธีการหนึ่งดังที่ได้กล่าวมาแล้ว เช่น หากใช้วิธีการนำเอาค่าของ x_2 ไปแทนค่าในสมการแรก จะได้

$$x_1 = bcx_3 + bd_2 + d_1$$

จากนั้นเมื่อนำไปแทนค่าในสมการสุดท้าย จะได้

$$x_3 = \frac{(ab)d_2 + (a)d_1 + d_3}{1 - abc}$$

และเมื่อนำคำตอบไปแทนในสมการที่เหลือ จะได้คำตอบทั้งหมดของระบบสมการ คือ

$$x_2 = \frac{(ca)d_1 + (c)d_3 + d_2}{1 - abc}; x_1 = \frac{(bc)d_3 + (b)d_2 + d_1}{1 - abc}$$

แนวคิดข้างต้นสามารถขยายไปสู่ระบบเศรษฐกิจทั่วไป ที่มีจำนวนสินค้าและบริการทั้งสิ้น n ชนิด กล่าวคือ หากให้ a_{ij} คือปริมาณของสินค้าชนิด i ที่ต้องใช้ในการผลิตสินค้าชนิด j ให้ได้ 1 หน่วย อุปทานของสินค้าชนิด i จะเท่ากับ

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + d_i$$

กล่าวคือ อุปทานรวมของสินค้า i จะต้องเท่ากับปริมาณสินค้า i ที่ใช้ในการผลิตสินค้าประเภทที่ 1 ซึ่งเท่ากับ $a_{i1}x_1$ รวมกับปริมาณสินค้า i ที่ใช้ในการผลิตสินค้าประเภทที่ 2 ซึ่งเท่ากับ $a_{i2}x_2$ ดังนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งปริมาณสินค้า i ที่ใช้ในการผลิตสินค้าประเภทสุดท้าย คือสินค้าประเภทที่ n ซึ่งเท่ากับ $a_{in}x_n$ รวมกับปริมาณของสินค้า i เพื่อการบริโภค คือ d_i ดังนี้ จึงได้ความสัมพันธ์ลักษณะข้างต้นสำหรับสินค้าทุกประเภท ในรูประบบสมการเชิงเส้นที่แต่ละสมการ แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตัวหนึ่ง กับทุกตัวแปรในระบบ กล่าวคือ

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + d_1 \\
x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + d_2 \\
&\vdots \\
x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + d_n
\end{aligned}$$

ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูป

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}$$

เมื่อ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{nn} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

ระบบสมการนี้สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$$

ซึ่งสามารถหาคำตอบ คืออุปทานของสินค้าทั้งระบบเศรษฐกิจได้ ภายใต้เงื่อนไขสองประการ คือ การมีข้อมูลเกี่ยวกับอุปสงค์ของตลาด คือ $\boldsymbol{d}$ และการที่ $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ มีอินเวอร์ส อนึ่ง คุณลักษณะที่สำคัญประการหนึ่ง ของคำตอบของระบบสมการข้างต้น คือ $\boldsymbol{x} \gg \boldsymbol{0}$ กล่าวคือ ปริมาณดุลยภาพของสินค้าทั้งหมด ควรมีค่าเป็นบวก[1]

2.8.2 พีชคณิตของเมตริกซ์และสถิติ

ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นและสถิติ เป็นพื้นฐานสำหรับศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับ**ความไม่แน่นอน (uncertainty)** เช่น การวิเคราะห์และบริหารความเสี่ยง การจัดกลุ่มสินทรัพย์เพื่อการลงทุน และการศึกษาในเชิงประจักษ์ต่างๆ เช่น วิชาเศรษฐมิติ โดยต่อไปนี้จะเป็นการเปรียบเทียบแนวคิดต่างๆ เกี่ยวกับความน่าจะเป็นและสถิติ ระหว่างการวิเคราะห์ข้อมูลแบบตัวแปรเดียว (univariate analysis) และ การวิเคราะห์พหุตัวแปร (multivariate analysis) เพื่อแสดงถึงความสำคัญของการใช้พีชคณิตเมตริกซ์ว่า สามารถอธิบายแนวคิดทางสถิติที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรจำนวนมาก ให้กระชับขึ้นได้อย่างไร ดังนี้

ค่าที่คาดหวัง ความแปรปรวน และความแปรปรวนร่วมของเวคเตอร์สุ่ม

ค่าที่คาดหวัง (expectation) ของ**ตัวแปรสุ่ม (random variable)** X แทนด้วยสัญลักษณ์

[1] ผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับเงื่อนไขดังกล่าวได้จาก Simon and Blume (1994)

$\mathsf{E}(X)$ โดยในกรณีที่ X เป็น**ตัวแปรสุ่มที่ไม่ต่อเนื่อง (discrete random variable)**

$$\mathsf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_X(x_i)$$

เมื่อ X มีค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ $x_1, \ldots, x_n$ และ $f_X(x_i)$ คือ **ฟังก์ชั่นมวลของความน่าจะเป็น (probability mass function)** ของ X ที่ค่า x_i ซึ่งให้ค่าความน่าจะเป็นที่ $X = x_i$ ทั้งนี้ เซตของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ X อาจเป็นได้ทั้งเซตที่มีสมาชิกจำกัด และเซตที่มีสมาชิกไม่จำกัด

ในกรณีที่ X เป็น**ตัวแปรสุ่มที่ต่อเนื่อง (continuous random variable)**

$$\mathsf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

เมื่อ $f_X(x_i)$ คือ **ฟังก์ชั่นมวลของความหนาแน่น (probability density function)** ของ X ที่ค่า $\int_a^b f_X(x)dx$ ให้ค่าความน่าจะเป็นที่ $X \in [a, b]$ ค่าที่คาดหวังเป็นค่ากลางที่นิยมใช้อย่างแพร่หลายในทางสถิติ ควบคู่ไปกับค่ากลางอื่นๆ เช่น ค่ามัธยฐาน และฐานนิยม ทั้งนี้ หากให้ $g(x)$ คือฟังก์ชั่นของ X จะได้ว่า $\mathsf{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) f_X(x_i)$ หรือ $\mathsf{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$ แล้วแต่กรณี

ความแปรปรวน (variance) ของตัวแปรสุ่ม X มีสัญลักษณ์แทนว่า $\mathsf{var}(X)$ คือ เครื่องมือที่ใช้วัดการกระจายค่าของตัวแปรสุ่ม ว่ามีการกระจายมากน้อยเพียงใด โดยมีนิยามคือ

$$\mathsf{var}(X) = \mathsf{E}\big((X - \mathsf{E}(X))^2\big) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2$$

โดย $\mathsf{E}(X)$ คือค่าความคาดหวังของตัวแปรสุ่ม X ทั้งนี้ โดยที่ความแปรปรวน คือ ค่าความคาดหวังของจำนวนซึ่งมีค่าบวกเสมอ ความแปรปรวนจึงมีคุณสมบัติสำคัญ คือ จะมีค่าเป็นลบไม่ได้ และมีค่าเท่ากับศูนย์ในกรณีที่ตัวแปรไม่มีการกระจายใดๆ

ความแปรปรวนร่วม (covariance) ของตัวแปรสุ่ม X_1 และ X_2 เป็นเครื่องมือหนึ่งที่ใช้วัดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสุ่มสองตัว คือ X_1 และ X_2 ว่าเป็นไปในทิศทางเดียวกัน หรือตรงข้ามกัน อีกทั้งยังสามารถใช้วัดระดับความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร ว่ามีความสัมพันธ์ใกล้ชิดกัน หรือ

ห่างกัน นิยามของความแปรปรวนร่วมของตัวแปรสุ่ม X_1 และ X_2 คือ

$$\mathsf{cov}(X_1, X_2) = \mathsf{E}((X_1 - \mathsf{E}(X_1)(X_2 - \mathsf{E}(X_2)) = \mathsf{E}(X_1 X_2) - \mathsf{E}(X_1)\mathsf{E}(X_2)$$

ทั้งนี้ ในกรณีที่ $X_1 = X_2 \equiv X$ นิยามของความแปรปรวนร่วมข้างต้น จะถูกลดรูปลงเท่ากับนิยามของความแปรปรวน

แนวคิดข้างต้นสามารถขยายความไปสู่แนวคิดที่คู่ขนานกัน ในรูปของ**เวคเตอร์สุ่ม (random vector)** ได้ คือ สำหรับเวคเตอร์คอลัมน์ของตัวแปรสุ่ม $\boldsymbol{X} = (X_1 \ \ldots \ X_n)'$ ขนาด $n \times 1$ โดยที่

$$\mathsf{E}(\boldsymbol{X}) = (\mathsf{E}(X_1) \ \ldots \ \mathsf{E}(X_n))'$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\mathsf{cov}(\boldsymbol{X}) &= \mathsf{E}((\boldsymbol{X} - \mathsf{E}(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X} - \mathsf{E}(\boldsymbol{X})') \\
&= \mathsf{E}\left(\begin{pmatrix} X_1 - \mathsf{E}(X_1) \\ \vdots \\ X_n - \mathsf{E}(X_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 - \mathsf{E}(X_1) & \ldots & X_n - \mathsf{E}(X_n) \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \mathsf{var}(X_1) & \mathsf{cov}(X_1, X_2) & \ldots & \mathsf{cov}(X_1, X_n) \\ \mathsf{cov}(X_2, X_1) & \mathsf{var}(X_2) & \ldots & \mathsf{cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{cov}(X_n, X_1) & \mathsf{cov}(X_n, X_2) & \ldots & \mathsf{var}(X_n) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

เมตริกซ์ข้างต้นมีชื่อเรียกว่า **เมตริกซ์ของความแปรปรวนร่วม (variance-covariance matrix)** ขนาด $n \times n$ ซึ่งค่าบนแกนของเมตริกซ์ คือ ความแปรปรวนของ $X_1, \ldots, X_n$ และค่าบนแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของเมตริกซ์ คือ ค่าแปรปรวนร่วมระหว่าง X_i และ X_j ทั้งนี้ จากคุณสมบัติของความแปรปรวนที่ว่า ความแปรปรวนจะมีค่าเป็นบวกเสมอ และจากคุณสมบัติของความแปรปรวนร่วม ที่ว่า $\mathsf{cov}(X_i, X_j) = \mathsf{cov}(X_j, X_i)$ ดังนี้ $\mathsf{cov}(\boldsymbol{X})$ จึงเป็นเมตริกซ์สมมาตรกัน ที่ค่าบนแกนของเมตริกซ์จะเป็นบวกเสมอ

การกระจายแบบปกติ

การกระจายแบบปกติ (normal distribution) เป็นการกระจายทางสถิติที่สำคัญที่สุดรูป

แบบหนึ่ง โดยหาก X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าต่อเนื่อง ที่มีการกระจายแบบปกติ มีค่าที่คาดหวัง คือ μ โดยที่ $-\infty < \mu < \infty$ และความแปรปรวน คือ $\sigma^2 > 0$ แล้ว[1] ฟังก์ชั่นความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของ X จะเท่ากับ

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\text{exp}\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$$

ในกรณีการกระจายแบบปกติของตัวแปรสองตัว คือ $X_1 \sim (\mu_1, \sigma_1^2)$ และ $X_2 \sim (\mu_2, \sigma_2^2)$ หากตัวแปรทั้งสองตัวมี**ความเป็นอิสระจากกัน (independence)** ฟังก์ชั่นความหนาแน่นร่วมของความน่าจะเป็นของตัวแปรทั้งสองตัว จะเท่ากับผลคูณของฟังก์ชั่นความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของตัวแปรแต่ละตัว กล่าวคือ[2]

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$$

อย่างไรก็ตาม หาก X_1 และ X_2 มีความเกี่ยวข้องกัน โดยมี**ค่าสหสัมพันธ์ (correlation)** เท่ากับ $-1 \leq \rho \leq 1$ ฟังก์ชั่นความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของ X_1 และ X_2 จะอยู่ในรูป

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\text{exp}\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2^2\right)\right\}$$

เมื่อ $z_i = \frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}, i = 1,2$ ซึ่งเห็นได้ว่าหาก $\rho = 0$ คือ X_1 และ X_2 ไม่มีความเกี่ยวข้องกัน ฟังก์ชั่นความหนาแน่นร่วมของความน่าจะเป็นของ X_1 และ X_2 จะเท่ากับ $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$

ตัวอย่างข้างต้นชี้ให้เห็นว่า ฟังก์ชั่นความหนาแน่นของความน่าจะเป็น ของตัวแปร n ตัว คือ $X_1, \ldots, X_n$ เมื่อตัวแปรไม่ได้มีความเป็นอิสระจากกันนั้น ย่อมมีความซับซ้อนขึ้นเรื่อยๆ เนื่องจาก

---

[1] ในทางสถิติ นิยมใช้สัญลักษณ์ $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ แทนตัวแปรสุ่ม X ซึ่งมีการกระจายแบบปกติซึ่งมีค่าที่คาดหวัง คือ μ และ ความแปรปรวน คือ $\sigma^2 > 0$

[2] ผลลัพธ์ที่ได้ในกรณีตัวแปรสุ่มสองตัวแปรในที่นี้ สามารถขยายให้ครอบคลุมกรณีตัวแปรสุ่ม n ตัวแปรได้ในลักษณะเดียวกัน กล่าวคือ หาก $X_1, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีความเป็นอิสระจากกันแล้ว โดยที่ฟังก์ชั่นความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X_i คือ $f_{X_i}(x_i)$ จะได้ว่า

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

ทั้งนี้ ผลลัพธ์ข้างต้นจะเป็นจริงเสมอ ไม่ว่าตัวแปรสุ่มแต่ละตัวมีการกระจายแบบปกติหรือไม่ก็ตาม

ต้องมีการระบุค่าที่คาดหวังของตัวแปรแต่ละตัว ตลอดจนค่าสหสัมพันธ์ระหว่าง X_i และ X_j สำหรับ $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ดังนี้ การเขียนฟังก์ชั่นความหนาแน่นของความน่าจะเป็น ระหว่างของตัวแปร $X_1, \ldots, X_n$ ในกรณีทั่วไป จึงมีความซับซ้อนและยืดเยื้อขึ้น ตามจำนวนตัวแปรสุ่มที่พิจารณา อย่างไรก็ตาม ฟังก์ชั่นความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของตัวแปรจำนวน n ตัว คือ $X_1, \ldots, X_n$ ที่มีการกระจายแบบปกติ กลับสามารถทำได้ง่ายและกระชับในรูปของเมตริกซ์ กล่าวคือ หากให้ $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n) \sim \mathscr{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ มีการกระจายแบบปกติ จะสามารถเขียนฟังก์ชั่นความหนาแน่นร่วมได้ ในรูป

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

โดยที่

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1 \ \ldots \ \mu_n)', \boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})')$$

เมื่อ $\boldsymbol{\mu}$ คือ เวคเตอร์ของค่าที่คาดหวังของตัวแปรแต่ละตัว และ $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{cov}(\boldsymbol{X})$ คือ เมตริกซ์ของความแปรปรวน และความแปรปรวนร่วม ตามที่ได้พิจารณาแล้วข้างต้น องค์ประกอบของฟังก์ชั่น $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ คือ $\boldsymbol{\Sigma}$, $\det(\boldsymbol{\Sigma})$ และ $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ เมื่อเปรียบเทียบกันในกรณีที่ $n = 1, 2$ และเมื่อตัวแปรทุกตัวเป็นอิสระจากกัน สามารถพิจารณาได้จากตารางที่ 2.2

ตัวอย่างที่ 2.43 จากตารางที่ 2.2 หากให้ $n = 2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) \\
&= \tfrac{1}{(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \begin{pmatrix} x_1-\mu_1 & x_2-\mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{1-\rho^2}\left(\left(\tfrac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\tfrac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\tfrac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\tfrac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right) \\
&= \tfrac{1}{1-\rho^2}\left(z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2^2\right)
\end{aligned}$$

จาก $\boldsymbol{\Sigma}$, $\det(\boldsymbol{\Sigma})$ และ $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ ตามแถวที่สองในตารางที่ 2.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\} \\
&= \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1-\rho^2)}\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2^2\right)\right\}
\end{aligned}$$

เมื่อ $z_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}, i = 1, 2$ ซึ่งเท่ากับ $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ ข้างต้น $\square$

ตัวอย่างที่ 2.44 ฟังก์ชั่นความหนาแน่นร่วมของความน่าจะเป็นของตัวแปร n ตัว ที่มีการกระจายแบบปกติ และเป็นอิสระระหว่างกัน จะเท่ากับผลคูณของฟังก์ชั่นความหนาแน่นของความน่าจะเป็นแต่ละตัว กล่าวคือ

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\prod_{i=1}^{n} \sigma_i} \mathsf{exp}\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2\right\}$$

จาก $\mathbf{\Sigma}$, $\mathsf{det}(\mathbf{\Sigma})$ และ $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ ตามแถวสุดท้ายในตารางที่ 2.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathsf{det}(\mathbf{\Sigma})^{-\frac{1}{2}} \mathsf{exp}\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\prod_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)^{-\frac{1}{2}} \mathsf{exp}\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})'\mathsf{diag}(\sigma_1^{-2}, \ldots, \sigma_n^{-2})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right\} \\ &= \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\prod_{i=1}^{n} \sigma_i} \mathsf{exp}\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

ซึ่งเท่ากับ $f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$ ข้างต้น $\square$

2.8.3 ตัวแบบทางเศรษฐมิติ

เศรษฐมิติ (econometrics) เป็นเครื่องมือสำหรับการวิจัยในเชิงประจักษ์ เพื่อการทดสอบทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์ การประมาณค่าพารามิเตอร์ของ**ตัวแบบทางเศรษฐศาสตร์ (economic model)** เพื่อการตัดสินใจและกำหนดนโยบาย ตลอดจน**การพยากรณ์ (forecast)** โดยทั่วไปแล้ว ตัวแบบทางเศรษฐมิติมักนิยมใช้**สมการถดถอยเชิงเส้น (linear regression equation)** ซึ่งมี y คือ **ตัวแปรตาม (dependent variable)** และ $x_1, \ldots, x_k$ คือ **ตัวแปรอิสระ (independent variable)** หรือ **ตัวแปรอธิบาย (explanatory variable)** จำนวน k ตัว โดยมีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามและตัวแปรอิสระ ในรูป

$$y = \beta_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k + \epsilon$$

เมื่อ $\beta_i, i = 2, \ldots, k$ คือ ค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบ ที่วัดค่าที่คาดหวังของตัวแปร x_i ต่อตัวแปร

n	$\boldsymbol{\Sigma}$	$\det(\Sigma)$	$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$
1	(σ_1^2)	σ_1^2	σ_1^{-2}
2	$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$	$(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2$	$\frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$
$n\vert\rho_{ij}=0$	$\mathsf{diag}(\sigma_1^2,\ldots,\sigma_n^2)$	$\prod_{i=1}^n \sigma_i^2$	$\mathsf{diag}(\sigma_1^{-2},\ldots,\sigma_n^{-2})$

ตารางที่ 2.2 เมตริกซ์ของความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม ตัวกำหนดและอินเวอร์ส เมื่อ $n = 1, 2$ และสำหรับกรณีทั่วไป เมื่อตัวแปรทุกตัวเป็นอิสระระหว่างกัน

y เมื่อได้ควบคุมผลกระทบของตัวแปร $x_j, j \neq i$ ให้คงที่ β_1 คือ**จุดตัดแกน (intercept)** ที่วัดค่าที่คาดหวังของตัวแปร y เมื่อตัวแปรอื่นๆ มีค่าเท่ากับศูนย์ และ ϵ คือ **ค่าความผิดพลาด (error term)** [1]จากตัวแบบข้างต้น หากให้ข้อมูลเกี่ยวกับตัวแปรตามและตัวแปรอธิบายในตัวแบบที่สามารถจัดเก็บได้ มีทั้งสิ้น n ตัว จะสามารถเขียน ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามและตัวแปรอธิบายของข้อมูลแต่ละหน่วย ในรูปสมการเชิงเส้นได้ คือ

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_1 + \beta_2 x_{21} + \ldots + \beta_k x_{k1} + \epsilon_1 \\ y_2 &= \beta_1 + \beta_2 x_{22} + \ldots + \beta_k x_{k2} + \epsilon_2 \\ &\vdots \\ y_n &= \beta_1 + \beta_2 x_{2n} + \ldots + \beta_k x_{kn} + \epsilon_n \end{aligned}$$

เมื่อ y_i คือ ข้อมูลเกี่ยวกับ y ที่สังเกตได้จากข้อมูลหน่วยที่ i x_{ji} คือ ข้อมูลเกี่ยวกับ x_j ที่สังเกตได้จากข้อมูลหน่วยที่ i และ ϵ_i คือ ค่าความผิดพลาด ของความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามและตัวแปรอธิบายที่เกิดขึ้นจากข้อมูลหน่วยที่ i เป็นต้น ระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ คือ

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

เมื่อ $\boldsymbol{y}_{n\times 1}$ คือ เวคเตอร์คอลัมน์ของข้อมูลเกี่ยวกับตัวแปรตาม $\boldsymbol{X}_{n\times k}$ คือ เมตริกซ์ของข้อมูลเกี่ยวกับตัวแปรอธิบาย[2] $\boldsymbol{\beta}_{k\times 1}$ คือ เวคเตอร์คอลัมน์ของพารามิเตอร์ของตัวแบบ และ $\boldsymbol{\epsilon}_{n\times 1}$ คือ เวคเตอร์คอลัมน์ของค่าความผิดพลาดของตัวแบบ จากตัวแบบข้างต้น เวคเตอร์ของ**ตัวประมาณการ (estimator)** ของ $\boldsymbol{\beta}$ ด้วย**วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (least squares estimation)** คือ $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ที่มีคุณสมบัติ คือ

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{\mathrm{argmin}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$$

เมื่อ

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{y}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

[1]ค่าความผิดพลาดในตัวแบบทางเศรษฐมิติ สะท้อนข้อเท็จจริงที่ว่า ความสัมพันธ์ระหว่าง y และ x ในทฤษฎีทางสังคมศาสตร์นั้น ไม่อาจสมบูรณ์แบบได้ กล่าวคือ ไม่มีตัวแบบใดที่สามารถทำนายค่าของตัวแปร y ได้อย่างไม่มีข้อผิดพลาด

[2]ทั้งนี้ จากรูปแบบของระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น ทุกค่าในคอลัมน์แรกของ $\boldsymbol{X}$ จะเท่ากับ 1 เสมอ

ซึ่งมีเงื่อนไขที่จำเป็น ในรูปของระบบ**สมการปกติ (normal equations)** คือ

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} = -2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$$

ดังนี้ จึงได้ตัวประมาณการจากวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ซึ่งเท่ากับ

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

กรณีข้างต้นเป็นตัวแบบทางเศรษฐมิติสำหรับ**ข้อมูลแบบภาคตัดขวาง (cross-sectional data)** ซึ่งเป็นข้อมูลที่ถูกจัดเก็บจากหน่วยข้อมูล $i = 1, \ldots, n$ ในช่วงระยะเวลาเดียวกัน ในกรณีตัวแบบจาก**ข้อมูลแบบจัดเก็บซ้ำ (panel data)** ซึ่งถูกจัดเก็บจากแต่ละหน่วยข้อมูลเดิม คือ $i = 1, \ldots, n$ ซ้ำกันในหลายช่วงเวลา คือ $t = 1, \ldots, T$ ผู้วิจัยอาจนำข้อมูลทั้งหมดมารวมกัน เพื่อสร้างตัวแบบและประมาณค่าพารามิเตอร์ดังตัวแบบที่ใช้ข้อมูลแบบภาคตัดขวางข้างต้นก็ได้ หรือในอีกทางหนึ่ง อาจสร้างตัวแบบสำหรับข้อมูลแบบจัดเก็บซ้ำเป็นการเฉพาะ และประมาณค่าพารามิเตอร์ที่อาจมีค่าแตกต่างกันในแต่ละช่วงเวลาก็ได้ โดยสำหรับวิธีที่สอง ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามและตัวแปรอธิบาย จะอยู่ในรูประบบสมการเชิงเส้น สำหรับแต่ละช่วงเวลา[1] กล่าวคือ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1 &= \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_1 \\
\boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\epsilon}_2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{y}_T &= \boldsymbol{X}_T\boldsymbol{\beta}_T + \boldsymbol{\epsilon}_T
\end{aligned}$$

ซึ่งสามารถแสดงในรูปการคูณของ**เมตริกซ์แบ่งส่วน (partitioned matrix)** คือ

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{X}_2 & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \boldsymbol{X}_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_1 \\ \boldsymbol{\epsilon}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\epsilon}_T \end{pmatrix}$$

[1] ผู้สนใจสามารถศึกษาวิธีการประมาณการพารามิเตอร์ของตัวแบบที่ใช้ข้อมูลแบบเก็บซ้ำได้ จากหนังสือเศรษฐมิติ เช่น Greene (2018) หรือ Wooldridge (2010)

ซึ่งอยู่ในรูป

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}$$

เมื่อ $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}$ คือ เมตริกซ์ตามระบบสมการของเมตริกซ์ข้างต้น อนึ่ง ในกรณีเฉพาะที่ตัวแปรอธิบายมีค่าคงเดิมในทุกช่วงเวลา กล่าวคือ $\boldsymbol{X}_t \equiv \bar{\boldsymbol{X}}$ โดยที่ $\bar{\boldsymbol{X}}$ มีขนาด $n \times k$ จะได้ว่า

$$\boldsymbol{Y} = (\bar{\boldsymbol{X}} \otimes \boldsymbol{I})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}$$

เมื่อ $\boldsymbol{I}$ คือเมตริกซ์อัตลักษณ์ขนาด $T \times T$

2.8.4 กฎของคราเมร์กับการประยุกต์ทางเศรษฐศาสตร์

กฎของคราเมร์ เป็นเครื่องมือที่นิยมใช้เพื่อหาคำตอบ เช่น ดุลยภาพทางเศรษฐศาสตร์ เนื่องด้วย สามารถใช้หาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้อย่างมีประสิทธิภาพและรวดเร็ว อีกทั้งยังสามารถใช้หาคำตอบของตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งได้เป็นการเฉพาะ โดยไม่จำเป็นต้องหาคำตอบของทุกตัวแปรในระบบสมการ เช่น จากตัวแบบในเศรษฐศาสตร์จุลภาพ หากให้ราคาของสินค้าในสองตลาด มีความสัมพันธ์ซึ่งสามารถอธิบายได้ในรูปของระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{aligned} ap_1 - bp_2 &= c \\ -dp_1 + ep_2 &= f \end{aligned}$$

เมื่อ p_1 และ p_2 คือราคาสินค้าประเภทที่หนึ่งและสองตามลำดับ และค่าสัมประสิทธิ์ทุกค่า คือ $a, \ldots, f$ มีค่าเป็นบวก ซึ่งสามารถแสดงในรูปเมตริกซ์ คือ

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ -d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

ทั้งนี้ หากผู้วิจัยต้องการทราบราคาที่ดุลยภาพของสินค้าประเภทที่หนึ่งเท่านั้น จากกฎของคราเมร์ p_1 จะได้ว่า

$$p_1 = \frac{\begin{vmatrix} c & -b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ -d & e \end{vmatrix}} = \frac{ce + bf}{ae - bd}$$

อนึ่ง กฎของคราเมร์ยังเป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพในการการวิเคราะห์เชิงสถิตเปรียบเทียบ (comparative static analysis) การเปลี่ยนแปลงของตัวแปรที่ดุลยภาพได้ แม้ในกรณีที่รูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร ไม่ได้ถูกกำหนดแต่ต้น (a priori) ให้เป็นความสัมพันธ์เชิงเส้น อาทิ จากตัวแบบตลาดผลผลิตและตลาดเงิน (IS-LM model) ในทางเศรษฐศาสตร์มหภาค หากให้ดุลยภาพในตลาดผลผลิต เป็นไปตามความสัมพันธ์

$$y = e_0 + e(y, r, t_0)$$

เมื่อ y คือรายได้ประชาชาติ e_0 คือ ค่าใช้จ่ายคงที่ในระบบเศรษฐกิจ (autonomous expenditure) โดยที่

$$e(y, r, t_0) = c(y - t_0) + i(r) + x(y)$$

เมื่อ $c(y-t_0)$ คือฟังก์ชั่นการบริโภคภาคเอกชน ซึ่งขึ้นอยู่กับรายได้หลังหักภาษี $y-t_0$ และ $i(r)$ คือ การลงทุนภาคเอกชน ซึ่งขึ้นกับอัตราดอกเบี้ย และ $x(y)$ คือ การส่งออกสุทธิ และให้ดุลยภาพในตลาดเงิน เป็นไปตามความสัมพันธ์

$$\frac{M_0}{P} = l(y, r)$$

เมื่อ M_0 คือ อุปทานของเงิน P คือระดับราคา ซึ่งให้ผลต่างของอนุพันธ์ร่วม (total differentiation) ในตลาดผลผลิต และตลาดเงิน คือ

$$\begin{aligned} dy &= de_0 + (c_y + x_y)dy + i_r dr - c_y dt_0 \\ d\,(M_0/P) &= l_y dy + l_r dr \end{aligned}$$

จากระบบสมการข้างต้น เมื่อได้พิจารณาจำแนกการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรออกเป็นสองกลุ่ม คือ การเปลี่ยนแปลงของกลุ่มตัวแปรที่ค่าถูกกำหนดภายในระบบ (endogenous variable) อันได้แก่รายได้ y และอัตราดอกเบี้ย r และการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอื่นๆ ซึ่งเป็นกลุ่มตัวแปรที่ค่าถูกกำหนดภายนอกระบบ (exogenous variable) จากนั้นจึงแสดงความสัมพันธ์ทั้งหมดในรูปเมตริกซ์ $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ เมื่อ $\boldsymbol{x}'$ คือ $(dy\ dr)$ จะได้ $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\begin{pmatrix} 1 - c_y - x_y & -i_r \\ l_y & l_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} de_0 - c_y dt_0 \\ d(M_0/P) \end{pmatrix}$$

จากกฎของคราเมร์ จะได้ว่า

$$dy^* = \frac{l_r}{(1-c_y-x_y)l_r + l_y i_r}(de_0 - c_y dt_0) + \frac{i_r}{(1-c_y-x_y)l_r + l_y i_r} d(M_0/P)$$
$$dr^* = \frac{-l_y}{(1-c_y-x_y)l_r + l_y i_r}(de_0 - c_y dt_0) + \frac{1-c_y-x_y}{(1-c_y-x_y)l_r + l_y i_r} d(M_0/P)$$

ตัวอย่างเกี่ยวกับการประยุกต์ใช้กฎของคราเมร์ ที่น่าสนใจในทางเศรษฐศาสตร์อีกตัวอย่างหนึ่ง คือ การหาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดของฟังก์ชั่นที่อยู่ในรูปกำลังสอง เช่น หากให้ผู้ผลิตรายหนึ่งในตลาดแข่งขันแบบสมบูรณ์ ผลิตสินค้าสองชนิด คือ x_1 และ x_2 เพื่อขายในตลาดให้ได้กำไรสูงสุด โดยมีราคาต่อหน่วยที่สามารถขายได้เท่ากับ p_1 และ p_2 ตามลำดับ ต้นทุนในการผลิตสินค้าทั้งสองประเภท เท่ากับ

$$c(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + d$$

จากข้อมูลข้างต้น ฟังก์ชั่นกำไรจะเท่ากับ

$$\Pi(x_1, x_2) = p_1x_1 + p_2x_2 - (ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + d)$$

เงื่อนไขที่จำเป็นของการทำฟังก์ชั่นกำไรข้างต้นให้สูงสุด คือ

$$\frac{\partial \Pi(x_1, x_2)}{\partial x_1} = p_1 - 2ax_1 - bx_2 = 0$$
$$\frac{\partial \Pi(x_1, x_2)}{\partial x_2} = p_2 - bx_1 - 2cx_2 = 0$$

ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ คือ

$$\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

จากกฎของคราเมร์ คำตอบของระบบสมการนี้จะเท่ากับ

$$x_1 = \frac{2cp_1 - bp_2}{2ac - bd}; x_2 = \frac{2ap_2 - bp_1}{2ac - bd}$$

คำตอบของระบบสมการข้างต้นมีข้อควรสังเกตสองประการ คือ ในประการแรก คำตอบของทั้งปริมาณของสินค้า x_1 และ x_2 ที่ทำให้กำไรรวมของผู้ผลิตสูงสุดนั้น ไม่ได้ขึ้นอยู่กับราคาของสินค้าชนิดนั้นเพียงอย่างเดียว แต่จะขึ้นอยู่กับราคาของสินค้าอีกประเภทด้วย เนื่องจากต้นทุนในการผลิตสินค้าทั้งสองประเภทมีความสัมพันธ์กัน ผ่านสัมประสิทธิ์ในฟังก์ชั่นต้นทุน คือ b ดังนี้ กระบวนการผลิตที่มุ่งทำให้กำไรรวมสูงสุด จึงไม่อาจเป็นกระบวนการ ที่ผู้ผลิตตัดสินใจผลิตสินค้าอย่างใดอย่างหนึ่งแยกจากกัน ทั้งนี้ ในกรณีเฉพาะที่ฟังก์ชั่นต้นทุนในการผลิตสินค้าทั้งสองชนิด ไม่มีความเกี่ยวข้องกัน คือ เมื่อให้ $b = 0$ ปริมาณสินค้าแต่ละประเภทที่ทำกำไรให้สูงสุด จะขึ้นอยู่กับราคาของสินค้าประเภทนั้นแต่เพียงอย่างเดียว

ในประการที่สอง ในกรณีที่ $b = 0$ คือ ต้นทุนในการผลิตสินค้าแต่ละประเภทไม่เกี่ยวเนื่องกัน และ $d = 0$ คือ ฟังก์ชั่นต้นทุนข้างต้น คือ ต้นทุนระยะยาวซึ่งไม่มีต้นทุนคงที่ (fixed cost) เงื่อนไขที่ทำให้ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ a หรือ c จะต้องไม่เท่ากับ 0 เงื่อนไขนี้มีความน่าสนใจในเชิงเศรษฐศาสตร์ คือ หากสัมประสิทธิ์ a หรือ c เท่ากับ 0 แล้ว ฟังก์ชั่นต้นทุนของการผลิตสินค้าชนิดใดชนิดหนึ่ง จะมีลักษณะเป็นฟังก์ชั่นเส้นตรง อันเป็นผลลัพธ์จากลักษณะของกระบวนการผลิตที่มีการเพิ่มผลผลิตต่อขนาดคงที่ (constant return to scale) ซึ่งให้คำตอบของกระบวนการทำกำไรให้สูงสุดที่มีลักษณะแบบสุดโต่ง (corner solution) กล่าวคือ จุดที่ทำกำไรให้สูงสุด คือ การไม่ผลิตเลย หรือ การผลิตให้ได้มากที่สุดที่ระดับอนันต์

อนึ่ง การหาคำตอบที่สมบูรณ์เพื่อยืนยันว่าคำตอบของระบบสมการข้างต้น คือปริมาณสินค้าที่ให้กำไรสูงสุดอย่างแท้จริงนั้น ควรได้มีการตรวจสอบเงื่อนไขที่เพียงพอด้วยเช่นกัน ซึ่งผู้สนใจสามารถทดลองหาเงื่อนไขดังกล่าวได้ จากอนุพันธ์ลำดับที่สองของฟังก์ชั่นกำไร

2.9 เอกสารอ่านประกอบเพิ่มเติม

ผู้สนใจสามารถศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับหัวข้อต่างๆ ในบทนี้ และฝึกทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติม พร้อมศึกษาแนวคำตอบและเฉลยได้ จากตำราอื่นๆ เช่น ตัวกำหนดจากบทที่สามของ Fraleigh and Beauregard (1990) บทที่หกของ Kolman and Hill (2014) บทที่สามของ Nicholson (2013) และบทที่เก้าและบทที่ยี่สิบหกของ Simon and Blume (1994) โอเปอเรเตอร์และพีชคณิตของเมตริกซ์จากบทที่สามสิบสองของ Nicholson (2013) และบทที่แปดของ Simon and Blume (1994) และเรื่องค่าของเมตริกซ์ ตลอดจนกระบวนการหาจุดสูงสุด และต่ำสุดของฟังก์ชั่นหลายตัวแปร จากบทที่สิบหกและบทที่สิบเจ็ดของ Simon and Blume (1994) และสามารถศึกษาหนังสือคณิตศาสตร์ที่อธิบายแนวคิดต่างๆ เกี่ยวกับเมตริกซ์และวิชาเศรษฐมิติเป็นการเฉพาะ สำหรับผู้ศึกษาในระดับชั้นปริญญาโท และปริญญาเอก ได้แก่ Dhrymes (2013)

Greene (2000) และ Wooldridge (2010) ผู้สนใจศึกษาผลงานของนักคณิตศาสตร์สำคัญที่ได้กล่าวถึงในบทนี้ สามารถค้นคว้ารายละเอียดต่างๆ เพิ่มเติม เช่น ประวัติของไลบ์นิซจาก Aiton and Lanas (1985) และ Arthur (2014) ประวัติของลาปลาสจาก Hahn (2005) และเกร็ดความรู้ที่น่าสนใจ เรื่องการค้นพบกฎของคราเมร์จาก Kosinski (2001) ตลอดจนบทความต้นฉบับเกี่ยวกับเมตริกซ์ปัจจัยการผลิต และผลผลิตใน Leontief (1974)

2.10 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. สมมติให้

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}; \boldsymbol{D} = \mathsf{diag}(1,2)$$

(1) จงหาค่าของ

$$\begin{array}{rrrrr} \boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}', & 3\boldsymbol{A}, & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}', & 2(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{A}'), & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}, & \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}, & \boldsymbol{B}^{-1}, & \boldsymbol{D}^{-1}, & \boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{D}' \\ \boldsymbol{B}\odot\boldsymbol{D}, & \boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{D}, & \boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{D}, & \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{D}, & \boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{A} \end{array}$$

(2) จงแสดงว่าหากให้ $\boldsymbol{X}$ เป็นเมตริกซ์ใดๆ $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$ จะเป็นเมตริกซ์นิจพล

(3) จงแสดงว่า $(\boldsymbol{D}\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{D}'$

2. จงแสดงว่าหาก $\boldsymbol{X}$ และ $\boldsymbol{Y}$ เป็นเมตริกซ์แกนที่มีขนาดเท่ากัน $\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}$

3. จงหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ต่อไปนี้ ด้วยวิธีการของไลบ์นิซ วิธีการขยายของลาปลาส หรือโดยใช้คุณสมบัติของเมตริกซ์

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 31 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

4. จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้ด้วยวิธีการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์และวิธีการใช้กฎของคราเมร์

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}, \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 - x_3 &= 1 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}, \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

5. สมมติให้

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

จงหาค่าของ $\boldsymbol{A}^2$ และ $\boldsymbol{A}^{-2}$

6. จงหาอินเวอร์สของเมตริกซ์แกนทั่วไปที่มีขนาด $n \times n$

7. จงแสดงว่าอินเวอร์สของเมตริกซ์สมมาตรขนาด 2×2 เป็นเมตริกซ์สมมาตรเช่นกัน

8. จงแสดงว่าหาก $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ซึ่งมีคุณสมบัติคือ $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ แล้ว เมตริกซ์ $\boldsymbol{B}$ จะต้องมีขนาด $n \times n$

9. จงแสดงว่าสำหรับฟังก์ชั่นในรูปกำลังสอง $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ เมื่อ $\boldsymbol{B}$ เป็นเมตริกซ์จัตุรัสใดๆ ที่ไม่จำเป็นต้องเป็นเมตริกซ์สมมาตร จะได้ว่า $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ เมื่อ $\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}'}{2}$ คือเมตริกซ์สมมาตร

10. จงเขียนฟังก์ชั่น $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ในรูปกำลังสองแบบแจงแจง โดยใช้เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ต่อไปนี้ และพิจารณาค่าของเมตริกซ์ว่ามีค่าบวก ลบ กึ่งบวก กึ่งลบ หรือไม่สามารถระบุค่าได้

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

11. จากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชั่นในรูปแบบกำลังสองที่มีสองตัวแปร

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

จงหาค่าของ a, b, c ที่ทำให้ค่าของเมตริกซ์มีค่าบวก ลบ กึ่งบวก กึ่งลบ และไม่สามารถระบุค่าได้

12. จาก

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \boldsymbol{A}^{+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

จงแสดงให้เห็นว่า $\boldsymbol{A}^{+}$ มีลักษณะทุกข้อตามนิยามของอินเวอร์สของมอร์และเพนโรสของ $\boldsymbol{A}$

13. สำหรับเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ ขนาด $n \times n$ ที่มีอินเวอร์สคือ $\boldsymbol{A}^{-1}$ และ $\boldsymbol{B}^{-1}$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า (1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$ (2) หาก $\boldsymbol{AB}$ สามารถหาอินเวอร์สได้แล้ว $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ (3) อินเวอร์สของ $\boldsymbol{A}'$ คือ $(\boldsymbol{A}')^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})'$ (4) สมมติให้ $k \neq 0$ คือค่าคงที่ $(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

14. จงหาคำตอบของคำถามข้อที่ 11 และ 12 ในบทที่ 1 ด้วยการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ และด้วยการใช้กฎของคราเมร์

15. จงพิสูจน์ว่า ตัวประมาณการด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ของตัวแบบทางเศรษฐมิติแบบเชิงเส้นในรูป $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$ จะไม่สามารถหาค่าได้ หากตัวแปรอธิบายตัวหนึ่ง เป็นฟังก์ชั่นเส้นตรง หรือส่วนผสมเชิงเส้นของตัวแปรอธิบายตัวอื่นๆ

16. ตลาดซึ่งมีผู้ขายสองรายแห่งหนึ่ง มีผู้ขายแต่ละรายที่มีฟังก์ชั่นต้นทุน คือ $c(q_i) = cq_i$ เมื่อ q_i คือ ปริมาณสินค้าที่ผู้ขาย i ผลิต และ $c = \beta q_1 + (1-\beta)q_2$ เมื่อ β คือค่าคงที่ สมมติให้อุปสงค์ของตลาดคือ $p = \alpha - q_1 - q_2$ เมื่อ p คือราคาสินค้า และ α คือค่าคงที่ จงหาดุลยภาพแบบแนชในตลาดนี้

บทที่ 3

ค่าเฉพาะ

ความซับซ้อนของเมตริกซ์เมื่อเทียบกับตัวเลขเดี่ยวๆ ที่เป็นจำนวนจริง มีสาเหตุสำคัญประการหนึ่ง จากการที่เมตริกซ์คือกลุ่มของตัวเลข ซึ่งมิใช่ตัวเลขใดตัวเลขหนึ่ง การพิจารณาคุณสมบัติต่างๆ ของเมตริกซ์หรือแม้กระทั่งการคำนวณต่างๆ เกี่ยวกับเมตริกซ์จึงมีความซับซ้อนกว่าตัวเลขตัวหนึ่งเป็นธรรมดา อาทิ การพิจารณาว่าจำนวนจริง a มีค่าเป็นบวกหรือเป็นลบ เป็นสิ่งที่สามารถกระทำได้ทันที แต่การพิจารณาเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ว่าเป็นเมตริกซ์ที่ค่าบวก (positive definite) หรือค่าลบ (negative definite) โดยทั่วไปแล้ว กลับไม่สามารถพิจารณาจากเมตริกซ์ได้โดยตรง จากที่ได้พิจารณาแล้วในบทที่สอง การกำหนดค่าของเมตริกซ์ จึงต้องเริ่มจากการกำหนดนิยามในกรณีของเมตริกซ์ว่า $\boldsymbol{A}$ จะเป็นเมตริกซ์ที่ค่าบวกก็ต่อเมื่อ $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$ สำหรับทุกเวคเตอร์ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ เป็นต้น ซึ่งต้องอาศัยการพิจารณารูปแบบของไมเนอร์ของเมตริกซ์ในกรณีต่างๆ ที่ซับซ้อน

นอกจากนั้น การคำนวณเมตริกซ์ เช่น การคูณหรือการหาอินเวอร์ส ยังเป็นเรื่องยุ่งยาก ที่มักไม่สามารถทำได้โดยเร็ว ดังเช่นการคำนวณตัวเลขเดี่ยว โดยแม้ปัจจุบัน โปรแกรมคอมพิวเตอร์ต่างๆ จะมีการพัฒนาไปมาก จนช่วยให้การคำนวณเมตริกซ์ที่มีขนาดใหญ่ สามารถทำได้อย่างรวดเร็ว แต่ยังมีการวิเคราะห์ในเชิงทฤษฎีอีกมาก ที่ต้องคำนวณ หรือศึกษาลักษณะของเมตริกซ์โดยตรง ซึ่งไม่อาจทดแทนด้วยคอมพิวเตอร์ได้ อาทิ ในกรณีที่ $x \in \mathbb{R}$ นั้น การศึกษาคุณสมบัติบางประการของ x เช่น เงื่อนไขที่ทำให้ $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ คือ $|x| < 1$ นั้น สามารถเข้าใจได้ไม่ยาก ต่างจากกรณีของเมตริกซ์จัตุรัส $\boldsymbol{X}$ ซึ่งการระบุเงื่อนไขที่ทำให้ $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{X}^n = \boldsymbol{A}$ ได้นั้น กลับซับซ้อน

กว่าในกรณีแรกอยู่มาก และไม่อาจใช้การจำลอง (simulation) ด้วยโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ให้คาดเดาลักษณะใดๆ ของ $\boldsymbol{X}^n$ ได้ หากค่าใน $\boldsymbol{X}$ เป็นพารามิเตอร์ซึ่งไม่ใช่ตัวเลข

การสกัดเอาคุณสมบัติของเมตริกซ์ ออกมาในรูปของตัวเลขเดี่ยวให้ได้มากที่สุด จึงเป็นแนวทางหนึ่ง ที่ช่วยให้หลีกเลี่ยงความซับซ้อนของเมตริกซ์ได้มาก ตัวเลขเดี่ยวที่ได้รวบรวมคุณสมบัติต่างๆ ของเมตริกซ์ เอาไว้เช่นนี้ มีชื่อเรียกว่า **ค่าเฉพาะ (eigenvalue)** [1] ซึ่งเป็นแนวคิดสำคัญทางพีชคณิตเชิงเส้น ที่มีการประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวาง ทั้งทางฟิสิกส์ วิศวกรรมศาสตร์ สถิติ และเศรษฐศาสตร์

เนื้อหาในส่วนต่อไปของบทนี้ จะได้ย้อนกล่าวถึงคุณสมบัติของระบบสมการเชิงเส้นที่มีลักษณะเดียวกัน ที่ได้พิจารณาแล้วในบทที่สอง จากนั้นจึงจะได้อธิบาย นิยามของค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะ ความสัมพันธ์ระบบสมการเชิงเส้นที่มีลักษณะเดียวกัน และค่าเฉพาะ การประยุกต์ใช้ค่าเฉพาะกับการยกกำลังเมตริกซ์ การแปลงเมตริกซ์ให้เป็นเมตริกซ์แกน เมตริกซ์ของมาร์คอฟ ตลอดจนการใช้ค่าเฉพาะหาคำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้น ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญในการวิเคราะห์ทางพลวัตในเศรษฐศาสตร์

3.1 คำตอบของระบบสมการที่มีลักษณะเดียวกัน

ระบบสมการเชิงเส้นที่มีลักษณะเดียวกัน (homogeneous system of equations) ซึ่งอยู่ในรูป

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

เป็นพื้นฐานสำคัญในการทำความเข้าใจแนวคิดเรื่องค่าเฉพาะ โดยจากระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น ซึ่งค่าทางฝั่งขวาของทุกสมการเท่ากับ 0 ดังนี้ ระบบสมการเชิงเส้นนี้ย่อมมีคำตอบอย่างน้อยชุดหนึ่ง คือ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ เนื่องจากกรณีที่สมการไม่มีคำตอบ คือ $0x_1 + \ldots + 0x_n = b$ โดยที่ $b \neq 0$ จะไม่สามารถเกิดขึ้นได้ ทั้งนี้ชุดคำตอบ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ จัดเป็น**คำตอบที่ไม่เป็นสาระ (trivial solution)**

[1]คำว่า eigen- เป็นคำในภาษาเยอรมันที่แปลว่า ซึ่งเป็นของ หรือ ซึ่งเป็นลักษณะของ คำว่า eigenvalue ซึ่งมีอีกคำเรียก ที่อาจไม่เป็นที่นิยมเท่า คือ characteristic value จึงแปลได้ว่า เป็นค่าที่รวบรวมเอาลักษณะที่สำคัญ ของเมตริกซ์เอาไว้ ในที่นี้ ผู้เขียนจะใช้คำแปลตามคำในภาษาไทย ที่ค่อนข้างแพร่หลาย คือ ค่าเฉพาะ การศึกษาเรื่องค่าเฉพาะแม้จะได้มีการพัฒนาอย่างต่อเนื่องและยาวนาน ตั้งแต่ก่อนศตวรรษที่ 18 แต่ผู้ที่ได้ริเริ่มใช้คำว่า eigen- เพื่ออธิบายแนวคิดนี้เป็นคนแรก คือ เดวิด ฮิลแบร์ต (David Hilbert, 1862-1943) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ซึ่งเรียกคำนี้ว่า eigenwert ในภาษาเยอรมัน จากนั้นคำว่า eigen- ก็แพร่หลายและเป็นที่นิยมอยู่จนปัจจุบัน แม้ในกลุ่มนักคณิตศาสตร์ผู้ใช้ภาษาอังกฤษก็ยังคงคำว่า eigen- ไว้และแปลเพียงคำว่า wert ในภาษาเยอรมันเป็นคำว่า value ในภาษาอังกฤษเท่านั้น

รูปที่ 3.1 ดาวิด ฮิลแบร์ต (David Hilbert, 1862-1943)* ฮิลแบร์ตเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ที่กล่าวได้ว่าสืบสายทางด้านวิชาการมาจากเกาส์โดยตรง โดยหากนับอาจารย์ของอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ปริญญาเอก ของฮิลแบร์ตขึ้นไปเรื่อยๆ ก็จะสามารถสืบไปได้ถึงเกาส์ และภายหลังฮิลแบร์ตยังได้กลับมาเป็นศาสตราจารย์ทางด้านคณิตศาสตร์ ที่มหาวิทยาลัยเกิร์ตธิงเงน (Göttingen) อันเป็นสำนักคณิตศาสตร์ที่โดดเด่นที่สุดในโลกแห่งหนึ่งในสมัยนั้น เช่นเดียวกับเกาส์จนเกษียณอายุ ฮิลแบร์ตได้รับการยอมรับว่า เป็นนักคณิตศาสตร์ที่สำคัญที่สุดผู้หนึ่งในช่วงศตวรรษที่ 19 และ 20 โดยมีผลงานครอบคลุมสาขาต่างๆ ของคณิตศาสตร์อย่างกว้างขวาง ทั้งพีชคณิต แคลคูลัส เรขาคณิต ทฤษฎีจำนวน และตรรกคณิตศาสตร์ อีกทั้งยังมีผลงานทางด้านฟิสิกส์และปรัชญา อย่างไรก็ตาม เป็นที่น่าเสียดายที่ในช่วงท้ายของชีวิตฮิลแบร์ต เป็นช่วงที่พรรคนาซีได้เริ่มมีอิทธิพลในเยอรมนี และได้เริ่มเพ่งเล็งสถาบันการศึกษาหลายแห่ง รวมถึงมหาวิทยาลัยเกิร์ตธิงเงน ซึ่งมีอาจารย์และนักศึกษาหลายคนเป็นชาวยิว ฮิลแบร์ตแม้จะไม่ใช่ชาวยิว แต่เป็นนักคณิตศาสตร์ที่มีจิตใจเปิดกว้าง และส่งเสริมอาจารย์และนักศึกษาซึ่งเป็นชนกลุ่มน้อย ทั้งที่เป็นชาวยิว และที่เป็นผู้หญิง ความตึงเครียดของสถานการณ์ในช่วงดังกล่าว เป็นสาเหตุสำคัญที่ทำให้นักวิทยาศาสตร์และนักคณิตศาสตร์ชาวยิวจำนวนมาก ตัดสินใจหนีออกจากเยอรมนีไปสู่ประเทศอื่น เช่น สหรัฐอเมริกา ส่งผลให้เยอรมนีสูญเสียสถานะ การเป็นศูนย์กลางของความรู้ทางด้านของคณิตศาสตร์ของโลก ที่ได้สืบเนื่องต่อมาตั้งแต่ยุคของเกาส์จนถึงฮิลแบร์ต ให้กับประเทศใหม่คือสหรัฐอเมริกาในที่สุด

*https://en.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert#/media/File:Hilbert.jpg

ของระบบสมการ เนื่องด้วยเป็นคำตอบตายตัว ที่ไม่จำเป็นต้องหาคำตอบด้วยวิธีการใดเป็นการเฉพาะ อีกทั้งยังเป็นคำตอบที่ไม่ขึ้นกับสัมประสิทธิ์ต่างๆ ของระบบสมการ สิ่งที่น่าสนใจเกี่ยวกับระบบสมการที่มีลักษณะเดียวกัน จึงไม่ใช่คำตอบที่ไม่เป็นสาระ แต่เป็น**คำตอบที่เป็นสาระ (non-trivial solution)** ของระบบสมการ คือ $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ ดังสรุปไว้ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.1 ระบบสมการเชิงเส้นที่มีลักษณะเดียวกัน (homogeneous system) ซึ่งอยู่ในรูป

$$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$$

เมื่อ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{x}$ มีขนาด $n \times n$ และ $n \times 1$ ตามลำดับ มี**คำตอบที่ไม่เป็นสาระ (trivial solution)** คือ $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ และมี**คำตอบที่เป็นสาระ (non-trivial solution)** คือ $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ ก็ต่อเมื่อ $|\boldsymbol{A}| = 0$ และหากระบบสมการนี้มีคำตอบที่เป็นสาระ จะมีคำตอบมากมายไม่จำกัด[1] ■

เงื่อนไขข้างต้นสามารถพิสูจน์ได้ด้วยวิธีการแบบย้อนแย้ง (reductio ad absurdum) กล่าวคือ หากให้ระบบสมการมีคำตอบที่เป็นสาระ คือ $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ โดยที่ $|\boldsymbol{A}| = 0$ ดังนี้ คำตอบของแต่ละตัวแปรในระบบสมการ จะสามารถหาได้โดยกฎของคราเมร์ ซึ่งเท่ากับ

$$x_j = \frac{|\boldsymbol{A}_j|}{|\boldsymbol{A}|}$$

อย่างไรก็ตาม โดยที่ตัวแปรฝั่งขวาทั้งหมดเท่ากับศูนย์ การนำเอาเวคเตอร์คอลัมน์ $\mathbf{0}$ ไปแทนที่คอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่งของเมตริกซ์ ย่อมส่งผลให้เมตริกซ์มีคอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่งมีทุกค่าเท่ากับศูนย์ และส่งผล $|\boldsymbol{A}_j|$ และ $x_j = 0, j = 1, \ldots, n$ ดังนี้ คำตอบที่ได้จึงเป็นคำตอบที่ไม่เป็นสาระ ซึ่งย้อนแย้งกับข้อกำหนดตั้งต้นที่ว่า ระบบสมการนี้มีคำตอบที่เป็นสาระ

ข้อความในส่วนท้ายของทฤษฎีบทข้างต้น สามารถพิสูจน์โดยง่าย โดยการพิจารณาข้อเท็จจริงจากส่วนแรกของทฤษฎีบทที่ว่า หากระบบสมการมีคำตอบที่เป็นสาระ เมตริกซ์สัมประสิทธิ์จะต้องมีตัวกำหนดเท่ากับ 0 เสมอ ซึ่งให้อันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีค่าน้อยกว่า n กล่าวคือ หากจัดเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ให้อยู่ในรูปของการเรียงแถวแล้ว จะมีตัวแปรหนึ่งของระบบสมการที่เป็นตัวแปรอิสระ ซึ่งให้คำตอบของระบบสมการ จำนวนมากมายไม่จำกัด

---

[1] การตีความทฤษฎีบทนี้ในเชิงเรขาคณิต อาจพิจารณาได้จากข้อเท็จจริงที่ว่าระบบสมการเชิงเส้นที่มีลักษณะเดียวกัน คือ กลุ่มของเส้นที่ทุกเส้นลากผ่านจุดกำเนิด ดังนี้ ระบบสมการจึงย่อมมีคำตอบอย่างน้อยหนึ่งคำตอบ คือ จุดกำเนิด และหากระบบสมการมีคำตอบอื่นที่ไม่ใช่จุดกำเนิด ทุกเส้นจะต้องทาบกันไป ซึ่งเป็นกรณีที่ระบบสมการมีคำตอบมากมายไม่จำกัด

ตัวอย่างที่ 3.1 ค่าของ λ ที่ทำให้ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{array}{rcl} x \qquad\qquad & = & \lambda x \\ 2y \qquad & = & \lambda y \\ -z & = & \lambda z \end{array}$$

มีคำตอบที่เป็นสาระ สามารถหาได้โดยการจัดให้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้นที่เหมือนกันได้ในรูป

$$\begin{array}{rcl} (1-\lambda)x \qquad\qquad\qquad\qquad & = & 0 \\ (2-\lambda)y \qquad\qquad & = & 0 \\ (-1-\lambda)z & = & 0 \end{array}$$

ซึ่งเป็นระบบสมการที่มีลักษณะเดียวกัน

โดยผลแห่งทฤษฎีบทที่ 3.1 เงื่อนไขที่ทำให้ระบบสมการเชิงเส้นนี้ มีคำตอบที่เป็นสาระ จึงได้แก่

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda) = 0$$

ดังนี้ ระบบสมการเชิงเส้นนี้จึงมีคำตอบก็ต่อเมื่อ $\lambda = -1, 1, 2$ โดยคำตอบของระบบสมการจะขึ้นอยู่กับค่าของ λ กล่าวคือ สำหรับ $\lambda = -1$ หากให้ตัวแปร z คือ ตัวแปรอิสระ จะได้คำตอบของระบบสมการ คือ $x = y = 0$ และ $z = s, s \in \mathbb{R}$ สำหรับ $\lambda = 1$ หากให้ตัวแปร x คือ ตัวแปรอิสระ จะได้คำตอบของระบบสมการ คือ $y = z = 0, x = s, s \in \mathbb{R}$ และสำหรับ $\lambda = 2$ หากให้ตัวแปร y คือ ตัวแปรอิสระ จะได้คำตอบของระบบสมการ คือ $x = z = 0$ และ $y = s, s \in \mathbb{R}$ $\square$

3.2 ค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะ

นิยามที่ 3.1 ค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะ สมมติให้ $\boldsymbol{A}$ คือเมตริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ และ $\boldsymbol{z}$ คือเวคเตอร์ขนาด $n \times 1$ ที่มีคุณสมบัติคือ

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \lambda \boldsymbol{z}$$

โดยที่ $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ จะได้ว่า λ คือค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{z}$ คือเวคเตอร์เฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ ■

นิยามข้างต้น สะท้อนให้เห็นแนวคิดและความสำคัญของค่าเฉพาะดังที่ได้พิจารณาในส่วนแรกของบท คือ การคำนวณหรือพิจารณาคุณสมบัติต่างๆ ของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ นั้นซับซ้อน เมื่อเทียบกับค่าสเกลาร์เช่น λ แต่การจะหาค่า λ ที่ให้คุณสมบัติคือ $\boldsymbol{A} = \lambda$ โดยตรงนั้น ย่อมเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ แต่ λ เป็นค่าสเกลาร์ ที่ทำได้ก็เป็นเพียงแต่การหาค่า λ ที่มีคุณสมบัติรองลงมา คือ ค่า λ ที่ทำให้ $\boldsymbol{Az} = \lambda \boldsymbol{z}$ เมื่อ $\boldsymbol{z}$ คือเวคเตอร์ขนาด $n \times 1$ ที่สอดคล้องกับการคูณเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ขนาด $n \times n$ ทั้งนี้ มีข้อควรสังเกตว่า ค่าเฉพาะคือ λ นั้น จะต้องควบคู่ไปกับเวคเตอร์เฉพาะคือ $\boldsymbol{z}$ เสมอ และค่าของ $\boldsymbol{z}$ ที่ทำให้ทั้งสองข้างของสมการ จะขึ้นอยู่กับค่าของ λ เป็นสำคัญ

การหาค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ สามารถทำได้โดยการย้ายข้างของสมการในนิยามที่ 3.1 ให้ได้ระบบสมการเชิงเส้นที่เหมือนกันในรูป

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Az} &= \lambda \boldsymbol{z} \\ (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{z} &= \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

ซึ่งอยู่ในรูประบบสมการเชิงเส้นที่มีลักษณะเดียวกัน จากทฤษฎีบทที่ 3.1 การหาคำตอบที่เป็นสาระของระบบสมการนี้ จึงเริ่มจากการหาค่าของ λ ที่ทำให้

$$\rho(\lambda) \equiv |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$$

สมการข้างต้น ซึ่งเป็นสมการตั้งต้นในการหาค่าเฉพาะ λ มีชื่อเรียกว่า **สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation)** [1]

ตัวอย่างที่ 3.2 สมมติให้

$$\boldsymbol{A} = \mathsf{diag}(a_1, \ldots, a_n)$$

ค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ สามารถหาได้โดยการหาคำตอบของสมการเฉพาะ คือ λ ที่ทำให้

[1] สมการลักษณะเฉพาะ ยังเป็นที่รู้จักกันในอีกชื่อหนึ่งว่า สมการพหุนามลักษณะเฉพาะ (characteristic polynomial equation) เนื่องจากมักอยู่ในรูปฟังก์ชั่นพหุนามของตัวแปรที่ต้องการหาค่า คือ λ แนวคิดเกี่ยวกับสมการเฉพาะ มีความเป็นมาก่อนการบัญญัติใช้คำว่า eigenvalue โดยฮิลแบร์ตนับร้อยปี โดย ออกุสตัง หลุย โคชชี (Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ได้เริ่มใช้คำว่า รากลักษณะเฉพาะ (racine caractéristique) หรือคำตอบของสมการลักษณะเฉพาะ แทนแนวคิดเดียวกันกับ ค่าเฉพาะ ซึ่งเป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายในเวลาต่อมา อนึ่ง ปัจจุบันยังสามารถพบการใช้คำว่ารากลักษณะเฉพาะได้ ในตำราหรือบทความคณิตศาสตร์บางเล่ม

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & a_n-\lambda \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(a_i-\lambda) = 0$$

$\boldsymbol{A}$ จึงมีค่าเฉพาะ n ค่า ได้แก่ $\lambda = a_1, \ldots, a_n$ $\square$

ตัวอย่างที่ 3.3 สมมติให้

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

ค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ สามารถหาได้โดยการหาคำตอบของสมการเฉพาะ คือ λ ที่ทำให้

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 6 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(2+\lambda) - 24 = 0$$

ซึ่งเป็นคำตอบของสมการพหุนาม

$$\lambda^2 + 2\lambda - 24 = (\lambda+6)(\lambda-4) = 0$$

ที่ให้ค่าเฉพาะ คือ $\lambda = -6, 4$ ทั้งนี้ วิธีที่ใช้ในการหาค่าเฉพาะที่รวดเร็วอีกวิธีหนึ่ง ซึ่งไม่จำเป็นต้องแก้สมการพหุนามคือ การคาดเดาโดยตรงว่า λ ควรเป็นเท่าใด ซึ่งเมื่อนำไปลบออกจากค่าบนแกนของ $\boldsymbol{A}$ แล้ว จะทำให้บางแถวหรือคอลัมน์ของเมตริกซ์ ไม่เป็นอิสระจากกัน เช่น หากนำ $\lambda = 4$ ลบออกจากค่าบนแกนของ $\boldsymbol{A}$ จะทำให้ได้

$$(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}) = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

และโดยที่แต่ละคอลัมน์ของเมตริกซ์ข้างต้นไม่เป็นอิสระระหว่างกัน กล่าวคือ $\boldsymbol{c}_1 = -\boldsymbol{c}_2$ จึงมีตัวกำหนดเท่ากับ 0 และเช่นเดียวกัน หากนำ $\lambda = -6$ ลบออกจากค่าบนแกนของ $\boldsymbol{A}$ จะทำให้

$$(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

และโดยที่แต่ละคอลัมน์ของเมตริกซ์ข้างต้นไม่เป็นอิสระระหว่างกัน กล่าวคือ $\boldsymbol{c}_1 = \frac{4}{6}\boldsymbol{c}_2$ จึงมีตัวกำหนดเท่ากับ 0 $\square$

ตัวอย่างที่ 3.4 สมมติให้

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ สามารถหาได้จากสมการเฉพาะ คือ ค่า λ ที่ทำให้

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

ซึ่งเท่ากับ $\lambda = i, -i$ เมื่อ i เป็นจำนวนจินตภาพ $\boldsymbol{A}$ จึงไม่มีค่าเฉพาะที่เป็นจำนวนจริง $\square$

ตัวอย่างที่ 3.5 สมมติให้

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

ค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ สามารถหาได้จากสมการเฉพาะ คือ ค่า λ ที่ทำให้

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 3 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 = 0$$

กรณีข้างต้นเป็นการหารากของสมการกำลังสามที่ไม่ซับซ้อน โดยรากหนึ่งซึ่งเป็นจำนวนจริงของสมการข้างต้น คือ $\lambda = 1$ ดังนี้ จึงได้สามารถแยกองค์ประกอบของสมการเฉพาะได้ ในรูป

$$-\lambda^3 + 1 = (\lambda - 1)(a\lambda^2 + b\lambda + c) = a\lambda^3 + (b - a)\lambda^2 + (c - b)\lambda - c$$

จากข้างต้น จะได้ว่า $a = -1, c = -1,$ และ $b - a = 0, c - b = 0$ กล่าวคือ $b = -1$ ซึ่งเมื่อนำค่าทั้งหมดแทนในฟังก์ชั่นกำลังสองข้างต้น จะได้สมการเฉพาะซึ่งอยู่ในรูป $(\lambda - 1)(-\lambda^2 - \lambda - 1) =$

รูปที่ 3.2 เจอโรลาโม คาร์ดาโน (Gerolamo Cardano, 1501-1576)* วิวัฒนาการความรู้ทางคณิตศาสตร์ในโลกตะวันตก มีการพัฒนาไปอย่างรวดเร็วในยุคกรีก ก่อนจะมาชะงักในช่วงยุคกลางและถูกจุดประกายขึ้นมาในยุคเรอเนสซองส์ และเข้าสู่ยุครุ่งเรืองภายหลังเดการ์ทและนิวตัน ดังนี้ จึงอาจเปรียบคาร์ดาโนได้ว่า เป็นผู้ที่เชื่อมความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่รุ่งเรืองในยุคกรีก เข้ากับยุครุ่งโรจน์ภายหลังศตวรรษที่ 17 หลังจากที่วิวัฒนาการความรู้ทางคณิตศาสตร์ต้องชะงักไปนับพันปี คาร์ดาโนเกิดในอิตาลีในปี 1501 ในช่วงเวลานั้นคาร์ดาโนถือเป็นแพทย์ที่มีชื่อเสียงโด่งดังไปทั่วยุโรป ที่พระราชาและพระราชินีในหลายประเทศในยุโรป ต่างต้องการให้มาเป็นแพทย์ในราชสำนักตนเอง อย่างไรก็ตามคาร์ดาโนเป็นอัจริยะรอบด้าน ที่ไม่ได้มีความรู้แต่เพียงด้านการแพทย์เท่านั้น แต่ยังมีความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์สูง จนกล่าวได้ว่าเป็นนักคณิตศาสตร์ที่สำคัญที่สุดคนหนึ่งในยุคเรอเนสซองส์ มรดกทางคณิตศาสตร์ของคาร์ดาโนที่เป็นที่รู้จักกันในปัจจุบัน คือ สูตรการแก้สมการกำลังสาม นอกจากนี้ คาร์ดาโนซึ่งมีนิสัยติดพนัน ยังเป็นผู้บุกเบิกความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็น และทฤษฎีทวินาม (binomial theorem) ซึ่งเป็นรากฐานสำคัญของการศึกษาเรื่องความน่าจะเป็นและสถิติ

*https://en.wikipedia.org/wiki/Gerolamo_Cardano#/media/File:Girolamo_Cardano._Stipple_engraving_by_R._Cooper._Wellcome_V0001004.jpg

0 และเมื่อใช้สูตรการหารากของสมการกำลังสอง เพื่อหารากของ $(-\lambda^2 - \lambda - 1)$ จะได้ว่า รากทั้งหมดของสมการเฉพาะ ซึ่งเท่ากับค่าเฉพาะของเมตริกซ์ คือ

$$\lambda = 1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 3.6 โดยทั่วไปแล้วการหารากของสมการกำลังสามนั้น เป็นเรื่องที่ซับซ้อนกว่าการหารากของสมการกำลังสองเป็นอย่างมากมาก โดบวิธีการหารากของสมการกำลังสามที่อยู่ในรูป $\lambda^3 + p\lambda + q = 0$ เมื่อ $p, q \in \mathbb{R}$ นั้น ปรากฏครั้งแรกในงานเขียนของเจอโรลาโม คาร์ดาโน (Gerolamo Cardano, 1501-1576) นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาเลียน ซึ่งได้แสดงให้เห็นว่าหาก $4p^3 + 27q^2 > 0$ สมการนี้จะมีรากที่เป็นจำนวนจริงคือ

$$\lambda = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ในกรณีนี้ โดยที่ $p = 0$ และ $q = -1$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข $4(0)^3 + 27(-1)^2 > 0$ จึงได้ว่า คำตอบหนึ่งของสมการ คือ $\lambda = 1$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการข้างต้น อนึ่ง โดยที่จำนวนจินตภาพเป็นแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ที่เกิดขึ้นภายหลังยุคของคาร์ดาโน เมื่อได้นิยามจำนวนจินตภาพแล้ว จึงสามารถหารากที่เป็นจำนวนจินตภาพของสมการกำลังสามข้างต้นเพิ่มเติมได้ ซึ่งเท่ากับรากที่เป็นจำนวนจริงคูณด้วย

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ และ } \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

ตามลำดับ ค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ ทั้งที่เป็นจำนวนจริง และจำนวนจินตภาพจึงมีทั้งหมดสามค่า ได้แก่ $\lambda = 1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \quad \square$

คำถามที่เกี่ยวเนื่องกับการหาค่าเฉพาะ คือ การหาเวคเตอร์เฉพาะ โดยจากคุณสมบัติของค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะ คือ หากให้ $\boldsymbol{A}$ มีค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะ คือ λ และ $\boldsymbol{z}$ ตามลำดับแล้ว จะได้ว่า $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{z}$ กล่าวคือ

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$$

ดังนี้ เวคเตอร์เฉพาะจึงเท่ากับคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น ซึ่งมีจำนวนไม่จำกัด โดยนัยแห่งทฤษฎีบทที่ 3.1

ตัวอย่างที่ 3.7 จากตัวอย่างที่ 3.3 เมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ มีค่าเฉพาะคือ -6 และ 4 โดยเวคเตอร์เฉพาะสำหรับค่าเฉพาะ $\lambda = -6$ คือ $\boldsymbol{z}$ ซึ่งเป็นคำตอบของระบบสมการ $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ ดังนี้ ภายหลังการแทนค่า $\lambda = -6$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

หากให้ z_2 เป็นตัวแปรอิสระคือ $z_2 = s, s \in \mathbb{R}$ จะได้ $z_1 = -\frac{3}{2}s$ เวคเตอร์เฉพาะสำหรับค่าเฉพาะ $\lambda = -6$ จึงได้แก่

$$\boldsymbol{z} = s \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

ทั้งนี้ มีข้อควรสังเกตว่า คำตอบข้างต้นเป็นการปรับให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรอิสระเท่ากับ 1 โดยทั่วไปแล้ว เวคเตอร์เฉพาะอาจเปลี่ยนรูปได้ โดยการนำเอาค่าคงที่ใดๆ คูณทุกค่าของเวคเตอร์ เช่น หากต้องการให้เวคเตอร์เฉพาะอยู่ในรูปจำนวนเต็ม ก็สามารถเอา 2 คูณทุกเทอมของเวคเตอร์ ซึ่งจะแปลงเวคเตอร์เฉพาะให้อยู่ในรูป

$$\boldsymbol{z} = s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

เวคเตอร์เฉพาะสำหรับค่าเฉพาะ $\lambda = 4$ คือ $\boldsymbol{z}$ ซึ่งเป็นคำตอบของระบบสมการ $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ ดังนี้ ภายหลังการแทนค่า $\lambda = 4$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

หากให้ z_2 เป็นตัวแปรอิสระคือ $z_2 = s, s \in \mathbb{R}$ จะได้ $z_1 = s$ เวคเตอร์เฉพาะสำหรับค่าเฉพาะ $\lambda = 4$ จึงได้แก่

$$\boldsymbol{z} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 3.8 จากตัวอย่างที่ 3.2 $\boldsymbol{A}$ ซึ่งเป็นเมตริกซ์แกน มีค่าเฉพาะเท่ากับแต่ละค่าบนแกนของเมตริกซ์ กล่าวคือ

$$\boldsymbol{A} = \mathsf{diag}(a_1, \ldots, a_n)$$

มีค่าเฉพาะ คือ $\lambda = a_1, \dots, a_n$ สำหรับค่าเฉพาะ $\lambda = a_1$ ภายหลังจากการแทนค่า λ ใน $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ จะได้

$$\mathsf{diag}(0, a_2 - a_1, \dots, a_n - a_1)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$$

ซึ่งเท่ากับระบบสมการ $(a_2 - a_1)z_2 = 0, \dots, (a_n - a_1)z_n = 0$ ระบบสมการนี้มีคำตอบที่มี z_1 เป็นตัวแปรอิสระ และตัวแปรอื่นๆ คือ $z_2 = \dots = z_n = 0$ และเช่นเดียวกันนี้ แวคเตอร์เฉพาะสำหรับค่าเฉพาะ $\lambda = a_j$ เมื่อ $j = 1, \dots, n$ คือ คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่เหมือนกัน ที่มีตัวแปร z_j เป็นตัวแปรอิสระ และ $z_i = 0$ เมื่อ $i \neq j$ ซึ่งอยู่ในรูป $\boldsymbol{z} = s\boldsymbol{i}_j, s \in \mathbb{R}$ เมื่อ $\boldsymbol{i}_j$ คือ เวคเตอร์ขนาด $n \times 1$ ที่ค่าในแถวที่ $i = j$ เท่ากับ 1 และค่าในแถวที่ $i \neq j$ เท่ากับ 0 □

3.3 คุณสมบัติของค่าเฉพาะ

คุณสมบัติของค่าเฉพาะที่จะได้พิจารณาต่อไปนี้ เป็นคุณสมบัติที่เชื่อมโยงกับแนวคิดเรื่องเทรสและตัวกำหนด ดังสามารถสรุปได้ด้วยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.1 สำหรับทุกเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ ซึ่งมีค่าเฉพาะคือ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

1. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathsf{tr}(\boldsymbol{A})$

2. $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathsf{det}(\boldsymbol{A})$ ■

คุณสมบัติดังกล่าวเมื่อได้นำมาประกอบกับวิธีการหาค่าเฉพาะ เช่น การคาดเดาค่าเฉพาะบางตัวโดยใช้คุณสมบัติของค่าเฉพาะ จะช่วยให้สามารถระบุค่าเฉพาะที่เหลือได้ง่ายขึ้น การพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้น สามารถทำได้โดยพิจารณาว่าค่าเฉพาะ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ คือ รากของสมการเฉพาะที่สามารถจัดให้อยู่ในรูป**การแยกองค์ประกอบของสมการพหุนาม (polynomail factorization)** คือ

$$\rho(\lambda) = \kappa(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda)$$

เมื่อ κ คือ ค่าคงที่ อาทิ หากสมการเฉพาะอยู่ในรูปสมการกำลังสอง จะได้

$$\begin{aligned}\rho(\lambda) &= \kappa(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\\ &= \kappa\left(\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda^2\right)\end{aligned}$$

และเมื่อสมการเฉพาะอยู่ในรูปสมการกำลังสาม จะได้

$$\begin{aligned}
\rho(\lambda) &= \kappa(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) \\
&= \kappa\left(\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda^2\right)(\lambda_3 - \lambda) \\
&= \kappa\left(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\lambda + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 - \lambda^3\right)
\end{aligned}$$

จากข้างต้น รูปแบบของสมการเฉพาะในกรณีทั่วไปจึงอาจอนุมานได้ว่า อยู่ในรูป

$$\rho(\lambda) = \kappa\left(b_0(-1)^0\lambda^0 + b_1(-1)^1\lambda^1 + b_2(-1)^2\lambda^2 + \ldots + (-1)^n b_n\lambda^n\right)$$

โดยที่ $b_0 = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ $b_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ และ $b_n = 1$

จากนิยามของสมการเฉพาะคือ $\rho(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}|$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\rho(\lambda) = \begin{vmatrix}
a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \ldots & a_{n-1\,n-1} - \lambda & a_{n-1\,n} \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,n-1} & a_{nn} - \lambda
\end{vmatrix}$$

ซึ่งตามนิยามของไลบ์นิซที่ว่า ตัวกำหนดของเมตริกซ์ จะเท่ากับผลรวมของค่าบวกลบของผลคูณของค่าตามแกนของเมตริกซ์ที่ได้สลับแถวไปเรื่อยๆ จนครบ ดังนี้ จึงได้สมการเฉพาะจากนิยามของไลบ์นิซในรูป

$$\begin{aligned}
\rho(\lambda) = {} & (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\ldots(a_{n-1\,n-1} - \lambda)(a_{nn} - \lambda) \\
& - \ (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\ldots(a_{n-1\,n})(a_{n\,n-1}) + \ldots
\end{aligned}$$

ทั้งนี้ หากพิจารณาแต่ละพจน์ทางฝั่งขวาของสมการเฉพาะ จะเห็นได้ว่า เมื่อกระจายพจน์แรกซึ่งเป็นผลคูณกันของวงเล็บที่ประกอบด้วย λ ทั้งสิ้น n วงเล็บ จะให้ค่าที่มี λ^n และ λ^{n-1} รวมอยู่ด้วย แต่สำหรับพจน์ที่สองซึ่งเป็นผลคูณกันของวงเล็บที่ประกอบด้วย λ ทั้งสิ้น $n-2$ วงเล็บนั้นจะให้ค่าที่ไม่มีทั้ง λ^n และ λ^{n-1} รวมอยู่ด้วย และด้วยรูปแบบเช่นนี้ พจน์ที่เหลือซึ่งเป็นผลคูณกันของวงเล็บที่ประกอบด้วย λ น้อยลงไปเรื่อยๆ จะต้องไม่มีค่าที่มี λ^n และ λ^{n-1} รวมอยู่ด้วย ดังนี้ เมื่อได้เทียบค่าสัมประสิทธิ์ของ λ^n จากทั้งสองรูปแบบของสมการเฉพาะข้างต้น คือ รูปแบบที่ได้

จากการแยกองค์ประกอบของสมการพหุนาม และรูปแบบที่ได้จากนิยามค่าเฉพาะของไลบ์นิซแล้ว จะได้ความสัมพันธ์

$$\kappa(-1)^n\lambda^n = (-1)^n\lambda^n$$

ซึ่งให้ค่า $\kappa = 1$ จากผลที่ได้นี้ เมื่อเทียบค่าสัมประสิทธิ์ของ λ^{n-1} จากทั้งสองรูปแบบของสมการเฉพาะในลักษณะเดียวกัน จะได้ความสัมพันธ์

$$(-1)^{n-1}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)\lambda^{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn})\lambda^{n-1}$$

ซึ่งให้ผลลัพธ์คือ

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$$

อนึ่ง จากนิยามของสมการเฉพาะคือ $\rho(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}|$ หากให้ค่าเฉพาะเท่ากับ 0 จะได้สมการเฉพาะที่เท่ากับตัวกำหนดของเมตริกซ์ คือ $\rho(0) = |\boldsymbol{A}|$ ซึ่งเมื่อแทนค่า $\lambda = 0$ ในรูปแบบของสมการเฉพาะที่ได้จากการแยกองค์ประกอบของสมการพหุนาม และใช้ผลลัพธ์คือ $b_0 = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ และ $\kappa = 1$ แล้ว จะได้

$$\begin{aligned}\rho(0) &= \kappa\left(b_0(-1)^0 0^0 + b_1(-1)^1 0^1 + b_2(-1)^2 0^2 + \ldots + (-1)^n b_n 0^n\right)\\ &= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |\boldsymbol{A}|\end{aligned}$$

คุณสมบัติของค่าเฉพาะทั้งสองข้อข้างต้น เป็นเครื่องมือสำคัญที่ช่วยให้สามารถหาค่าเฉพาะในบางกรณี ได้อย่างรวดเร็วยิ่งขึ้น อีกทั้งยังสามารถใช้ตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบของค่าเฉพาะที่หาได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง การตรวจสอบโดยใช้ คุณสมบัติของผลรวมของค่าเฉพาะ ที่จะต้องเท่ากับเทรสของเมตริกซ์ ซึ่งสามารถคำนวณได้อย่างรวดเร็ว สำหรับเมตริกซ์ทุกขนาด และคุณสมบัติของผลคูณของค่าเฉพาะ ที่จะต้องเท่ากับค่ากำหนดของเมตริกซ์ ซึ่งสามารถคำนวณได้ไม่ยากในกรณีเมตริกซ์ขนาด 2×2 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.9 จากตัวอย่างที่ 3.2 เมตริกซ์แกน

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$$

มีค่าเฉพาะคือ $\lambda_1 = a_1, \ldots, \lambda_n = a_n$ ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติที่ว่า $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_i =$

tr$(\boldsymbol{A})$ และ $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \prod_{i=1}^{n} a_i = |\boldsymbol{A}| \quad \square$

ตัวอย่างที่ 3.10 จากตัวอย่างที่ 3.3

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

มีค่าเฉพาะคือ -6 และ 4 ซึ่งเมื่อรวมกันจะเท่ากับ tr$(\boldsymbol{A}) = -2$ และเมื่อคูณกันจะเท่ากับ $|\boldsymbol{A}| = (-2)(0) - (4)(6) = -24 \quad \square$

ตัวอย่างที่ 3.11 หากให้

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

การหาค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ ในกรณีนี้ด้วยการหารากของสมการเฉพาะ เป็นวิธีที่ซับซ้อนเนื่องจากจะต้องหาค่าเฉพาะของเมตริกซ์จัตุรัสขนาด 4×4 อีกทั้งยังต้องแก้สมการพหุนาม ที่มีตัวแปรยกกำลัง 4 อย่างไรก็ตาม จากการพิจารณาค่าภายในเมตริกซ์ จะเห็นได้โดยง่ายว่า ค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ จะต้องประกอบด้วย 1 และ 5 เนื่องจากหากนำเอา 1 ลบจากค่าบนแกนของเมตริกซ์ จะทำให้ทุกค่าในแถวที่สองของ $\boldsymbol{A}$ เท่ากับศูนย์ ซึ่งทำให้ได้ตัวกำหนดที่เท่ากับศูนย์ และในลักษณะเดียวกันนี้ หากนำเอา 5 ลบออกจากค่าบนแกนของเมตริกซ์ จะทำให้ทุกค่าในแถวที่สี่ของ $\boldsymbol{A}$ เท่ากับศูนย์ ซึ่งทำให้ได้ตัวกำหนดเท่ากับศูนย์ นอกจากนี้ ค่าเฉพาะอีกค่าหนึ่งของ $\boldsymbol{A}$ จะต้องเท่ากับ 2 เนื่องจากหากนำเอา 2 ลบออกจากค่าบนแกนของเมตริกซ์ จะทำให้แถวที่หนึ่งและแถวที่สามของเมตริกซ์มีค่าเท่ากัน และให้เมตริกซ์ที่มีแถวที่ไม่เป็นอิสระจากกัน ซึ่งมีตัวกำหนดเท่ากับศูนย์ สำหรับค่าเฉพาะตัวสุดท้ายนั้นหากคุณสมบัติของค่าเฉพาะที่ว่า ผลรวมของค่าเฉพาะจะต้องเท่ากับ tr$(\boldsymbol{A}) = 18$ ดังนี้ ค่าเฉพาะอีกค่าหนึ่งของ $\boldsymbol{A}$ จะต้องเท่ากับ $18 - 1 - 2 - 5 = 10 \quad \square$

3.4 การแปลงให้เป็นเมตริกซ์แกน

จากคุณสมบัติที่ว่าเมตริกซ์แกน เป็นเมตริกซ์ที่สามารถจัดการได้ง่าย ทั้งการคูณ การหาตัวกำหนด การหาอินเวอร์ส และการหาค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะไม่ต่างไปจากการจัดการตัวเลขเดี่ยว ดังนี้ การแปลงเมตริกซ์จัตุรัสใดๆ ให้เป็นเมตริกซ์แกนได้โดยไม่เสียคุณสมบัติของเมตริกซ์เดิม จึงเป็นวิธีหนึ่งที่จะช่วยให้สามารถจัดการเมตริกซ์ดังกล่าวได้ง่าย เช่นเดียวกับการจัดการตัวเลข

เดี่ยว เช่น เมื่อเทียบเมตริกซ์แกน $\boldsymbol{D} = \mathsf{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ กับเมตริกซ์จัตุรัสทั่วไป $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ จะเห็นได้ว่าการยกกำลังเมตริกซ์แกนทำได้ง่ายกว่ามาก เนื่องจาก

$$\boldsymbol{D}^m = \mathsf{diag}(a_1^m, \ldots, a_n^m)$$

กล่าวคือ ผลลัพธ์ของเมตริกซ์แกนซึ่งยกกำลัง จะเท่ากับการกำลังค่าแต่ละค่าบนแกนของเมตริกซ์ ซึ่งต่างจากการยกกำลังเมตริกซ์ทั่วไป ที่จะต้องนำเอาเมตริกซ์คูณซ้ำกัน m ครั้ง อย่างไรก็ตาม หากสามารถหาเมตริกซ์ $\boldsymbol{P} = (p_{ij})_{n\times n}$ ที่มีอินเวอร์สเท่ากับ $\boldsymbol{P}^{-1}$ ซึ่งเมื่อนำทั้งสองเมตริกซ์ไปประกบคูณกับ $\boldsymbol{A}$ แล้ว จะให้ผลลัพธ์เท่ากับเมตริกซ์แกน กล่าวคือ

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$$

ดังนี้ การยกกำลัง $\boldsymbol{A}$ สามารถทำได้ง่าย ไม่ต่างจากการยกกำลัง $\boldsymbol{D}$ เนื่องด้วยจากความสัมพันธ์ข้างต้น จะได้ว่า $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$ ซึ่งให้ $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{P}^{-1}$ กล่าวคือ สำหรับค่าคงที่ m ใดๆ แล้ว

$$\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^m\boldsymbol{P}^{-1}$$

ซึ่งสามารถคำนวณได้ง่าย จากการคูณเมตริกซ์เพียงสามตัว

กระบวนการหาเมตริกซ์ใหม่และอินเวอร์สของเมตริกซ์ใหม่ ที่เมื่อนำมาประกบคูณกับเมตริกซ์เดิมแล้ว สามารถแปลงให้ได้ผลลัพธ์เป็นเมตริกซ์แกน มีชื่อเรียกว่า **การแปลงให้เป็นเมตริกซ์แกน (diagonalization)** [1] ซึ่งสามารถสรุปได้เป็นนิยาม ดังนี้

นิยาม 3.2 การแปลงให้เป็นเมตริกซ์แกน (diagonalization) เมตริกซ์จัตุรัส $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ สามารถแปลงให้เป็นเมตริกซ์แกนได้หากมีเมตริกซ์ $\boldsymbol{P}_{n\times n}$ ซึ่งมีอินเวอร์สเท่ากับ $\boldsymbol{P}^{-1}$ ที่ทำให้ $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$ เมื่อ $\boldsymbol{D}_{n\times n}$ คือเมตริกซ์แกน ■

จากนิยามจะเห็นได้ว่า สิ่งสำคัญของการแปลงเมตริกซ์ใดๆ ให้เป็นเมตริกซ์แกนได้นั้น อยู่ที่การหาเมตริกซ์ $\boldsymbol{P}$ ที่มีคุณสมบัติตามนิยามข้างต้น ทั้งนี้ คุณสมบัติข้อหนึ่งของเมตริกซ์ $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$ ที่ควรรู้ซึ่งจะนำไปสู่การหาเมตริกซ์ $\boldsymbol{P}$ สามารถสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

---

[1] แนวคิดเรื่องการแปลงเมตริกซ์ให้เป็นเมตริกซ์แกน ปรากฏในช่วงแรกๆ ในงานของออกุสตัง หลุย โคชชี่ (Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857) เพื่อศึกษา**ฟังก์ชั่นในรูปแบบกำลังสอง (quadratic form)** ซึ่งเป็นวิธีสำคัญ ในการจำแนกค่าของเมตริกซ์ด้วยค่าเฉพาะของเมตริกซ์ แทนการพิจารณารูปแบบไมเนอร์ต่างๆ ของเมตริกซ์ ดังที่ได้อธิบายไว้ในบทที่สอง

ทฤษฎีบทที่ 3.2 สำหรับเมตริกซ์จัตุรัส $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ ที่สามารถแปลงให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์แกนในรูป $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$ จะได้ว่า

$$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

โดยที่ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ คือค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ ■

การพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้นสามารถทำได้ง่าย โดยการพิสูจน์เป็นลำดับแรกว่า $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ และ $\boldsymbol{A}$ มีสมการเฉพาะเท่ากัน[1] กล่าวคือ จากคุณสมบัติของตัวกำหนดที่ว่า ตัวกำหนดของผลคูณของเมตริกซ์ เท่ากับผลคูณของตัวกำหนดของเมตริกซ์ และตัวกำหนดของอินเวอร์สของเมตริกซ์ เท่ากับอินเวอร์สของตัวกำหนดของเมตริกซ์ ดังนี้

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} - \lambda\boldsymbol{I}| &= |\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}^{-1}\lambda\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}| \\
&= |\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}| \\
&= |\boldsymbol{P}^{-1}| \cdot |(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})| \cdot |\boldsymbol{P}| \\
&= |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}|
\end{aligned}$$

กล่าวคือ $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ และ $\boldsymbol{A}$ ต่างมีสมการเฉพาะเท่ากัน ดังนี้ $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ และ $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ จึงต้องมีค่าเฉพาะเท่ากัน นอกจากนี้ เนื่องจาก $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$ เป็นเมตริกซ์แกน ซึ่งมีคุณสมบัติคือ ค่าบนแกนจะเท่ากับค่าเฉพาะ จึงสรุปได้ว่า $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

จากข้อเท็จจริงข้างต้น เงื่อนไขที่ทำให้สามารถแปลงเมตริกซ์จัตุรัสให้เป็นเมตริกซ์แกนได้ และการหาเมตริกซ์ $\boldsymbol{P}$ เพื่อให้ในการแปลงให้เป็นเมตริกซ์แกน สามารถสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.3 เมตริกซ์จัตุรัส $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ สามารถแปลงให้เป็นเมตริกซ์แกนได้ หาก $\boldsymbol{A}$ มีเวคเตอร์เฉพาะ $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n$ ที่เป็นอิสระจากกัน โดยที่

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

เมื่อ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ คือ ค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{P}_{n\times n} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 & \ldots & \boldsymbol{z}_n \end{pmatrix}$ ■

ทฤษฎีบทข้างต้นสามารถพิสูจน์ได้ง่าย จากที่ $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ เมื่อ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ คือ ค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ ตามทฤษฎีบทที่ 3.3 ดังนี้ หากนำ $\boldsymbol{P}$ คูณทั้งสองข้างของสมการ

[1] ออกุสตัง หลุย โคชชี่ (Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857) ได้นิยามเมตริกซ์ที่มีสมการเฉพาะเท่ากัน แม้ค่าภายในเมตริกซ์จะต่างกัน ไว้ว่า เป็น**เมตริกซ์ที่เหมือนกัน (similar matrix)**

จะได้ว่า

$$\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P}\text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

ซึ่งเมื่อแทนค่า $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 & \ldots & \boldsymbol{z}_n \end{pmatrix}$ โดยที่ $\boldsymbol{z}_j$ คือเวคเตอร์ขนาด $n \times 1$ ใดๆ จะได้

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 & \ldots & \boldsymbol{z}_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 & \ldots & \boldsymbol{z}_n \end{pmatrix}\text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{Az}_1 & \boldsymbol{Az}_2 & \ldots & \boldsymbol{Az}_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{z}_1 & \lambda_2\boldsymbol{z}_2 & \ldots & \lambda_n\boldsymbol{z}_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

กล่าวคือ $\boldsymbol{Az}_1 = \lambda_1\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{Az}_n = \lambda_1\boldsymbol{z}_n$ ซึ่งจากนิยามของค่าเฉพาะ และเวคเตอร์เฉพาะ จึงได้ว่า $\boldsymbol{z}_j$ และ λ_j คือ เวคเตอร์เฉพาะสำหรับค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ ตามลำดับ เมื่อ $j = 1, \ldots, n$ สำหรับส่วนแรกของทฤษฎีบท โดยที่ $\boldsymbol{P}^{-1}$ สามารถหาค่าได้ก็ต่อเมื่อตัวกำหนดของ $\boldsymbol{P}$ ไม่เท่ากับศูนย์ ดังนี้ แต่ละคอลัมน์ของ $\boldsymbol{P}$ หรือแต่ละเวคเตอร์เฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ จึงต้องเป็นอิสระระหว่างกัน

ตัวอย่างที่ 3.11 จากตัวอย่างที่ 3.3

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

มีค่าเฉพาะคือ -6 และ 4 และเวคเตอร์เฉพาะคือ $s\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ และ $s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$ ตามลำดับ เวคเตอร์เฉพาะเมื่อกำหนดให้ $s = 1$ จึงสามารถประกอบกันเป็นเมตริกซ์ $\boldsymbol{P}$ ได้ในรูป

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ซึ่งมีอินเวอร์สคือ

$$\boldsymbol{P}^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

จากข้างต้น จะได้ว่า

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ซึ่งเป็นเมตริกซ์แกน ที่ค่าบนแกนเท่ากับค่าเฉพาะของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ คือ -6 และ 4 ตามลำดับ $\square$

เมตริกซ์ลักษณะพิเศษอีกประเภทหนึ่ง ซึ่งสามารถทำให้เป็นเมตริกซ์แกนได้ง่าย อีกทั้งยังพบเห็นได้บ่อยในทางเศรษฐศาสตร์ คือ **เมตริกซ์สมมาตร (symmetric matrix)** อาทิ เมตริกซ์สลัทซ์กีในทฤษฎีผู้บริโภค เมตริกซ์ค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชั่นที่อยู่ในรูปแบบกำลังสอง และเมตริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม ต่างเป็นเมตริกซ์สมมาตรทั้งสิ้น โดยกระบวนการแปลงเมตริกซ์สมมาตรให้เป็นเมตริกซ์แกน สามารถทำให้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.4[1] เมตริกซ์สมมาตร $\boldsymbol{A}$ ขนาด $n \times n$ ที่ทุกค่าในเมตริกซ์เป็นจำนวนจริง มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. ค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ ทุกค่าเป็นจำนวนจริงซึ่งไม่ซ้ำกัน

2. สำหรับทุกค่าเฉพาะ λ_1 และ λ_2 ของ $\boldsymbol{A}$ ที่ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ที่มีเวคเตอร์เฉพาะคือ $\boldsymbol{x}_1$ และ $\boldsymbol{x}_2$ ตามลำดับ $\boldsymbol{x}_1$ และ $\boldsymbol{x}_2$ จะตั้งฉากกัน กล่าวคือ $\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2 = 0$

3. $\boldsymbol{A}$ สามารถทำให้เป็นเมตริกซ์แกนได้เสมอ กล่าวคือ มีเมตริกซ์ $\boldsymbol{Q}$ ที่

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

เมื่อ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ คือค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$

4. $\boldsymbol{Q}$ เป็น**เมตริกซ์ที่ตั้งฉาก (orthogonal matrix)** ที่มีคุณสมบัติคือ $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}'$ $\blacksquare$

การพิสูจน์ข้อแรกของทฤษฎีบท ซึ่งโคชชีได้พิสูจน์ไว้นั้น เป็นเรื่องซับซ้อนซึ่งผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ จากตำราพีชคณิตเชิงเส้นระดับสูง เช่น Hadley (1973) อย่างไรก็ตาม การพิสูจน์ข้อที่สองของทฤษฎีบท สามารถทำได้ไม่ยาก จากนิยามของค่าเฉพาะ กล่าวคือ สำหรับทุกค่าเฉพาะ λ_1 และ λ_2 ของ $\boldsymbol{A}$ ที่มีเวคเตอร์เฉพาะคือ $\boldsymbol{z}_1$ และ $\boldsymbol{z}_2$ ตามลำดับ จะได้ว่า $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_1 = \lambda_1\boldsymbol{z}_1$ และ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_2 = \lambda_2\boldsymbol{z}_2$ ซึ่งเมื่อนำ $\boldsymbol{z}_2'$ และ $\boldsymbol{z}_1'$ คูณทั้งสองข้างของแต่ละสมการแล้ว จะได้ $\boldsymbol{z}_2'\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_1 = \lambda_1\boldsymbol{z}_2'\boldsymbol{z}_1$ และ $\boldsymbol{z}_1'\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_2 = \lambda_2\boldsymbol{z}_1'\boldsymbol{z}_2$ จากคุณสมบัติของเมตริกซ์สมมาตรที่ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$ ทรานส์โพสค่าทางฝั่งซ้ายของสมการแรก จะต้องเท่ากับค่าทางฝั่งซ้ายของสมการที่สอง กล่าวคือ $(\boldsymbol{z}_2'\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_1)' =$

---

[1] ทฤษฎีบทนี้ เป็นที่รู้จักกันในชื่อว่า **ทฤษฎีบทสเปกตรัมของเมตริกซ์สมมาตร (Spectrum theorem of symmetric matrices)** ถูกพัฒนาขึ้นโดยออกุสตัง หลุย โคชชี (Augustin Louis Cauchy, 1789-1857) แนวคิดดังปรากฏในทฤษฎีบทนี้ยังถูกขยายเพิ่มเติมให้ครอบคลุมกรณีที่หลากหลายขึ้นโดยจอห์น ฟอน นอยมัน (John von Neumann, 1908-1957) นักคณิตศาสตร์ชาวฮังกาเรียนอเมริกันผู้วางรากฐานแนวคิดเรื่องทฤษฎีเกม

รูปที่ 3.3 โอกุสตัง หลุย โคชชี (Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857)* โคชชีเป็นนักคณิตศาสตร์ร่วมสมัยกับลาปลาส ในยุครุ่งเรืองทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ของฝรั่งเศส ชีวิตของโคชชีมีความคล้ายคลึงกับลาปลาสค่อนข้างมาก กล่าวคือ ทั้งคู่ต่างเป็นอาจารย์คณิต-ศาสตร์ ที่ภายหลังผันตัวไปเป็นนักการเมือง โดยในสมัยจักรพรรดินโปเลียน โคชชีดำรงตำแหน่งเป็นเลขาธิการวุฒิสภา ซึ่งขึ้นกับลาปลาสที่ขณะนั้นดำรงตำแหน่งเป็น รัฐมนตรีว่าการกระทรวงมหาดไทยของฝรั่งเศส จากการเข้าดำรงตำแหน่งทางการเมืองนี้ ทำให้โคชชีได้รับบรรดาศักดิ์ขุนนางระดับบารอน (baron) นอกจากทฤษฎีบทสเปคตรัมของเมตริกซ์สมมาตรแล้ว มรดกทางคณิตศาสตร์ที่โคชชีพัฒนาขึ้น ล้วนเป็นเครื่องมือที่แพร่หลายและยังใช้กันอยู่ในปัจจุบัน อาทิ แนวคิดและวิธีการหาลิมิตของฟังก์ชั่น ทฤษฎีบทฟังก์ชั่นโดยปริยาย (immediate function theorem) ในแคลคูลัส ทฤษฎีบทค่ากลาง (intermediate value theorem) ในคณิตศาสตร์วิเคราะห์ ตลอดจนการกระจายแบบโคชชี (Cauchy distribution) ในความน่าจะเป็นและสถิติ

*https://en.wikipedia.org/wiki/Augustin-Louis_Cauchy#/media/File:Augustin-Louis_Cauchy_1901.jpg

$\boldsymbol{z}_1'\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_2 = \lambda_1\boldsymbol{z}_1'\boldsymbol{z}_2$ จึงได้ผลลัพธ์ที่ว่า

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{z}_1'\boldsymbol{z}_2 = 0$$

ซึ่งหาก $\lambda_1 \neq \lambda_2$ จะได้ว่า $\boldsymbol{z}_1'\boldsymbol{z}_2 = 0$

ข้อที่สามของทฤษฎีข้างต้นสามารถเห็นได้ชัดว่าเป็นจริง ในกรณีที่ค่าเฉพาะทุกค่าของเมตริกซ์เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน[1] และสำหรับข้อสุดท้ายของทฤษฎีบท จากข้อเท็จจริงตามทฤษฎีบทที่ 3.3 ที่ว่า คอลัมน์ของ $\boldsymbol{Q}$ คือ เวคเตอร์เฉพาะที่ไม่ซ้ำกัน และเป็นอิสระจากกัน ดังนี้ หากให้ $\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \dots & \boldsymbol{z}_n \end{pmatrix}$ จะได้

$$\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1'\boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_1'\boldsymbol{z}_2 & \dots & \boldsymbol{z}_1'\boldsymbol{z}_n \\ \boldsymbol{z}_2'\boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2'\boldsymbol{z}_2 & \dots & \boldsymbol{z}_2'\boldsymbol{z}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{z}_n'\boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_n'\boldsymbol{z}_2 & \dots & \boldsymbol{z}_n'\boldsymbol{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1'\boldsymbol{z}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{z}_2'\boldsymbol{z}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \boldsymbol{z}_n'\boldsymbol{z}_n \end{pmatrix}$$

ซึ่งเป็นเมตริกซ์แกน จากคุณสมบัติในข้อที่สองของทฤษฎีบทที่ว่า $\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_j = 0$ เมื่อ $i \neq j$ ดังนี้ หากให้

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{z}}_1 & \dots & \tilde{\boldsymbol{z}}_n \end{pmatrix}$$

โดยที่ $\tilde{\boldsymbol{z}}_i = (\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{z}_i)^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{z}_i$ จะได้เวคเตอร์ที่มีคุณสมบัติเพิ่มเติมคือ $\tilde{\boldsymbol{z}}_i'\tilde{\boldsymbol{z}}_i = 1$ กล่าวคือ

$$\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}$$

หรือ $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}'$

ตัวอย่างที่ 3.12 จากเมตริกซ์

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

สมการเฉพาะของเมตริกซ์ คือ $(4-\lambda)(1-\lambda) - 4 = \lambda(\lambda - 5) = 0$ ซึ่งมีรากคือค่าเฉพาะ

[1]ผู้สนใจสามารถศึกษาการพิสูจน์คุณสมบัติตามข้อที่สาม ในกรณีที่ค่าเฉพาะบางค่าซ้ำกันเพิ่มเติม ได้จาก Hadley (1973)

เท่ากับ $\lambda = 0, 5$ และเวคเตอร์เฉพาะคือ

$$\boldsymbol{z}_1 = s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \boldsymbol{z}_2 = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

สำหรับ $s, t \in \mathbb{R}$ ตามลำดับ จากเวคเตอร์เฉพาะข้างต้นจะได้

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ และ } \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ดังนี้ เมื่อกำหนดให้ $s = \sqrt{5}^{-1}$ จะได้เมตริกซ์ตั้งฉาก คือ

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

ที่มีคุณสมบัติ คือ $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$ หรือ $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}'$ ทั้งนี้ กระบวนการแปลงให้เป็นเมตริกซ์แกน สามารถทำได้โดยการนำ $\boldsymbol{Q}'$ และ $\boldsymbol{Q}$ คูณด้านหน้าและหลังของ $\boldsymbol{A}$ คือ

$$\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ซึ่งเป็นเมตริกซ์แกน ที่ค่าบนแกนเท่ากับค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ $\square$

3.5 สมการผลต่าง

สมการผลต่าง (difference equation) เป็นเครื่องมือสำคัญใน**การวิเคราะห์เชิงพลวัต (dynamic analysis)** ทางเศรษฐศาสตร์ ที่ใช้ศึกษาการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรในแต่ละช่วงเวลา[1] เช่น หากต้องการทราบว่า ถ้าฝากเงินจำนวนหนึ่งไว้ กับธนาคาร ที่ให้ดอกเบี้ยทบต้นในอัตราร้อยละ r ต่อปี หากธนาคารคำนวณดอกเบี้ยให้เมื่อครบกำหนด ยอดเงินในธนาคารเมื่อครบกำหนดจะเท่ากับเท่าใด คำถามนี้เป็นคำถามพื้นฐานทางการวิเคราะห์เชิงพลวัตในวิชาการเงิน โดยจากข้อมูลทั้งหมดข้างต้น จะสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเงินฝากและเงินฝากในปีถัดไปได้

[1] แนวคิดเรื่องสมการผลต่าง (difference equation) ซึ่งศึกษาความเปลี่ยนแปลงของตัวแปรระหว่างช่วงเวลาที่มีค่าไม่ต่อเนื่อง (discrete) เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์เชิงพลวัต ที่มักพิจารณาควบคู่ไปกับแนวคิดเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) ซึ่งศึกษาความเปลี่ยนของตัวแปรเมื่อให้เวลามีค่าต่อเนื่อง (continuous)

คือ

$$x_{n+1} = (1+r)x_n$$

โดยที่ x_n และ x_{n+1} คือยอดเงินที่ฝากไว้ในปี n และปี $n+1$ ตามลำดับ สมการข้างต้นเป็นตัวอย่างของสมการผลต่าง ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าของตัวแปร คือ ยอดเงินในธนาคารในแต่ละขณะเวลา อย่างไรก็ตาม สมการผลต่างดังที่ได้แสดงในรูปแบบข้างต้น ยังไม่ใช่คำตอบของสมการ ด้วยว่า x_n นั้นไม่ใช่ค่าเบ็ดเสร็จที่ขึ้นกับพารามิเตอร์ตั้งต้นเสียทีเดียว หากเป็นตัวแปรที่ยังสามารถขยายความสัมพันธ์ต่อไปได้อีก คือ $x_n = (1+r)x_{n-1}$ และเช่นเดียวกันนี้ โดยที่ x_{n-1} ยังสามารถขยายให้อยู่ในรูปของ x_{n-2} ต่อไปได้อีก คำตอบของสมการผลต่างจึงต้องไม่ขึ้นอยู่กับตัวแปร แต่ต้องอยู่ในรูปของค่าตั้งต้น ที่ไม่สามารถขยายความสัมพันธ์ต่อไปได้อีก เช่น หากให้เงินฝากในปีแรกเท่ากับ x_0 จะได้ว่า $x_1 = (1+r)x_0$ และ $x_2 = (1+r)x_1 = (1+r)^2x_0$ ดังนี้ไปเรื่อยๆ และสามารถสรุปได้ด้วยวิธีอนุมานว่า

$$x_n = (1+r)^n x_0$$

สมการนี้ถือเป็นคำตอบของสมการผลต่าง เนื่องจากเป็นฟังก์ชั่นของค่าตั้งต้น (x_0) และค่าพารามิเตอร์ (r) ซึ่งไม่สามารถแทนค่าความสัมพันธ์ใดๆ เพิ่มเติมได้อีก

ตัวอย่างข้างต้น เป็นตัวอย่างการวิเคราะห์เชิงพลวัตที่ไม่ซับซ้อน เนื่องจากเป็นเพียงความสัมพันธ์ข้ามเวลาของตัวแปรเพียงตัวเดียว ที่สามารถใช้การแทนค่าตัวแปรซ้ำๆ กัน เพื่อถอดรูปแบบความสัมพันธ์สุดท้าย ให้เป็นคำตอบของสมการออกมาได้ไม่ยาก อย่างไรก็ตาม ในกรณีความสัมพันธ์ข้ามเวลาของตัวแปรจำนวนมาก ซึ่งอยู่ในรูปของระบบสมการนั้น การหาคำตอบของสมการผลต่าง มักมีความซับซ้อนอย่างมาก และไม่อาจใช้วิธีการอนุมานข้างต้นเพื่อหาคำตอบได้โดยตรง เช่น ในกรณีของสมการผลต่าง k ตัวแปร ที่อยู่ในรูประบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned}
x_{1n+1} &= a_{11}x_{1n} + a_{12}x_{2n} + \ldots + a_{1k}x_{kn} \\
x_{2n+1} &= a_{21}x_{2n} + a_{22}x_{2n} + \ldots + a_{2k}x_{kn} \\
&\vdots \\
x_{kn+1} &= a_{k1}x_{2n} + a_{k2}x_{2n} + \ldots + a_{kk}x_{kn}
\end{aligned}$$

ซึ่งสามารถแสดงในรูปของเมตริกซ์ คือ

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n$$

เมื่อ

$$\boldsymbol{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{pmatrix} \text{ และ } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

แม้การหาคำตอบของระบบสมการผลต่างข้างต้น จะสามารถทำได้ในลักษณะเดียวกัน กับการหาคำตอบของสมการผลต่าง ที่ประกอบด้วยตัวแปรเดียว คือ หากมีตัวแปรตั้งต้น คือ $\boldsymbol{x}_0$ แล้ว การแทนค่าในความสัมพันธ์ซ้ำๆ กัน จะให้ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรและตัวแปรตั้งต้น ที่คล้ายกับความสัมพันธ์ที่ได้จากการแทนค่าในสมการผลต่าง ที่ประกอบด้วยตัวแปรเดียว ซึ่งอยู่ในรูป

$$\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{A}^n \boldsymbol{x}_0$$

อนึ่ง โดยที่การคำนวณค่า $\boldsymbol{A}^n$ เป็นเรื่องซับซ้อน คำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้นในลักษณะข้างต้น จึงอาจไม่เป็นประโยชน์เท่าใดนัก ด้วยว่ายังคงเป็นรูปแบบคำตอบซึ่งขึ้นอยู่กับค่า $\boldsymbol{A}^n$ ที่ยากในการคำนวณ อย่างไรก็ตาม จากความรู้เรื่องการแปลงให้เป็นเมตริกซ์แกนข้างต้น คำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้น ยังสามารถแสดงได้ในรูปฟังก์ชั่นของค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ ซึ่งง่ายต่อการคำนวณกว่ามาก โดยอาจจำแนกได้เป็นสามกรณี ตามลักษณะค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ ได้แก่ กรณีที่เป็นจำนวนจริงไม่ซ้ำกัน กรณีที่เป็นจำนวนจริงซ้ำกัน และกรณีที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

กรณีที่ค่าเฉพาะของเมตริกซ์เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่ซ้ำกัน

จากคำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้น $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n$ซึ่งอยู่ในรูป $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}_0$ หาก $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์แกน กล่าวคือ $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$ การหาค่า $\boldsymbol{A}^n$ เป็นสิ่งที่ทำได้ง่ายเนื่องจาก

$$\boldsymbol{A}^n = \mathsf{diag}(a_{11}^n, \dots, a_{kk}^n)$$

ซึ่งให้คำตอบของระบบสมการผลต่าง ที่ค่าของตัวแปรแต่ละตัว เท่ากับคำตอบของสมการผลต่างตัวแปรเดียว คือ $x_{in} = a_{ii}^n x_{i0}$ สำหรับทุกค่า $i = 1, \dots, k$ อย่างไรก็ตาม ในกรณีทั่วไป ที่ค่าเฉพาะของเมตริกซ์ เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่ซ้ำกันนั้น การหาคำตอบของสมการผลต่าง โดยการแปลง $\boldsymbol{A}$ ให้เป็นเมตริกซ์แกน เป็นวิธีหนึ่งที่สามารถนำมาใช้ลดความยุ่งยาก ของการยกกำลังเมตริกซ์ได้ โดยในกรณีนี้ หากสามารถหาเมตริกซ์ $\boldsymbol{P} = (p_{ij})_{k\times k}$ ซึ่งมีอินเวอร์สเท่ากับ $\boldsymbol{P}^{-1}$ ซึ่งเมื่อนำไปประกบคูณกับ $\boldsymbol{A}$ แล้วจะแปลง $\boldsymbol{A}$ ให้เป็นเมตริกซ์แกน กล่าวคือ

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$$

เมื่อ $\boldsymbol{D}$ เป็นเมตริกซ์แกนที่ค่าบนแกนเท่ากับค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ กล่าวคือ

$$\boldsymbol{D} = \mathsf{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$$

โดยที่ $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ คือค่าเฉพาะที่เป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกันของ $\boldsymbol{A}$ และ

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \ldots & \boldsymbol{z}_k \end{pmatrix}$$

โดยที่ $\boldsymbol{z}_i$ คือเวคเตอร์เฉพาะของค่าเฉพาะ λ_i ที่เป็นอิสระจาก $\boldsymbol{z}_j$ เมื่อ $i \neq j$ จากผลลัพธ์ที่ได้พิจารณาก่อนหน้านี้ การยกกำลัง $\boldsymbol{A}$ สามารถทำได้โดยง่าย คือ

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^n\boldsymbol{P}^{-1}$$

ซึ่งเมื่อนำไปแทนค่า ในคำตอบของระบบสมการผลต่างข้างต้นแล้ว จะได้คำตอบของระบบสมการผลต่าง ที่ขึ้นอยู่กับค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะ ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์และตัวแปรตั้งต้น ซึ่งอยู่ในรูป

$$\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^n\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}_0$$

คำตอบของระบบสมการผลต่างในรูปข้างต้น ยังสามารถแสดงให้อยู่ในอีกรูปแบบหนึ่ง ซึ่งเป็นที่นิยมกัน คือ หากกำหนดให้ตัวแปร $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}$ หรือ $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ แล้วจะได้ความสัมพันธ์

$$\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^n\boldsymbol{X}_0$$

ซึ่งหากให้

$$\boldsymbol{X}_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$$

เมื่อแทนค่าตัวแปรที่เกี่ยวข้องทั้งหมด คือ เมตริกซ์ของค่าเฉพาะ คือ $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \ldots & \boldsymbol{z}_k \end{pmatrix}$ เมตริกซ์แกนยกกำลัง n คือ $\boldsymbol{D}^n = \mathsf{diag}(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_k^n)$ และ $\boldsymbol{X}_0$ จะได้คำตอบของระบบสมการผลต่างคือ

$$\boldsymbol{x}_n = c_1\lambda_1^n\boldsymbol{z}_1 + \ldots + c_k\lambda_k^n\boldsymbol{z}_k$$

การหาค่าคงที่ $c_1, \ldots, c_k$ สามารถทำได้จากกรณี $n = 0$ ซึ่งจากความสัมพันธ์ $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}_0$ จะ

ได้

$$\boldsymbol{x}_0 = c_1\boldsymbol{z}_1 + \ldots + c_k\boldsymbol{z}_k$$

โดยที่ $c_1, \ldots, c_k$ คือ ค่าคงที่ที่ทำให้ $\boldsymbol{x}_0$ ในรูปข้างต้นเท่ากับค่าตั้งต้น $\bar{\boldsymbol{x}}_0$

ทฤษฎีบทที่ 3.5 ระบบสมการผลต่างในรูป $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n$ เมื่อ $\boldsymbol{x}$ คือ เวคเตอร์ขนาด $k \times 1$ และ $\boldsymbol{A}$ คือ เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขนาด $k \times k$ มีคำตอบคือ

$$\boldsymbol{x}_n = c_1\lambda_1^n\boldsymbol{z}_1 + \ldots + c_k\lambda_k^n\boldsymbol{z}_k$$

เมื่อ $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ คือค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ ที่เป็นจำนวนจริงไม่ซ้ำกัน ที่มีเวคเตอร์เฉพาะคือ $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_k$ ตามลำดับ และ $c_1, \ldots, c_k$ คือค่าคงที่ ที่ทำให้ $\boldsymbol{x}_0 = c_1\boldsymbol{z}_1 + \ldots + c_k\boldsymbol{z}_k$ เท่ากับค่าตั้งต้น $\bar{\boldsymbol{x}}_0$ ■

ตัวอย่างที่ 3.13 จากตัวอย่างที่ 3.3 เมตริกซ์

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

มีค่าเฉพาะคือ -6 และ 4 และเวคเตอร์เฉพาะคือ

$$s\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}; t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

เมื่อ $s, t \in \mathbb{R}$ ตามลำดับ จากทฤษฎีบทที่ 3.5 ระบบสมการผลต่างเชิงเส้นในรูป $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n$ เมื่อ $\boldsymbol{x}$ คือเวคเตอร์ขนาด 2×1 มีคำตอบคือ

$$\boldsymbol{x}_n = c_1(-6)^n\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 4^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

สมมติให้ค่าตั้งต้นคือ

$$\bar{\boldsymbol{x}}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

จากความสัมพันธ์

$$\boldsymbol{x}_0 = c_1\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

จะสามารถหา c_1 และ c_2 ได้ โดยการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ที่ประกอบด้วย 2 ตัวแปร และ 2 สมการ ซึ่งเท่ากับ $c_1 = \frac{2}{5}$ และ $c_2 = \frac{6}{5}$ ดังนี้ คำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้นนี้จึงเท่ากับ

$$\boldsymbol{x}_n = \left(\frac{2}{5}\right)(-6)^n \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\frac{6}{5}\right)4^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \square$$

ทั้งนี้ จะเห็นได้ว่าคำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้นข้างต้น อยู่ในรูปที่สามารถคำนวณหาค่าของ $\boldsymbol{x}_n$ สำหรับแต่ละค่า n ที่ต้องการได้ง่าย โดยไม่จำเป็นต้องอาศัยการคูณเมตริกซ์แต่อย่างใด

กรณีที่ค่าเฉพาะของเมตริกซ์เป็นจำนวนจริงซึ่งซ้ำกัน

ปัญหาสำคัญในกรณีที่ค่าเฉพาะของเมตริกซ์ เป็นจำนวนจริงซึ่งซ้ำกันนั้น เกิดจากการที่ค่าเฉพาะค่าเดียวกัน ไม่อาจสร้างเวคเตอร์เฉพาะซึ่งเป็นอิสระจากกันได้ จึงย่อมไม่อาจสร้างเมตริกซ์ ที่ใช้แปลงเมตริกซ์เดิมให้เป็นเมตริกซ์แกนได้ เนื่องด้วยเมตริกซ์ที่แต่ละคอลัมน์ไม่เป็นอิสระจากกันย่อมไม่มีอินเวอร์ส เช่น หากให้

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า ค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}_1$ คือ λ ที่ทำให้ $(2-\lambda)^2 = 0$ นั้น มีอยู่ค่าเดียว คือ $\lambda = 2$ และเช่นเดียวกัน ค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}_2$ คือ λ ที่ทำให้ $(3-\lambda)(1-\lambda)+1 = (\lambda-2)^2 = 0$ มีอยู่ค่าเดียว คือ $\lambda = 2$ เช่นกัน อย่างไรก็ตาม หากพิจารณาเวคเตอร์เฉพาะของแต่ละเมตริกซ์ จะได้ว่า $\boldsymbol{A}_1$ มีเวคเตอร์เฉพาะ คือ $\boldsymbol{z}$ ที่ทำให้ $(\boldsymbol{A}_1 - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ คือ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งในกรณีนี้ ไม่ว่า z_1 และ z_2 จะเป็นค่าใด ล้วนทำให้ $(\boldsymbol{A}_1 - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ เสมอ กล่าวคือเวคเตอร์เฉพาะของ $\boldsymbol{A}_1$ คือ $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2$ อย่างไรก็ตาม $\boldsymbol{A}_2$ มีเวคเตอร์เฉพาะ คือ $\boldsymbol{z}$ ที่ทำให้ $(\boldsymbol{A}_2 - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ คือ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\boldsymbol{z} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$$

อนึ่ง ผลลัพธ์ของทั้งสองกรณีข้างต้น มีนัยยะที่แตกต่างกันอย่างยิ่ง ต่อเงื่อนไขของการแปลงให้เมตริกซ์แกน กล่าวคือ จากเงื่อนไขในทฤษฎีบทที่ 3.3 เมตริกซ์จัตุรัส $\boldsymbol{A}$ ขนาด $n \times n$ จะสามารถแปลงให้เป็นเมตริกซ์แกนได้ ก็ต่อเมื่อ $\boldsymbol{A}$ มีเวคเตอร์เฉพาะ n เวคเตอร์ ที่ทั้งหมดเป็นอิสระจากกันเท่านั้น ซึ่งสำหรับ $\boldsymbol{A}_1$ ซึ่งมีเวคเตอร์เฉพาะ คือ $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2$ แล้ว ย่อมหาเวคเตอร์เฉพาะสองคู่ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่านี้ได้เสมอ แต่สำหรับ $\boldsymbol{A}_2$ ซึ่งมีเวคเตอร์เฉพาะ คือ $\boldsymbol{z}$ เมื่อ $z_1 = -z_2$ กลับไม่สามารถหาเวคเตอร์เฉพาะคู่ใดๆ ที่เป็นอิสระจากกันได้ ทั้งนี้ ในกรณีแรกซึ่งสามารถแปลงเป็นเมตริกซ์แกนได้เสมอนั้น จะเห็นได้ว่า เป็นกรณีที่ไม่เป็นสาระ (trivial) สักเท่าใดนั้น ด้วยว่า $\boldsymbol{A}_1$ นั้นเป็นเมตริกซ์แกนแต่แรกอยู่แล้ว การจะแปลงเมตริกซ์แกนให้เป็นเมตริกซ์แกน จึงย่อมไม่ใช่กรณีที่น่าสนใจอะไร แต่ในกรณีที่สองซึ่งไม่ใช่เมตริกซ์แกนอยู่แต่แรกนั้น โดยที่เมตริกซ์ที่ต้องการแปลง จะต้องมีเวคเตอร์เฉพาะที่เป็นอิสระจากกัน ครบตามขนาดของเมตริกซ์ ซึ่งเป็นไปได้ในกรณีนี้ เมตริกซ์ซึ่งมีค่าเฉพาะซ้ำกัน ซึ่งไม่ใช่เมตริกซ์แกนอยู่แต่แรก จึงไม่สามารถแปลงให้เป็นเมตริกซ์แกน โดยนัยแห่งทฤษฎีบทที่ 3.3 ได้ อย่างไรก็ตาม แม้เมตริกซ์ในลักษณะนี้ จะไม่อาจแปลงให้เป็นเมตริกซ์แกนได้โดยตรง แต่ยังคงสามารถแปลงให้อยู่ในรูป ที่ใกล้เคียงกับเมตริกซ์แกน ซึ่งอยู่ใน**รูปแบบมาตรฐานของฌอดาน (Jordan canonical form)**[1] ได้ คือ

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

ทั้งนี้ การที่เมตริกซ์ในรูปแบบมาตรฐานของฌอดาน ไม่ใช่เมตริกซ์แกนเสียทีเดียวนั้น ย่อมก่อให้เกิดคำถามสำคัญ ที่ต้องพิจารณาต่อไปว่า เมตริกซ์ซึ่งอยู่ในรูปแบบเช่นนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการหาคำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้นได้อย่างไร โดยในที่นี้จะได้พิจารณากระบวนการหาคำตอบ ในกรณีที่ค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน ในสองขั้นตอน คือ ในขั้นตอนแรก จะเป็นการ

[1]แนวคิดเรื่องนี้ ถูกเสนอโดยกามีย์ ฌอดาน (Camille Jordan, 1838-1922) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ซึ่งเป็นคนละคนกันกับ วิลเฮล์ม จอร์แดน (Wilhelm Jordan, 1842-1899) นักวิทยาศาสตร์ชาวเยอรมัน ซึ่งเสนอแนวคิดเรื่องการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์และจอร์แดน (Gauss-Jordan elimination)

หาเวคเตอร์เฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะทั่วไปของ $\boldsymbol{A}$ จากนั้นในขั้นตอนที่สอง จึงจะได้นำเวคเตอร์เฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะทั่วไป ซึ่งหาได้ในขั้นตอนแรก มาใช้หาคำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้น $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n$ ต่อไป

นิยามที่ 3.3 สมมติให้ λ คือค่าเฉพาะค่าหนึ่งของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ **เวคเตอร์เฉพาะทั่วไป (Generalized eigenvector)** ของ $\boldsymbol{A}$ คือ $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$ ซึ่งมีคุณสมบัติคือ (1) $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{z} \neq 0$ แต่ (2) $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})^i \boldsymbol{z} = 0$ เมื่อ $i > 1$ ■

จากนิยามข้างต้น หากเปรียบเทียบนิยามของเวคเตอร์เฉพาะ และเวคเตอร์เฉพาะทั่วไปแล้ว อาจกล่าวได้ว่า หาก $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})^i \boldsymbol{z} = 0$ หาก $i = 1$ ก็ถือได้ว่า $\boldsymbol{z}$ คือเวคเตอร์เฉพาะ และหาก $i > 1$ ก็ถือได้ว่า $\boldsymbol{z}$ คือเวคเตอร์เฉพาะทั่วไป

ตัวอย่างที่ 3.14 สมมติให้ $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่งมีค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริงเพียงค่าเดียวคือ λ หากให้ $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{z}_1 \ \boldsymbol{z}_2)$ ดังนั้น

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

เมื่อนำ $\boldsymbol{P}$ คูณทั้งสองข้างของสมการและแทนค่า $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{z}_1 \ \boldsymbol{z}_2)$ จะได้

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

กล่าวคือ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_1 = \lambda \boldsymbol{z}_1$ หรือ $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_1 = 0$ และ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_1 + \lambda \boldsymbol{z}_2$ หรือ $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_1$ สำหรับผลลัพธ์สุดท้ายนั้น หากนำเอา $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$ คูณทั้งสองข้างของสมการ และใช้ผลลัพธ์ข้อแรกที่ว่า $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_1 = 0$ จะได้ว่า $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})^2 \boldsymbol{z}_2 = 0$ จากนิยามข้างต้น จะได้ว่า $\boldsymbol{z}_1$ และ $\boldsymbol{z}_2$ คือเวคเตอร์เฉพาะ และเวคเตอร์เฉพาะทั่วไปของ $\boldsymbol{A}$ ตามลำดับ □

ตัวอย่างที่ 3.15 สมมติให้ $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด 3×3 ซึ่งมีค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริงเพียงค่าเดียวคือ λ จะได้ว่า

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

เมื่อนำ $\boldsymbol{P}$ คูณทั้งสองข้างของสมการและแทนค่า $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{z}_1\ \boldsymbol{z}_2\ \boldsymbol{z}_3)$ จะได้ว่า

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{z}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ซึ่งให้ผลลัพธ์ในลักษณะเดียวกัน กับผลลัพธ์ในกรณี $\boldsymbol{A}$ ขนาด 2×2 กล่าวคือ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_1 = \lambda\boldsymbol{z}_1$ หรือ $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_1 = 0$ และ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_1 + \lambda\boldsymbol{z}_2$ หรือ $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_1$ และ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_3 = \boldsymbol{z}_2 + \lambda\boldsymbol{z}_3$ หรือ $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_3 = \boldsymbol{z}_2$ ดังนั้น

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_1 = 0; (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})^2\boldsymbol{z}_2 = 0; (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})^3\boldsymbol{z}_3 = 0$$

กล่าวคือ $\boldsymbol{z}_1$ คือ เวคเตอร์เฉพาะและ $\boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3$ คือ เวคเตอร์เฉพาะทั่วไปของ $\boldsymbol{A}$ $\square$

คุณสมบัติของเวคเตอร์เฉพาะทั่วไป ยังสามารถอนุมานต่อไปได้ ในกรณีทั่วไปสำหรับ $\boldsymbol{A}$ ขนาด $k \times k$ ซึ่งให้ผลลัพธ์คือ

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})^i\boldsymbol{z}_i = 0$$

เมื่อ $i = 1, \ldots, k$ และจากคุณสมบัติของเวคเตอร์เฉพาะทั่วไปข้างต้นนี้ การแปลงเมตริกซ์ดั้งเดิม คือ $\boldsymbol{A}$ ที่มีขนาด $k \times k$ ให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของฌอดาน ด้วย $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{J}$ จึงสามารถทำได้ โดยเริ่มจากการพิจารณาว่า

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} &= \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \ldots & \boldsymbol{z}_k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_1 + \lambda\boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{z}_2 + \lambda\boldsymbol{z}_3 & \ldots & \boldsymbol{z}_{k-1} + \lambda\boldsymbol{z}_k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \ldots & \boldsymbol{z}_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{J}
\end{aligned}$$

จากนั้นเมื่อนำเอา $\boldsymbol{P}^{-1}$ คูณทั้งสองข้างของสมการ จึงได้ผลลัพธ์คือ $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{J}$

ตัวอย่างที่ 3.16 สมมติให้

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

จากที่ได้พิจารณาไปแล้วข้างต้น $\boldsymbol{A}$ มีค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริงเพียงค่าเดียว คือ $\lambda = 2$ หากให้ $\boldsymbol{z}_1$ คือ เวคเตอร์เฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ จะได้ว่า $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{0}$ หรือ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

กล่าวคือ

$$\boldsymbol{z}_1 = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$$

สำหรับ $\boldsymbol{z}_2$ นั้น โดยที่ $\boldsymbol{A}$ มีค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริงเพียงค่าเดียว การหา $\boldsymbol{z}_2$ โดยกำหนดให้ $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_2 = 0$ ย่อมได้คำตอบคือ $\boldsymbol{z}_2$ ซึ่งไม่ได้เป็นอิสระจาก $\boldsymbol{z}_1$ อย่างไรก็ตาม หากให้ $\boldsymbol{z}_2$ คือ เวคเตอร์เฉพาะทั่วไปของ $\boldsymbol{A}$ จะได้ว่า $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_1$ หรือ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

เมื่อกำหนดให้ $s = 1$ จะได้คำตอบของระบบสมการ คือ

$$\boldsymbol{z}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$

จากข้างต้น เมื่อกำหนดให้ $s = 1$ และ $t = 0$ จะได้ว่า

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ และ } \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ซึ่งจากการคำนวณค่าของ $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ จะได้ว่า

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}$$

จากผลลัพธ์ทั้งหมดข้างต้น $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์ซึ่งมีค่าเฉพาะซ้ำกัน 2 ค่า มีเวคเตอร์เฉพาะซึ่งเป็นอิสระจากกัน 1 เวคเตอร์ คือ $\boldsymbol{z}_1$ และมีเวคเตอร์เฉพาะทั่วไป 1 เวคเตอร์ คือ $\boldsymbol{z}_1$ $\square$

ตัวอย่างที่ 3.17 (Simon and Blume, 1994) สมมติให้

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

จากการพิจารณาเมตริกซ์ข้างต้น จะได้ว่า 3 เป็นค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ เนื่องจากเมื่อนำ 3 ลบออกจากค่าบนแกนของ $\boldsymbol{A}$ จะทำให้แถวที่สองและแถวที่สามของ $\boldsymbol{A}$ มีค่าเท่ากัน และส่งผลให้ $|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}| = \boldsymbol{0}$ นอกจากนั้น 2 ยังเป็นค่าเฉพาะอีกค่าหนึ่งของ $\boldsymbol{A}$ เนื่องจากเมื่อนำ 2 ลบออกจากค่าบนแกนของ $\boldsymbol{A}$ จะทำให้แถวที่หนึ่ง มีค่าเป็นสองเท่าของแถวที่สาม และส่งผลให้ $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}| = 0$ จากคุณสมบัติของค่าเฉพาะ ที่ว่าผลรวมของค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ จะเท่ากับ $\mathsf{tr}(\boldsymbol{A}) = 8$ ดังนี้ ค่าเฉพาะอีกค่าหนึ่งของ $\boldsymbol{A}$ จึงต้องเท่ากับ 3 กรณีนี้ จึงเป็นเมตริกซ์ขนาด 3×3 ที่มีค่าเฉพาะทั้งหมดเป็นจำนวนจริง โดยมีค่าที่ไม่ซ้ำกับค่าอื่นหนึ่งค่า คือ $\lambda_1 = 2$ และมีค่าซ้ำกันสองค่า คือ $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ สำหรับ $\lambda_1 = 2$ นั้น จะได้ว่าเวคเตอร์เฉพาะคือ $\boldsymbol{z}_1$ ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{0}$ หรือ

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ z_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งจากการหาคำตอบของระบบสมการ ด้วยวิธีการตัดทอนตัวแปรแบบเกาส์ เมื่อให้ตัวแปรสุดท้ายเป็นตัวแปรอิสระ จะได้คำตอบในรูป

$$\boldsymbol{z}_1 = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$$

สำหรับ $\lambda_2 = 3$ หากให้ $\boldsymbol{z}_2$ คือเวคเตอร์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_2 = 0$ หรือ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{21} \\ z_{22} \\ z_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งจากการหาคำตอบของระบบสมการ ด้วยวิธีการตัดทอนตัวแปรแบบเกาส์ เมื่อให้ตัวแปรสุดท้ายเป็นตัวแปรอิสระ จะได้คำตอบในรูป

$$\boldsymbol{z}_2 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$

ทั้งนี้ โดยที่ $\lambda_3 = 3 = \lambda_2$ $\boldsymbol{z}_3$ คือ เวคเตอร์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_3 = \boldsymbol{0}$ จึงย่อมไม่เป็นอิสระกันกับ $\boldsymbol{z}_2$ ในกรณีนี้ หากพิจารณา $\boldsymbol{z}_3$ ซึ่งเป็นเวคเตอร์เฉพาะทั่วไป ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_3 = \boldsymbol{z}_2$ แทน จะได้

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_{31} \\ z_{32} \\ z_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

เมื่อกำหนดให้ค่า $t = 1$ จากการหาคำตอบของระบบสมการ ด้วยวิธีลดทอนตัวแปรของเกาส์ จะได้

$$\boldsymbol{z}_3 = u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; u \in \mathbb{R}$$

จากนั้นเมื่อนำเวคเตอร์เฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะทั่วไป ประกอบกันเป็น $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{z}_1\ \boldsymbol{z}_2\ \boldsymbol{z}_3)$ จะได้

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ และ } \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ทั้งนี้ หากพิจารณา $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ ข้างต้น จะเห็นว่าไม่ใช่เมตริกซ์ในรูปแบบมาตรฐานของฌอดานเสียทีเดียว ด้วยว่าค่าในเมตริกซ์ ในแถวที่หนึ่งและคอลัมน์ที่สองเท่ากับ 0 ไม่ใช่ 1 ผลลัพธ์ที่ได้ข้างต้น สามารถสรุปเป็นข้อสังเกตที่น่าสนใจได้ว่า คอลัมน์ของ $\boldsymbol{P}$ ซึ่งถูกสร้างขึ้นจากเวคเตอร์เฉพาะนั้น จะมีลักษณะต้องตรงกับคอลัมน์ของเมตริกซ์แกน กล่าวคือ มีค่าในแถวและคอลัมน์ลำดับเดียวกัน ที่เท่ากับค่าเฉพาะ เช่น คอลัมน์ที่หนึ่งของ $\boldsymbol{P}$ ข้างต้น ที่ถูกสร้างจากเวคเตอร์เฉพาะคือ $\boldsymbol{z}_1$ จะมีค่าแรกสอดคล้องกับค่าเฉพาะ คือ 2 ซึ่งถูกใช้สร้างเวคเตอร์เฉพาะนั้น และมีค่าอื่น

ในคอลัมน์เท่ากับ 0 คอลัมน์ที่สองของ $\boldsymbol{P}$ ที่ถูกสร้างจากเวคเตอร์เฉพาะคือ $\boldsymbol{z}_2$ จะมีค่าที่สองสอดคล้องกับค่าเฉพาะ คือ 3 ที่ถูกใช้สร้างเวคเตอร์เฉพาะนั้น และมีค่าอื่นในคอลัมน์เท่ากับ 0 และคอลัมน์สุดท้ายของ $\boldsymbol{P}$ ที่ถูกสร้างจากเวคเตอร์เฉพาะ*ทั่วไป* คือ $\boldsymbol{z}_3$ จะมีค่าที่สามสอดคล้องกับค่าเฉพาะคือ 3 ที่ถูกใช้สร้างเวคเตอร์เฉพาะทั่วไปนั้น มีค่าที่อยู่แถวเหนือขึ้นไปหนึ่งแถวเท่ากับ 1 และมีค่าอื่นในคอลัมน์เท่ากับ 0 ซึ่งสอดคล้องกับลักษณะคอลัมน์ในเมตริกซ์ ในรูปแบบมาตรฐานของฌอดาน $\square$

ตัวอย่างที่ 3.18 สมมติให้

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

จากข้างต้น ค่าเฉพาะค่าหนึ่งของ $\boldsymbol{A}$ คือ $\lambda_1 = 2$ โดยหากนำเอา 2 ลบจากทุกค่าบนแกน จะทำให้แถวที่หนึ่งของเมตริกซ์เท่ากับ -1 คูณด้วยแถวที่สามของเมตริกซ์ ซึ่งส่งผลให้ $|\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}| = \boldsymbol{0}$ ในการหาค่าเฉพาะที่เหลือนั้น โดยที่ $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = |\boldsymbol{A}| = 8$ ดังนั้น $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = 4$ และ $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = 6$ ดังนั้น $\lambda_2 + \lambda_3 = 4$ ซึ่งเมื่อนำ $\lambda_2 = 4 - \lambda_3$ ไปแทนใน $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = 4$ จะได้ $\lambda_3^2 - 4\lambda_3 + 4 = (\lambda_3 - 2)^2 = 0$ หรือ $\lambda_3 = 2$ ซึ่งให้คำตอบสุดท้ายคือ $\lambda_2 = 0$ เช่นกัน จึงสรุปได้ว่าในกรณีนี้ ค่าเฉพาะทั้งสามค่าของ $\boldsymbol{A}$ เป็นจำนวนจริงที่เท่ากัน ซึ่งเท่ากับ 2

คอลัมน์แรกของ $\boldsymbol{P}$ สามารถสร้างเวคเตอร์เฉพาะได้จาก $\lambda_1 = 2$ คือ $\boldsymbol{z}_1$ ที่สอดคล้องกับ $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{0}$ หรือ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ z_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งให้คำตอบคือ

$$\boldsymbol{z}_1 = s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$$

อย่างไรก็ตาม โดยที่ $\boldsymbol{A}$ มีค่าเฉพาะเพียงค่าเดียว หากจะสร้างเวคเตอร์เฉพาะขึ้นมาอีกจากค่าเฉพาะเดียวกันนี้ ก็ย่อมจะเป็นเวคเตอร์เฉพาะที่ไม่เป็นอิสระจากกันกับเวคเตอร์เฉพาะเดิม คอลัมน์ที่เหลือของ $\boldsymbol{P}$ คือ $\boldsymbol{z}_2$ และ $\boldsymbol{z}_3$ จึงจำเป็นต้องถูกสร้างในรูปของเวคเตอร์เฉพาะทั่วไป โดยที่ $\boldsymbol{z}_2$ และ $\boldsymbol{z}_3$ เป็นคำตอบของระบบสมการ $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_1$ และ $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_3 = \boldsymbol{z}_2$ ตามลำดับ

สำหรับ $\boldsymbol{z}_2$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{21} \\ z_{22} \\ z_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

เมื่อกำหนดให้ $s = 1$ ซึ่งให้คำตอบ คือ

$$\boldsymbol{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$

และสำหรับ $\boldsymbol{z}_3$ เมื่อกำหนดให้ $t = 0$ ในสมการกำหนด $\boldsymbol{z}_2$ ข้างต้น จะได้

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{31} \\ z_{32} \\ z_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งให้คำตอบคือ

$$\boldsymbol{z}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; u \in \mathbb{R}$$

จากนั้นเมื่อนำเวคเตอร์เฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะทั่วไปทั้งหมดข้างต้นสำหรับค่า $t = u = 0$ มาประกอบกันเป็น $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{z}_1\ \boldsymbol{z}_2\ \boldsymbol{z}_3)$ จะได้

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ และ } \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}$$

ซึ่งเป็นเมตริกซ์ในรูปแบบมาตรฐานของฌอดาน อนึ่ง มีข้อควรสังเกตสำคัญว่า การนำเอาเวคเตอร์เฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะทั่วไปมาประกอบกันเป็น $\boldsymbol{P}$ ดังกระบวนการข้างต้นนั้น ไม่ได้จำกัดสำหรับค่าพารามิเตอร์ $t = u = 0$ เท่านั้น หากใช้ค่า $t, u \in \mathbb{R}$ อื่น แม้จะให้ $\boldsymbol{P}$ ที่ต่างออกไป แต่ยังคงให้ผลลัพธ์สุดท้ายคือ $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{J}$ เช่นเดิม $\square$

ตัวอย่างที่ 3.19 สมมติให้

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

จากการพิจารณา จะเห็นได้ว่า $\boldsymbol{A}$ มีค่าเฉพาะค่าหนึ่ง คือ$\lambda_1 = 4$ เนื่องจากหากนำ 4 ลบจากทุกค่าบนแกนจะทำให้ทุกค่าในแถวแรก (และแถวสุดท้าย) เท่ากับศูนย์ทั้งหมด ซึ่งส่งผลให้ $|\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}| = 0$ และโดยที่ $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 64$ หรือ $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = 16$ และ $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 12$ หรือ $\lambda_2 + \lambda_3 = 8$ จะได้ว่า $\lambda_3^2 - 8\lambda_3 + 16 = (\lambda_3^2 - 4)^2 = 0$ หรือ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4$ จึงเป็นกรณีที่ค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริงซึ่งซ้ำกันสามค่า จาก $\lambda_1 = 4$ เวคเตอร์เฉพาะ $\boldsymbol{z}_1$ ซึ่งสอดคล้องกับ $(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{0}$ คือคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ z_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งเท่ากับ

$$\boldsymbol{z}_1 = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R}$$

เวคเตอร์เฉพาะข้างต้นมีข้อสังเกตที่น่าสนใจ คือ โดยที่ $\boldsymbol{z}_1$ เป็นองค์ประกอบเชิงเส้น (linear combination) ของเวคเตอร์ที่เป็นอิสระกัน 2 เวคเตอร์ ดังนี้ หากนำเอาค่าเฉพาะที่ซ้ำกันอีกค่า คือ $\lambda_2 = 2$ มาสร้างเวคเตอร์เฉพาะ จะให้ $\boldsymbol{z}_2$ ซึ่งอยู่ในรูปเช่นเดียวกับข้างต้น แต่หากได้กำหนดค่าของ r และ s ของแต่ของเวคเตอร์อย่างเหมาะสมแล้ว ก็จะสามารถสร้างเวคเตอร์เฉพาะ 2 เวคเตอร์ที่เป็นอิสระกันได้ เช่น หากกำหนดให้ $r = 0$ และ $s = 1$ ในกรณี $\boldsymbol{z}_1$ และหากกำหนดให้ $r = 1$ และ $s = 0$ ในกรณี $\boldsymbol{z}_2$ จะได้ $\boldsymbol{z}_1$ ซึ่งเป็นเวคเตอร์ที่สองและ $\boldsymbol{z}_2$ ซึ่งเป็นเวคเตอร์แรกของฝั่งขวาของสมการ ซึ่งต่างเป็นอิสระจากกัน สำหรับ $\boldsymbol{z}_3$ นั้น จำเป็นต้องสร้างเวคเตอร์เฉพาะทั่วไปขึ้น ตามกระบวนการเดิม ซึ่งหากใช้ $\boldsymbol{z}_2$ สร้าง $\boldsymbol{z}_3$ จะได้ว่า $(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_3 = \boldsymbol{z}_2$ จากนั้นจึงหา $\boldsymbol{z}_3$ ซึ่งเป็นคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{31} \\ z_{32} \\ z_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งเท่ากับ

$$\boldsymbol{z}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$$

โดยหากให้ $r = s = 0$ จะได้ว่า $\boldsymbol{z}_3$ เท่ากับเวคเตอร์แรกของฝั่งขวามือของสมการ จากนั้นเมื่อนำเอาเวคเตอร์เฉพาะ และเวคเตอร์เฉพาะทั่วไปทั้งหมดมาประกอบกันเป็น $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{z}_1\ \boldsymbol{z}_2\ \boldsymbol{z}_3)$ จะได้

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ และ } \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

โดยมีผลลัพธ์คือซึ่งอยู่ในรูปแบบคล้ายคลึงกับตัวอย่างที่ 3.18 กล่าวคือ คอลัมน์ที่หนึ่งและคอลัมน์ที่สอง ซึ่งเป็นเวคเตอร์เฉพาะที่เป็นอิสระจากกันของเมตริกซ์ จะสอดคล้องกับคอลัมน์ของเมตริกซ์แกน ที่มีค่าตามแกนเท่ากับค่าเฉพาะ ส่วนคอลัมน์สุดท้าย ซึ่งสร้างจากเวคเตอร์เฉพาะทั่วไป จะมีค่าตามแกนเท่ากับค่าเฉพาะ มีค่าในแถวเหนือขึ้นไปหนึ่งแถวเท่ากับ 1 และมีค่าอื่นในคอลัมน์เท่ากับ 0 □

จากกระบวนการแปลงเมตริกซ์ ซึ่งมีค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริงซ้ำกัน ให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานแบบฌอดานข้างต้น ขั้นตอนต่อไป จะเป็นการหาคำตอบของระบบสมการผลต่าง $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n$ เมื่อ $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์จัตุรัส ซึ่งมีค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริง ซึ่งซ้ำกันบางค่าหรือทุกค่า ทั้งนี้ ในกรณีปกติที่เมื่อ $\boldsymbol{A}$ มีค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริงซึ่งไม่ซ้ำกัน การหาคำตอบสามารถทำได้ โดยการแปลงให้ระบบสมการข้างต้นอยู่ในรูป $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0$ โดยที่ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}$ ซึ่งให้ความสัมพันธ์ $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ และโดยที่ $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$ เป็นเมตริกซ์แกน การคำนวณค่าของ $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^n\boldsymbol{P}^{-1}$ จึงสามารถทำได้โดยง่าย และให้ผลลัพธ์คือคำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้น ซึ่งอยู่ในรูป

$$\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^n\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}_0$$

หรือในกรณีที่ $\boldsymbol{A}$ มีขนาด $k \times k$ จะได้ว่า

$$\boldsymbol{x}_n = c_1\lambda_1^n\boldsymbol{z}_1 + \ldots + c_k\lambda_k^n\boldsymbol{z}_k$$

โดยที่ค่าคงที่ $c_1, \ldots, c_k$ สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ $\boldsymbol{x}_0 = c_1\boldsymbol{z}_1 + \ldots + c_1\boldsymbol{z}_1$ เมื่อ $\boldsymbol{x}_0$ ถูกกำหนดไว้แล้ว

ในกรณีที่จะต้องพิจารณา คือ เมื่อ $\boldsymbol{A}$ มีค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริงซึ่งซ้ำกันบางค่าหรือทุกค่านั้น กระบวนการหาคำตอบ จะมีลักษณะคล้ายคลึงกับกระบวนการแรก โดยยังคงหลักการเดิมที่ว่า ขั้นตอนแรกจะเป็นการแปลงเวคเตอร์ของตัวแปรดั้งเดิม ให้เป็นตัวแปรใหม่ โดยการคูณด้วยเมตริกซ์ $\boldsymbol{P}$ ซึ่งให้ผลลัพธ์เป็นเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ใหม่ ที่สามารถคำนวณค่ายกกำลังได้ง่ายเสียก่อน จากนั้นจึงแปลงตัวแปรใหม่กลับสู่ตัวแปรดั้งเดิม อย่างไรก็ตาม ในกรณีนี้มีข้อแตกต่างสำคัญที่ว่า การแปลงเวคเตอร์ด้วย $\boldsymbol{P}$ จะให้ผลลัพธ์ซึ่งไม่ใช่เมตริกซ์แกนเสียทีเดียว แต่จะอยู่ในรูปแบบมาตรฐานของฌอดานเท่านั้น การจัดรูปคำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้นในกรณีนี้ จึงผิดแผกไปจากกรณีเดิมบ้าง อาทิ สำหรับกรณีที่ $\boldsymbol{A}$ มีขนาด 2×2 จากระบบสมการผลต่างเชิงเส้นในรูป $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n$ ซึ่งสามารถแปลงให้อยู่ในรูป

$$\boldsymbol{X}_{n+1} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{J}\boldsymbol{X}_n$$

เมื่อ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}$ โดยที่ $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{J}$ หรือในรูประบบสมการคือ

$$\begin{pmatrix} X_{1n+1} \\ X_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1n} \\ X_{2n} \end{pmatrix}$$

กล่าวคือ

$$\begin{aligned} X_{1n+1} &= \lambda X_{1n} + X_{2n} \\ X_{2n+1} &= \lambda X_{2n} \end{aligned}$$

ระบบสมการข้างต้นมีข้อสังเกตที่สำคัญ คือ โดยที่ X_{2n+1} เป็นฟังก์ชั่นของ X_{2n} เท่านั้น การหาค่าของ X_{2n+1} จึงทำได้โดยการแทนค่า X_2 ตั้งแต่เริ่มต้นไปเรื่อยๆ จนถึงจุด n ที่ต้องการ เช่น หากให้ $X_{20} = 1$ เป็นค่าตั้งต้น จะได้ว่า

$$\begin{gathered} X_{21} = \lambda \\ \vdots \\ X_{2n+1} = \lambda^n \end{gathered}$$

อย่างไรก็ตาม การหาค่าของ X_{1n+1} ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของทั้ง X_{1n} และ X_{2n} ย่อมซับซ้อนกว่าการหาค่าของ X_{2n+1} อยู่บ้าง โดยจาก $X_{2n+1} = \lambda X_{2n}$ หากแทนค่าไปเรื่อยๆ จาก $X_{22} = \lambda^2 X_{21}$

จะได้ $X_{2n} = c_1\lambda^n$ ซึ่งเมื่อแทนค่าในสมการแรก ของระบบสมการข้างต้น จะได้ $X_{1n+1} = \lambda X_{1n} + c_1\lambda^n$ และหากไล่ขึ้นมาเรื่อยๆ จาก X_{10} จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
X_{10} &= c_0 \\
X_{11} &= \lambda X_{10} + c_1 = c_0\lambda + c_1 \\
X_{12} &= \lambda X_{11} + c_1\lambda = \lambda\left(c_0\lambda + c_1\right) + c_1\lambda = c_0\lambda^2 + 2c_1\lambda \\
X_{13} &= \lambda X_{12} + c_1\lambda^2 = \lambda(c_0\lambda^2 + 2c_1\lambda) + c_1\lambda^2 = c_0\lambda^3 + 3c_1\lambda^2 \\
&\vdots \\
X_{1n} &= c_0\lambda^n + nc_1\lambda^{n-1}
\end{aligned}$$

จากผลลัพธ์ข้างต้น คำตอบของระบบสมการผลต่าง $\boldsymbol{X}_{n+1} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{X}_n$ เมื่อ $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ จึงเท่ากับ

$$\begin{pmatrix} X_{1n} \\ X_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0\lambda^n + nc_1\lambda^{n-1} \\ c_1\lambda^n \end{pmatrix}$$

ในขั้นตอนสุดท้าย เมื่อได้แปลงตัวแปรกลับไปสู่ตัวแปรเดิมด้วยความสัมพันธ์ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}$ แล้ว จะได้คำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้นในรูป $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n$ คือ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}_n &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0\lambda^n + nc_1\lambda^{n-1} \\ c_1\lambda^n \end{pmatrix} \\
&= \left(c_0\lambda^n + nc_1\lambda^{n-1}\right)\boldsymbol{z}_1 + c_1\lambda^n\boldsymbol{z}_2
\end{aligned}$$

ทั้งนี้ มีข้อสังเกตที่สำคัญ คือ คำตอบของระบบสมการผลต่างในรูปแบบข้างต้นนั้น เป็นคำตอบที่ได้จากระบบสมการผลต่าง ซึ่งประกอบด้วยสองตัวแปรและสองสมการ และมีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริงซึ่งซ้ำกันเท่านั้น โดยหากระบบสมการมีขนาดใหญ่ขึ้น หรือเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการ มีค่าเฉพาะในลักษณะอื่นๆ ที่ผิดไปจากรูปแบบเดิม เช่น มีค่าเฉพาะซ้ำกันบางค่า แต่ไม่ใช่ทุกค่า หรือมีเวคเตอร์เฉพาะ และเวคเตอร์เฉพาะทั่วไปผสมกันไป ก็ย่อมจะให้คำตอบที่แตกต่างไปจากคำตอบในรูปแบบข้างต้น อย่างไรก็ตาม กระบวนการหาคำตอบของระบบสมการผลต่าง ทั้งในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์สามารถแปลงเป็นเมตริกซ์แกนได้ หรือสามารถแปลงเป็นเพียงเมตริกซ์ในรูปแบบมาตรฐานของฌอดานได้นั้น ล้วนเป็นไปตามหลักการเดียวกัน ที่เริ่มจากการแปลงเวคเตอร์ของตัวแปร ให้เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ใหม่ของระบบสมการ

ง่ายต่อการยกกำลังเสียก่อนทั้งสิ้น จะแตกต่างกันก็แต่เพียงการไล่แทนค่าของตัวแปร ซึ่งอาจซับซ้อนขึ้นบ้าง หากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ใหม่ไม่ใช่เมตริกซ์แกนเท่านั้น[1]

ตัวอย่างที่ 3.20 สมมติให้

$$x_{1n+1} = 3x_{1n} + x_{2n}$$
$$x_{2n+1} = -x_{1n} + x_{2n}$$

การหาคำตอบของระบบสมการผลต่างข้างต้น เริ่มได้จากการเขียนระบบสมการในรูป $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n$ ซึ่งเท่ากับ

$$\begin{pmatrix} x_{1n+1} \\ x_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \end{pmatrix}$$

จากที่ได้ทราบในตัวอย่างก่อนหน้านี้แล้วว่า $\boldsymbol{A}$ มีค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริง ซึ่งซ้ำกัน คือ $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ และมีเวคเตอร์เฉพาะ คือ

$$\boldsymbol{z}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \boldsymbol{z}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งเมื่อนำมาประกอบเป็น $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{z}_1 \ \boldsymbol{z}_2)$ จะได้

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}$$

จากข้างต้น คำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้นในรูป $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n$ เมื่อ $\boldsymbol{A}$ มีขนาด 2×2 และสามารถแปลงให้อยู่ในรูป $\boldsymbol{J}$ ได้ จึงเท่ากับ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_n &= \left(c_0 2^n + 2c_1 2^{n-1}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 2^n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(c_0 + 2c_1)2^n \\ (c_0 + c_1)2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[1]ผู้สนใจสามารถทดลองฝึกหาคำตอบของระบบสมการผลต่างขนาดใหญ่กว่า 2×2 ได้ในแบบฝึกหัดท้ายบทนี้

ทั้งนี้ หากโจทย์ได้ให้ข้อมูลเกี่ยวกับ $\boldsymbol{x}_0$ ไว้ เช่น หากให้ $x_{10} = x_{20} = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_0 - 2c_1 \\ c_0 + c_1 \end{pmatrix}$$

ซึ่งเป็นระบบสมการเชิงเส้น ที่ประกอบด้วยสองสมการและสองตัวแปร และมีคำตอบคือ $c_0 = 3$ และ $c_1 = -2$ เป็นต้น $\square$

กรณีที่ค่าเฉพาะของเมตริกซ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน

กรณีสุดท้ายเป็นการพิจารณากระบวนการหาคำตอบ ของระบบสมการผลต่างในรูป $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n$ เมื่อ $\boldsymbol{A}$ มีค่าเฉพาะซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อน กระบวนการหาคำตอบของระบบสมการผลต่างในกรณีนี้ แม้จะซับซ้อนกว่าเดิมพอสมควร แต่ถือเป็นสิ่งสำคัญที่ไม่ควรมองข้ามด้วยเหตุผลสองประการ โดยในประการแรก การพิจารณาระบบสมการผลต่างซึ่งค่าเฉพาะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน ถือเป็นกรณีสำคัญลำดับสุดท้าย ที่เติมเต็มกระบวนการหาคำตอบ ของระบบสมการผลต่างที่ได้กล่าวมาแล้วทั้งหมด ให้ครบถ้วนสมบูรณ์ โดยเหตุที่ว่าค่าเฉพาะของเมตริกซ์อาจเป็นได้ดังกรณีใดกรณีหนึ่งในสามกรณีต่อไปนี้ คือ เป็นจำนวน จริงซึ่งไม่ซ้ำกัน จำนวนจริงซึ่งซ้ำกัน หรือจำนวนเชิงซ้อนซึ่งจะต้องไม่ซ้ำกันเสมอ การจะกล่าวถึงเพียงสองกรณีแรก โดยเว้นกรณีสุดท้ายไว้ จึงย่อมขาดความสมบูรณ์ไปอย่างน่าเสียดาย เหตุผลประการที่สองซึ่งเชื่อมโยงต่อมาจากเหตุผลในประการแรกนั้น ก็ด้วยว่า ค่าเฉพาะซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อน ใช่ว่าจะเป็นกรณีบังเอิญที่พอจะละเลยไป โดยอ้างเหตุว่าเป็นกรณีที่เกิดขึ้นยากได้ แต่นับเป็นเรื่องที่พบได้บ่อย ไม่ต่างจากกรณีปกติที่ค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริง และอาจจะเกิดขึ้นได้บ่อย กว่ากรณีที่ค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริงซึ่งซ้ำกันเสียอีก การศึกษากระบวนการหาคำตอบของระบบสมการผลต่าง เฉพาะแต่กรณีที่ค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริง โดยเลี่ยงกรณีที่ค่าเฉพาะเป็นจำนวนเชิงซ้อน จึงอาจยังให้เกิดประโยชน์แต่เพียงครึ่งๆ กลางๆ และไม่เกิดผลในเชิงปฏิบัติเท่าใดนัก

แนวคิดข้างต้น และเงื่อนไขของค่าเฉพาะของเมตริกซ์ในรูปแบบต่างๆ สามารถพิจารณาได้ตามตัวอย่างระบบสมการผลต่างขนาด 2×2 ในกรณีทั่วไป ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.21 ระบบสมการผลต่างในรูป $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n$ เมื่อ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

มีค่าเฉพาะคือ λ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

หรือ $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$ ซึ่งมีคำตอบคือ

$$\lambda = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a-d)^2+4bc}$$

ในกรณีที่ค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ $(a-d)^2 + 4bc < 0$ นั้น จะได้ว่า

$$\sqrt{(a-d)^2+4bc} = \sqrt{|(a-d)^2+4bc|i^2} = i|(a-d)^2+4bc|$$

ค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนในกรณีนี้ จึงเท่ากับ

$$\lambda_1 = \frac{a+d}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{|(a-d)^2+4bc|}; \lambda_2 = \frac{a+d}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{|(a-d)^2+4bc|}$$

ทั้งนี้ มีข้อสังเกตสำคัญ คือ λ_2 หรือคอนจูเกตเชิงซ้อนของ λ_1 นั้น จะเป็นจำนวนเชิงซ้อนอีกค่าหนึ่งที่ไม่ซ้ำกับ λ_1 เสมอ ซึ่ง หากเปรียบกับกรณีที่ค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริงซึ่งซ้ำกันแล้ว จะเห็นได้ว่า กรณีหลัง เกิดขึ้นเฉพาะเมื่อ $(a-d)^2 + 4bc = 0$ อาทิ หากให้ $a = 2, b = 1, c = -1, d = 0$ จะได้ว่า

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งมีค่าเฉพาะคือ λ ที่ทำให้ $(2-\lambda)(-\lambda) + 1 = (\lambda-1)^2 = 0$ จึงเป็นกรณีที่ $\boldsymbol{A}$ มีค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริง คือ $\lambda = 1$ ซ้ำกันสองค่า ทั้งนี้ หากให้ค่าในเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ คือ ค่าที่ได้จากการประมาณการด้วยตัวแบบต่างๆ ทางสถิติแล้ว จะเห็นได้ว่า กรณีที่ค่าเฉพาะซ้ำกันมักเกิดได้ยากกว่า กรณีที่ค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน หรือเป็นจำนวนเชิงซ้อน □

ผลจากตัวอย่างข้างต้น สามารถสรุปเป็นข้อสำคัญ เกี่ยวกับลักษณะของค่าเฉพาะของเมตริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนได้ว่า หากค่าเฉพาะค่าหนึ่งของเมตริกซ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน ค่าเฉพาะอีกค่าหนึ่ง จะต้องเท่ากับคอนจูเกตเชิงซ้อนของค่าแรก ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนด้วย ดังนี้ ค่าเฉพาะของเมตริกซ์ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อน จะต้องอยู่เป็นคู่กันเสมอ นอกจากนี้ ยังอาจอนุมานผล

จากกรณีเมตริกซ์ขนาด 2×2 ด้วย**ทฤษฎีบทพื้นฐานของพีชคณิต (Fundamental theorem of algebra)** [1] ไปสู่กรณีเมตริกซ์ทั่วไปขนาด $k \times k$ ได้อีกว่า เนื่องด้วยคำตอบของสมการพหุนาม ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนจะเป็นคู่เสมอ และโดยที่ค่าเฉพาะ คือ คำตอบของสมการพหุนาม ดังนี้ หากให้ λ_1 เป็น เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า $\lambda_2 = \bar{\lambda_1}$ ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนเช่นเดียวกับ λ_1 ย่อมเป็นค่าเฉพาะอีกค่าหนึ่งด้วย จากข้อเท็จจริงนี้ ค่าเฉพาะของของเมตริกซ์ขนาด 3×3 จึงอาจเป็นได้ตามกรณีต่อไปนี้ คือ เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่ซ้ำกันทั้งสามค่า เป็นจำนวนจริงซึ่งซ้ำกันทุกค่า เป็นจำนวนจริงซึ่งซ้ำกันบางค่า หรือ เป็นจำนวนเชิงซ้อนสองค่าและจำนวนจริงหนึ่งค่า แต่ไม่อาจจะเป็นจำนวนจริงสองค่าและจำนวนเชิงซ้อนหนึ่งค่า หรือจำนวนเชิงซ้อนทั้งสามค่าได้ กล่าวคือ หาก k เป็นเลขคี่ จะต้องมีค่าเฉพาะอย่างน้อยหนึ่งค่าซึ่งเป็นจำนวนจริงเสมอ และหาก k เป็นเลขคู่ ค่าเฉพาะซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนจะต้องเป็นจำนวนคู่ คือ $0, 2, \ldots$ เสมอ

ในกรณีที่ค่าเฉพาะเป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งอยู่ในรูป $\lambda = a + ib$ เมื่อ a และ b คือ ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนตามลำดับนั้น กระบวนการหาคำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้น จะคล้ายกับกรณีปกติที่ค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริง โดยหลังจากหาค่าเฉพาะได้แล้ว ลำดับต่อไปจะเป็นการหาเวคเตอร์เฉพาะ $\boldsymbol{z}$ ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติ $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ หรือ

$$(\boldsymbol{A} - (a + ib)\boldsymbol{I})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$$

โดยที่ $\boldsymbol{z}$ คือเวคเตอร์เฉพาะ ในรูปของ**เวคเตอร์เชิงซ้อน (complex vector)** $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$ สำหรับค่าเฉพาะ $\lambda = a + ib$ ทั้งนี้ จากคุณสมบัติข้างต้นที่ว่า ทั้ง $\lambda = a + ib$ และคอนจูเกตเชิงซ้อนของ λ คือ $\bar{\lambda} = a - ib$ ล้วนเป็น ดังนี้ การหาเวคเตอร์เฉพาะซึ่งสอดคล้องกับ $\bar{\lambda}$ จึงทำได้โดยการจัดเรียงระบบสมการข้างต้นใหม่ และแทนค่า $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$ ในระบบสมการ ซึ่งให้ผลลัพธ์คือ

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) = (a + ib)(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v})$$

จากนั้นเมื่อคอนจูเกตทั้งสองข้างของระบบสมการ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{A}}\ \overline{(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v})} &= \overline{(a + ib)}\ \overline{(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v})} \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u} - i\boldsymbol{v}) &= (a - ib)(\boldsymbol{u} - i\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

โดย $\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$ เนื่องจากทุกค่าใน $\boldsymbol{A}$ เป็นจำนวนจริง จากนั้นเมื่อแทนค่า $\bar{\lambda} = a - ib$ และจัดเรียง

[1] รายละเอียดปรากฏในภาคผนวก ก

ระบบสมการใหม่ให้อยู่ในรูปเดิม จะได้ว่า

$$(\boldsymbol{A}-\bar{\lambda}\boldsymbol{I})(\boldsymbol{u}-i\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$$

ซึ่งกระบวนการทั้งหมดข้างต้น สามารถสรุปได้เป็นทฤษฎีบทได้ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.6 หากให้ $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $k \times k$ ซึ่งทุกค่าในเมตริกซ์เป็นจำนวนจริง หากจำนวนเชิงซ้อน $\lambda = a + ib$ เป็นค่าเฉพาะหนึ่งของ $\boldsymbol{A}$ ซึ่งมีเวคเตอร์เฉพาะเชิงซ้อนคือ $\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$ แล้ว จะได้ว่าคอนจูเกตของจำนวนเชิงซ้อนแรก คือ $\bar{\lambda} = a - ib$ จะเป็นอีกค่าเฉพาะหนึ่งของ $\boldsymbol{A}$ ซึ่งมีเวคเตอร์เฉพาะเชิงซ้อนคือ $\boldsymbol{u} - i\boldsymbol{v}$ เสมอ ■

ดังนี้ แม้การคำนวณจำนวนเชิงซ้อน อาจดูซับซ้อนหรือไม่เป็นที่คุ้นเคยอยู่บ้างเมื่อเทียบกับการคำนวณจำนวนจริง แต่การหาค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะของเมตริกซ์ ในกรณีที่ค่าเฉพาะค่าหนึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนนั้น กลับทำได้อย่างรวดเร็วมาก เพราะเมื่อคำนวณค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะได้ชุดหนึ่ง จะสามารถหาค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะอีกชุดหนึ่งได้ทันที ด้วยการกลับเครื่อง-หมายภายในจำนวนเชิงซ้อน และเวคเตอร์เชิงซ้อนชุดแรก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.22 สมมติให้

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ คือ $\lambda_1 = 1+i$ และ $\lambda_2 = 1-i$ ซึ่งมีเวคเตอร์เฉพาะของ $\lambda_1 = 1+i$ คือ $\boldsymbol{z}_1$ ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า

$$(\boldsymbol{A}-(1+i)\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_1=\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

เมตริกซ์ข้างต้นสอดคล้องกับระบบสมการ

$$\begin{aligned} -iz_{11}+z_{12}&=0 \\ -z_{11}-iz_{12}&=0 \end{aligned}$$

โดยที่สมการที่สองเท่ากับ $-i$ คูณเข้ากับสมการที่หนึ่ง สมการทั้งสองจึงไม่เป็นอิสระจากกัน ดังนี้จึงสามารถสร้างสมการเฉพาะ จากสมการใดสมการหนึ่ง ในระบบสมการข้างต้นก็ได้ เช่น จากสมการที่สอง หากให้ค่า $z_{12} = 1$ จะได้ว่า $z_{11} = i$ ซึ่งเป็นเวคเตอร์เฉพาะในรูปเวคเตอร์เชิงซ้อน

คือ

$$\boldsymbol{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

จากผลลัพธ์ข้างต้น ประกอบกับผลโดยนัยแห่งทฤษฎีบทที่ 3.6 จะได้ว่าเวคเตอร์เฉพาะของ $\lambda_2 = 1 - i$ คือ

$$\boldsymbol{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

ซึ่งเมื่อนำเวคเตอร์เฉพาะทั้งสองมาประกอบกันจะได้

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

และ

$$\boldsymbol{P}^{-1} = -\frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

ทั้งนี้ มีข้อสังเกตว่า

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

ซึ่งเป็นเมตริกซ์แกน ที่ค่าบนแกนเท่ากับค่าเฉพาะของเมตริกซ์ □

ในการหาคำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้นเมื่อเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการมีค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะเป็นจำนวนเชิงซ้อนและเวคเตอร์เชิงซ้อนตามลำดับนั้น หลังจากที่ได้หาค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะแล้ว กระบวนการในลำดับต่อไปจะเหมือนกับกรณีที่ค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริงทุกประการ โดยเมื่อได้นำเอาเวคเตอร์เฉพาะประกอบกันเป็นเมตริกซ์สำหรับแปลงค่าคือ $\boldsymbol{P}$ แล้ว จึงแปลงระบบสมการเดิมให้อยู่ในรูปที่ง่ายต่อการยกกำลัง จากนั้นจึงแปลงระบบสมการหลังจากที่ได้ยกกำลังแล้วให้กลับสู่เวคเตอร์เดิม ดังสรุปไว้ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.7 ระบบสมการผลต่าง $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n$ เมื่อ $\boldsymbol{A}$ คือเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขนาด 2×2 ซึ่งมีค่าเฉพาะเป็นจำนวนเชิงซ้อนคือ $\lambda_1 = a + ib$ และ $\lambda_2 = a - ib$ และเวคเตอร์เฉพาะเป็น

เวคเตอร์เชิงซ้อนคือ $\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$ และ $\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{u} - i\boldsymbol{v}$ ตามลำดับ มีคำตอบคือ

$$\boldsymbol{x}_n = c_1\lambda_1^n \boldsymbol{z}_1 + c_2\lambda_2^n \boldsymbol{z}_2 = c_1(a+ib)^n(\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}) + c_2(a-ib)^n(\boldsymbol{u}-i\boldsymbol{v})$$

เมื่อ c_1, c_2 คือค่าคงที่ ■

อนึ่ง ในกรณีที่ค่าเฉพาะเป็นจำนวนเชิงซ้อนนั้น แม้การที่ค่าเฉพาะซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อน ไม่อาจซ้ำกันกับอีกค่าเฉพาะหนึ่งได้ จะช่วยลดความยุ่งยากที่จะต้องจัดการกับปัญหาค่าเฉพาะซ้ำกัน ซึ่งอาจเกิดขึ้นได้ในกรณีที่ค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริง แต่การยกกำลังค่าเฉพาะที่เป็นจำนวนเฉพาะ กลับมีความซับซ้อนกว่าการยกกำลังจำนวนจริงอยู่พอสมควร อย่างไรก็ตาม คำตอบของระบบสมการผลต่าง เมื่อค่าเฉพาะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน ตามทฤษฎีบทที่ 3.7 ยังสามารถแสดงให้อยู่ในอีกรูปแบบหนึ่ง ซึ่งประกอบด้วยจำนวนจริงที่ค่อนข้างง่ายต่อการคำนวณได้ ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.8 ระบบสมการผลต่าง $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n$ เมื่อ $\boldsymbol{A}$ คือเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขนาด 2×2 ซึ่งมีค่าเฉพาะเป็นจำนวนเชิงซ้อนคือ $\lambda_1 = a + ib$ และ $\lambda_2 = a - ib$ และเวคเตอร์เฉพาะเป็นเวคเตอร์เชิงซ้อนคือ $\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$ และ $\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{u} - i\boldsymbol{v}$ ตามลำดับ มีคำตอบคือ

$$\boldsymbol{x}_n = r^n\left[(C_1\cos n\theta - C_2\sin n\theta)\,\boldsymbol{u} - (C_2\cos n\theta + C_1\sin n\theta)\,\boldsymbol{v}\right]$$

เมื่อ (1) C_1, C_2 คือค่าคงที่ (2) $r = \sqrt{a^2+b^2}$ (3) θ คือมุมที่เกิดจากเส้น $a + ib$ ใน**พิกัดขั้ว (polar coordinate)** และ (4) $(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right)$ ■

คำตอบของระบบสมการผลต่างตามทฤษฎีบทที่ 3.8 มีคุณสมบัติที่น่าสนใจ คือ เป็นรูปแบบคำตอบที่ขึ้นกับจำนวนจริงเท่านั้น โดยไม่มีจำนวนเชิงซ้อนใดๆ อยู่ร่วมด้วย โดยการแปลงรูปแบบคำตอบจากสมการผลต่างจากทฤษฎีบทที่ 3.7 ไปสู่อีกรูปแบบในทฤษฎีบทที่ 3.8 นั้น อาศัยข้อเท็จจริงสำคัญบางประการ ซึ่งจะได้รวบรวมไว้ ดังต่อไปนี้[1]

(1) **สูตรของเดอมัวเครอ (DeMoivre's formula)** สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $a + ib$ ใดๆ

$$(a+ib)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

เมื่อ $r = \sqrt{a^2+b^2}$ และ θ คือมุมที่เกิดขึ้นจากการแสดง $a + ib$ ในรูป**พิกัดเชิงขั้ว (polar**

[1] ผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับข้อเท็จจริงและการพิสูจน์ข้อเท็จจริงทั้งหมดเหล่านี้ได้โดยละเอียดในภาคผนวก ก ภายใต้หัวข้อเรื่องจำนวนเชิงซ้อน

coordinate)

(2) สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = a + ib$ ใดๆ คอนจูเกตเชิงซ้อนของ z แทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{z} = a - ib$ มีคุณสมบัติคือ

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$$

(3) สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = a + ib$ ใดๆ คอนจูเกตเชิงซ้อนของ z แทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{z} = a - ib$ มีคุณสมบัติคือ

$$z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\mathcal{R}(z) = 2\mathcal{R}(\bar{z})$$

เมื่อ $\mathcal{R}(\cdot)$ คือโอเปอเรเตอร์ที่ดึงเอาเฉพาะส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อนออกมา

(4) สำหรับเวคเตอร์เชิงซ้อน $\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$ ใดๆ และจำนวนเชิงซ้อน $z = a + ib$ ใดๆ ซึ่งมีคอนจูเกตเชิงซ้อนคือ $\bar{z} = a - ib$ แล้วจะได้ว่า

$$z(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) + \bar{z}(\boldsymbol{u} - i\boldsymbol{v}) = 2(a\boldsymbol{u} - b\boldsymbol{v}) = 2\left(\mathcal{R}(z)\boldsymbol{u} - \mathcal{I}(z)\boldsymbol{v}\right)$$

เมื่อ $\mathcal{I}(\cdot)$ คือโอเปอเรเตอร์ที่ดึงเอาเฉพาะส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนออกมา

จากข้อเท็จจริงข้างต้น หากขยาย $(a + ib)^n$ และ $(a - ib)^n$ ด้วยสูตรของเดอมัวเครอ และนำไปแทนค่าในคำตอบของระบบสมการผลต่างในทฤษฎีบทที่ 3.7 และเลือกให้ $c_1 = s + it$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนและ c_2 เป็นคอนจูเกตเชิงซ้อนของ c_1 คือ $\bar{c_1} = s - it$ แล้ว จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_n &= c_1 r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) + c_2 r^n(\cos n\theta - i\sin n\theta)(\boldsymbol{u} - i\boldsymbol{v}) \\
&= r^n\left[c_1(\cos n\theta + i\sin n\theta)(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) + c_2(\cos n\theta - i\sin n\theta)(\boldsymbol{u} - i\boldsymbol{v})\right] \\
&= r^n\left[(s + it)(\cos n\theta + i\sin n\theta)(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) + (s - it)(\cos n\theta - i\sin n\theta)(\boldsymbol{u} - i\boldsymbol{v})\right]
\end{aligned}$$

จากข้างต้น หากใช้ข้อเท็จจริง (2) ที่ว่าผลคูณของคอนจูเกตเชิงซ้อน จะเท่ากับคอนจูเกตเชิงซ้อนของผลคูณจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้ ค่าทั้งหมดในวงเล็บหลัง r^n จึงอยู่ในรูปตามข้อเท็จจริงที่ (4) โดย

มี

$$\begin{aligned} z &= (s+it)(\cos n\theta + i\sin n\theta) \\ &= (s\cos n\theta - t\sin n\theta) + i\,(t\cos n\theta + s\sin n\theta) \end{aligned}$$

ซึ่งประกอบด้วย $\mathcal{R}(z) = s\cos n\theta - t\sin n\theta$ และ $\mathcal{I}(z) = (t\cos n\theta + s\sin n\theta)$ ตามลำดับ โดยผลแห่งข้อเท็จจริงที่ (4) จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_n &= 2r^n\left[(s\cos n\theta - t\sin n\theta)\,\boldsymbol{u} - (t\cos n\theta + s\sin n\theta)\,\boldsymbol{v}\right] \\ &= r^n\left[(C_1\cos n\theta - C_2\sin n\theta)\,\boldsymbol{u} - (C_2\cos n\theta + C_1\sin n\theta)\,\boldsymbol{v}\right] \end{aligned}$$

เมื่อ $C_1 = 2s$ และ $C_2 = 2t$

อนึ่ง ในกรณีระบบสมการผลต่างซึ่งมีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขนาด $k \times k$ นั้น รูปแบบคำตอบของระบบสมการในกรณีทั่วไปเช่นนี้ สามารถใช้รูปแบบคำตอบในทั้งสามกรณีที่ได้พิจารณาแล้วมาผสมกันได้ อาทิ ในกรณีเมตริกซ์ขนาด 4×4 ซึ่งมีค่าเฉพาะคือ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่ซ้ำกันสองตัว และค่าเฉพาะเป็นจำนวนเชิงซ้อนอีกสองตัวคือ λ_3 และ $\lambda_4 = \bar{\lambda_3}$ จะได้ว่าคำตอบของระบบสมการผลต่างนี้เท่ากับ

$$\boldsymbol{x}_n = \sum_{i=1}^{4} c_i \lambda_i^n \boldsymbol{z}_i$$

โดยส่วนแรกของคำตอบ คือ $i = 1, 2$ จะมีรูปแบบซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทที่ 3.5 และส่วนที่สองของคำตอบ คือ $i = 3, 4$ จะมีรูปแบบซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทที่ 3.8

ตัวอย่างที่ 3.23 จากตัวอย่างที่ 3.22 ระบบสมการผลต่าง

$$\begin{aligned} x_{1n+1} &= x_{1n} + x_{2n} \\ x_{2n+1} &= -x_{1n} + x_{2n} \end{aligned}$$

ซึ่งอยู่ในรูป $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n$ เมื่อ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

มีค่าเฉพาะ คือ $1 \pm i$ และเวคเตอร์เฉพาะ $\boldsymbol{u} \pm i\boldsymbol{v}$ คือ $(0\ 1)' \pm i(-1\ 0)'$ จากรูปที่ 3.4 จะได้ว่า $r = \sqrt{2}$ และ $\theta \approx 64.82° \approx 0.79$ เรเดียน จากทฤษฎีบทที่ 3.8 คำตอบของระบบสมการผลต่างนี้จึงเท่ากับ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_n &= r^n \left[(C_1 \cos n\theta - C_2 \sin n\theta)\,\boldsymbol{u} - (C_2 \cos n\theta + C_1 \sin n\theta)\,\boldsymbol{v}\right] \\
&= \sqrt{2}^n \left[(C_1 \cos n\theta - C_2 \sin n\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (C_2 \cos n\theta + C_1 \sin n\theta) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \sqrt{2}^n \begin{pmatrix} C_2 \cos n\theta + C_1 \sin n\theta \\ C_1 \cos n\theta - C_2 \sin n\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ทั้งนี้ ค่าคงที่ข้างต้น คือ C_1 และ C_2 สามารถคำนวณได้ในลักษณะเดียวกันกับการคำนวณหาค่าคงที่ สำหรับคำตอบของระบบสมการผลต่างที่มีค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริง เช่น หากนำ $n = 0$ แทนค่าในสมการข้างต้นจะได้ว่า $(C_2, C_1) = \boldsymbol{x}_0$ $\square$

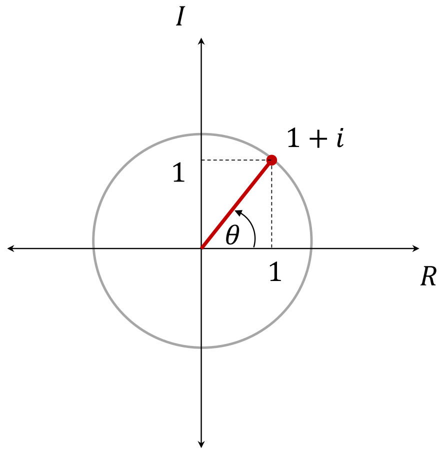
3.6 เมตริกซ์มาร์คอฟ

สมมุติให้เซตของความเป็นไปได้ทั้งหมด คือ $\mathscr{U}$ สามารถแบ่งออกได้เป็นเซตย่อย โดยที่

$$\cup_{i=1}^{k} B_i = \mathscr{U}$$

และ $B_i \cap B_j = \varnothing$ เมื่อ $i \neq j$ จากความสัมพันธ์ระหว่าง**ความน่าจะเป็นร่วม (joint probability)** และ**ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (conditional probability)** ที่ว่า $\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$ สำหรับทุกเหตุการณ์ A และ B ใดๆ จาก**กฎของเบส์ (Bayes' rule)**[1] ความน่า

[1]ตั้งชื่อตามโทมัส เบส์ (Thomas Bayes, 1701-1761) บาทหลวง นักปรัชญา และนักสถิติ ชาวอังกฤษ ซึ่งได้กล่าวถึงแนวคิดนี้ไว้ในสมุดร่างๆ ที่ต่อมาริชาร์ด ไพรซ์ (Richard Price, 1729-1791) บทหลวง นักปรัชญา และนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ ผู้เป็นเพื่อนของเบส์ ได้ตีพิมพ์แนวคิดเรื่องนี้ ภายหลังจากที่เบส์ได้เสียชีวิตไปแล้ว ทั้งนี้ มีหลักฐานที่น่าสนใจว่า แนวคิดเกี่ยวกับกฎของเบส์นั้น ปรากฏเป็นครั้งแรกในงานของนิโคลาส ซอนเดอซัน (Nicholas Saunderson, 1682-1739) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ ก่อนงานเขียนของเบส์หลายสิบปี อีกทั้งยังปรากฏในงานของ ปิแยร์-ซีมง ลาปลาส (Pierre-Simon Laplace, 1749-1827) ซึ่งค้นพบแนวคิดเรื่องนี้อย่างเป็นเอกเทศกัน ภายหลังเบส์ไม่นานนัก และทั้งยังเป็นผู้วางรากฐาน แนวคิดเรื่องสถิติแบบเบเซียน (Bayesian statistics) และการตีความเรื่องความน่าจะเป็นในเชิงอัตวิสัย (subjective probability) แบบเบเซียน ดังที่รู้จักกันในปัจจุบัน



รูปที่ 3.4 การแปลงจำนวนเชิงซ้อนให้อยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้ว จากตัวอย่างที่ 3.23 ค่าเฉพาะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการผลต่างซึ่งเท่ากับ $1 \pm i$ สามารถแปลงให้อยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้วได้ดังข้างต้น จากกราฟซึ่งมีแกนนอนและแกนตั้งแทนจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพตามลำดับของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ รัศมีของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดซึ่งลากผ่านจุด $(a, b) = (1, 1)$ จะมีความยาวคือ $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ ทั้งนี้ โดยที่

$$\cos\theta = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

จะได้ว่า

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 64.82^\circ \approx 0.79 \text{ เรเดียน}$$

จะเป็นของเหตุการณ์ A จะเท่ากับ

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

เช่น สมมติให้สถานะการทำงานของบุคคลหนึ่ง แบ่งออกได้เป็น 2 สถานะ คือ มีงานทำ และไม่มีงานทำ หากให้ A_1 คือเหตุการณ์ที่บุคคลหนึ่ง มีงานทำในปีหน้า B_1 คือสถานะที่บุคคลหนึ่ง มีงานทำในปีนี้ และ B_2 คือ สถานะที่บุคคลหนึ่งมีไม่งานทำในปีนี้ หากสมมติให้ความน่าจะเป็นของแต่ละสถานะการทำงาน เท่ากับสัดส่วนบุคคลตามแต่ละสถานะ[1] จากกฎของเบส์ข้างต้น สัดส่วนของผู้มีงานทำในปีหน้าจึงเท่ากับ

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B_1) + \mathbb{P}(A_1 \cap B_2) \\ &= \mathbb{P}(A_1|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A_1|B_2)\mathbb{P}(B_2) \end{aligned}$$

กล่าวคือ สัดส่วนผู้มีงานทำในปีหน้า คือ $\mathbb{P}(A_1)$ เท่ากับ สัดส่วนผู้มีงานทำในปีหน้า ซึ่งเป็นผู้มีงานทำในปีนี้ คือ $\mathbb{P}(A_1 \cap B_1)$ รวมกับสัดส่วนผู้มีงานทำในปีหน้า ซึ่งเป็นผู้ไม่มีงานทำในปีนี้ คือ $\mathbb{P}(A_1 \cap B_2)$ ซึ่งหากอธิบายโดยใช้ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข ก็จะได้ว่าสัดส่วนผู้มีงานทำในปีหน้า คือ $\mathbb{P}(A_1)$ เท่ากับ สัดส่วนผู้มีงานทำในปีนี้ ซึ่งยังคงรักษางานเอาไว้ได้ คือ $\mathbb{P}(A_1|B_1)\mathbb{P}(B_1)$ รวมกับสัดส่วนผู้ไม่มีงานทำในปีนี้ ซึ่งหางานได้ คือ $\mathbb{P}(A_1|B_2)\mathbb{P}(B_2)$ และเช่นเดียวกันนี้ สัดส่วนผู้ไม่มีงานทำในปีหน้า จะเท่ากับ

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}(A_2 \cap B_1) + \mathbb{P}(A_2 \cap B_2) \\ &= \mathbb{P}(A_2|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A_2|B_2)\mathbb{P}(B_2) \end{aligned}$$

โดยความสัมพันธ์ทั้งหมดข้างต้น สามารถแสดงในรูปเมตริกซ์ คือ

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_1) \\ \mathbb{P}(A_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_1|B_1) & \mathbb{P}(A_1|B_2) \\ \mathbb{P}(A_2|B_1) & \mathbb{P}(A_2|B_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(B_1) \\ \mathbb{P}(B_2) \end{pmatrix}$$

ตัวอย่างข้างต้นเป็นกรณีอย่างง่าย ที่สถานะของบุคคลสามารถจำแนกได้เป็น 2 สถานะ ในกรณี

[1]ภายใต้ข้อสมมตินี้ อาจตีความว่า $\mathbb{P}(B_1)$ คือ ความน่าจะเป็นที่บุคคลผู้หนึ่งที่สุ่มจากประชากรทั้งหมดจะเป็นผู้มีงานทำในปีนี้ หรือ $\mathbb{P}(B_1)$ คือ สัดส่วนของประชากรที่เป็นผู้มีงานทำในปีนี้ก็ได้

รูปที่ 3.5 อังเดร อังเดรเยวิช มาร์คอฟ (Andrey Andreyevich Markov, 1856-1922)*
ภายหลังการตายของเกาส์ วิวัฒนาการความรู้ทางคณิตศาสตร์ ดูจะไม่ได้ถูกผูกขาดในประเทศใดประเทศหนึ่งอย่างชัดเจน ดังเช่นยุคก่อนที่มีวิวัฒนาการไล่เรียงมาจากอิตาลี อังกฤษ ฝรั่งเศส และเยอรมนี ตามลำดับ ส่วนความรู้ทางคณิตศาสตร์ในรัสเซียนั้น ได้เริ่มมีพัฒนาการอย่างเด่นชัดขึ้นในสมัยของ พาสนุตติ เชบีเชฟ (Pafnuty Chebyshev, 1821-1894) ผู้เปรียบได้กับบิดาของคณิตศาสตร์ในรัสเซีย สืบเนื่องต่อมาถึงอังเดร มาร์คอฟ ผู้เป็นลูกศิษย์ของเชบีเชฟ มาร์คอฟศึกษาตั้งแต่ระดับปริญญาตรีถึงปริญญาเอก ที่มหาวิทยาลัยเซนต์ปีเตอร์สเบอร์ก และได้ทำงานเป็นอาจารย์ที่มหาวิทยาลัยเดิมจนกระทั่งเกษียณอายุ เมตริกซ์มาร์คอฟซึ่งได้ศึกษากันในบทนี้ ยังเป็นเครื่องมือที่ถูกใช้อย่างแพร่หลายในปัจจุบัน ในหลากหลายสาขาวิชาทั้งด้านคณิตศาสตร์และสถิติ เศรษฐศาสตร์และการเงิน สังคมศาสตร์ ตลอดจนภาษาศาสตร์ ดนตรี และกีฬา โดยในตัวอย่างการใช้เมตริกซ์มาร์คอฟที่ปรากฏในงานเขียนของมาร์คอฟเองนั้น เป็นการประยุกต์เพื่ออธิบายสัมผัสสระและพยัญชนะในวรรณคดีของรัสเซีย

*https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a8/Andrei_Markov.jpg

ทั่วไปที่สถานะของบุคคลหรือเหตุการณ์สามารถจำแนกได้ k สถานะ ความสัมพันธ์ข้างต้นในรูปสมการผลต่างของความน่าจะเป็นได้ในรูปเมตริกซ์ จะเท่ากับ

$$\boldsymbol{\pi}_{n+1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi}_n$$

โดยที่

$$\boldsymbol{\pi}_{n+1} = \begin{pmatrix} \pi^1_{n+1} \\ \vdots \\ \pi^k_{n+1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & \dots & p_{kk} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\pi}_n = \begin{pmatrix} \pi^1_n \\ \vdots \\ \pi^k_n \end{pmatrix}$$

เมื่อ π^i_n คือ ความน่าจะเป็นที่บุคคลอยู่ในสถานะ i ในเวลา n และ $\boldsymbol{P}$ คือ **เมตริกซ์การเปลี่ยนผ่าน (transition matrix)** หรือ**เมตริกซ์มาร์คอฟ (Markov matrix)** ที่ค่าของเมตริกซ์ p_{ij} คือ ความน่าจะเป็นที่บุคคลผู้จะอยู่ในสถานะ j ในช่วงเวลา n จะอยู่ในสถานะ i ในช่วงเวลาถัดไป คือ $n+1$

จากกฎของความน่าจะเป็น สมการผลต่างของความน่าจะเป็นได้มีคุณสมบัติที่สำคัญสามประการ คือ ในประการแรก $\sum_{i=1}^{k} \pi^i_n = 1$ กล่าวคือ ความน่าจะเป็นของทุกสถานะที่เป็นไปได้ของบุคคลรวมกันแล้ว จะต้องเท่ากับ 1 ในประการที่สอง โดยที่ความน่าจะเป็นต้องมีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 จึงได้ว่า $0 \le \pi^i_n, p_{ij} \le 1$ และในประการสุดท้าย $\sum_{i=1}^{k} p_{ij} = 1$ กล่าวคือ บุคคลจากสถานะ j ในเวลาปัจจุบันจะต้องตกอยู่ในสถานะใดสถานะหนึ่งจาก $1, \dots, k$ ในเวลาถัดไป ซึ่งเมื่อได้รวมความน่าจะเป็นจากทุกความเป็นไปได้แล้ว จะต้องเท่ากับ 1 ทั้งนี้ แม้สมการข้างต้นจะเป็นการแสดงความสัมพันธ์ ในรูปของความน่าจะเป็นหรือสัดส่วน หากต้องการแปลงความสัมพันธ์ให้ในอยู่ในรูปของจำนวนประชากร ก็สามารถทำได้ โดยการนำจำนวนประชากร เช่น M คูณทั้งสองข้างของสมการ ซึ่งให้ระบบสมการผลต่างในรูป

$$\boldsymbol{\pi}_{n+1}M = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi}_n M$$

โดยที่ $\pi^i_n M$ คือจำนวนประชากรที่อยู่ในสถานะ i ในช่วงเวลา n ภายใต้ข้อสมมติที่ว่า M หรือจำนวนประชากรจะต้องมีค่าคงที่และเท่ากันทุกปี

ตัวอย่างที่ 3.24 สมมติให้อัตราการว่างงานในเขตกรุงเทพในปี 2563 เท่ากับ 0.01 ความเสี่ยงจากการว่างงาน ของประชากรในเขตกรุงเทพเท่ากับ 0.1 และโอกาสที่ผู้ว่างงานจะหางานได้เท่ากับ 0.4 สมมติให้ π^i_n คือ ความน่าจะเป็นที่คนผู้หนึ่งในเขตกรุงเทพ ตกอยู่ในสถานะ i ในปี n และ p_{ij}

คือ ความน่าจะเป็นที่คนผู้หนึ่ง เปลี่ยนสถานะจาก i ในปีปัจจุบัน เป็น j ในปีหน้า โดยที่ $i = 1$ คือสถานะการเป็นผู้ว่างงาน และ $i = 2$ คือสถานะการไม่ใช่ผู้ว่างงาน

จากข้อมูลข้างต้น $p_{21} = 0.4$ และ $p_{12} = 0.1$ และจากคุณสมบัติของความน่าจะเป็นที่ว่า ผลรวมของความน่าจะเป็น ของแต่ละคอลัมน์ในเมตริกซ์มาร์คอฟ จะต้องเท่ากับ 1 จึงได้ว่า $p_{11} = 0.6$ และ $p_{22} = 0.9$ จากข้อมูลทั้งหมด จึงสามารถพยากรณ์อัตราการว่างงานในปี 2564 ได้ จากระบบสมการผลต่าง

$$\begin{pmatrix} \pi^1_{2564} \\ \pi^2_{2564} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^1_{2563} \\ \pi^2_{2563} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.11 \\ 0.90 \end{pmatrix}$$

ตัวอย่างข้างต้นแม้จะเป็นสถานการณ์สมมติ แต่สามารถชี้ให้เห็นถึงความผันผวนของอัตราการว่างงานที่สูงมาก อันเนื่องจากความเสี่ยงของตกเป็นผู้ว่างงาน ที่ค่อนข้างสูง กล่าวคือ แม้อัตราการว่างงานในปี 2563 จะค่อนข้างต่ำเท่ากับ 0.01 แต่ภายหลังจากที่เวลาผ่านไปเพียงหนึ่งปี กลับส่งผลให้อัตราการว่างงานเพิ่มขึ้นถึงกว่า 10 เท่าเป็น 0.105 ในปี 2564 $\square$

ตัวอย่างที่ 3.25 การระบาดของโรคติดเชื้อไวรัสโคโรนาในปลายปี 2019 หรือโควิด19 เป็นวิกฤตรุนแรงทางด้านสาธารณสุขและด้านเศรษฐกิจ โดยข้อมูลสำคัญอย่างยิ่งในการกำหนดนโยบาย ทั้งด้านสาธารณสุขและด้านเศรษฐกิจ ได้แก่ ประมาณการผู้ติดเชื้อ สมมติให้ความน่าจะเป็นที่ผู้ติดเชื้อโควิด หายจากการติดเชื้อภายในหนึ่งเดือน เท่ากับ 0.7 ความเสี่ยงที่ผู้ไม่ได้ติดเชื้อ จะติดเชื้อภายในหนึ่งเดือน เท่ากับ 0.3 และให้เดือนแรกของการระบาด มีสัดส่วนผู้ติดเชื้อในเขตกรุงเทพเท่ากับ 0.01 ของประชากร หากให้ π^i_n คือ สัดส่วนผู้อยู่ในเขตกรุงเทพที่มีสถานะ i ในปี n และ p_{ij} คือ ความน่าจะเป็นที่ผู้หนึ่งเปลี่ยนสถานะจาก i ในปัจจุบัน เป็น j ในช่วงเวลาถัดไป โดยที่ $i = 1$ คือ สถานะการเป็นผู้ติดเชื้อ และ $i = 2$ คือ สถานะการไม่ใช่ผู้ติดเชื้อ จากข้อมูลข้างต้น $p_{21} = 0.7$ และ $p_{12} = 0.3$ และจากคุณสมบัติของความน่าจะเป็นในเมตริกซ์มาร์คอฟ ที่ผลรวมของความน่าจะเป็นของแต่ละคอลัมน์ จะต้องเท่ากับ 1 จึงได้ว่า $p_{11} = 0.3$ และ $p_{22} = 0.7$ จากข้อมูลทั้งหมด สัดส่วนผู้ติดเชื้อในเดือนถัดไป ซึ่งคำนวณได้จากระบบสมการผลต่าง จึงเท่ากับ

$$\begin{pmatrix} \pi^1_{n+1} \\ \pi^2_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^1_{2563} \\ \pi^2_{2563} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.7 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

กล่าวคือ สัดส่วนและจำนวนของผู้ติดเชื้อจะเพิ่มขึ้นถึง 30 เท่าภายในหนึ่งเดือน $\square$

ลักษณะที่น่าสังเกตประการหนึ่งของเมตริกซ์มาร์คอฟข้างต้น คือ ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยน

ผ่านสถานะ ต่างไม่ขึ้นอยู่กับช่วงเวลา กล่าวคือ ไม่ว่าจะเป็นการเปลี่ยนผ่านสถานะในระหว่างช่วงเวลาใด ค่าในเมตริกซ์ต่างเป็นค่าคงที่ คุณสมบัติเช่นนี้ มีชื่อเรียกเฉพาะในทางสถิติว่า**ความนิ่ง (stationary)** ซึ่งช่วยให้สามารถวิเคราะห์**ความน่าจะเป็นในระยะยาว (long-run probability)** หรือ**ความน่าจะเป็นที่สถานะคงที่ (steady-state probability)** ต่อไปได้ ดังนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 3.4 จากความสัมพันธ์ของความน่าจะเป็นที่ถูกกำหนดโดยสมการผลต่าง

$$\boldsymbol{\pi}_{n+1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi}_n$$

ความน่าจะเป็นที่สถานะคงที่ (steady-state probability) หรือ**ดุลยภาพที่สถานะคงที่ (steady-state equilibrium)** ของสมการผลต่างนี้ มีคุณสมบัติคือ $\boldsymbol{\pi}_{n+1} = \boldsymbol{\pi}_n$

กล่าวคือ ภายหลังจากที่ความน่าจะเป็นได้เข้าสู่สถานะคงที่แล้ว ก็จะมีค่าคงที่เช่นนั้นไปตลอด ซึ่งจากการแทนค่า $\boldsymbol{\pi}_{n+1} = \boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{\pi}$ ในระบบสมการผลต่าง ความน่าจะเป็นที่สถานะคงที่ได้ หรือ $\boldsymbol{\pi}$ จึงเป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่มีลักษณะเดียวกัน คือ

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{0}$$

ทั้งนี้ แม้โดยทั่วไปแล้วระบบสมการเชิงเส้นที่มีลักษณะเดียวกันจะไม่มีคำตอบ หรือมีคำตอบมากมายไม่จำกัด แต่เมื่อได้นำคุณสมบัติของความน่าจะเป็นที่ว่า ผลรวมของความน่าจะเป็นของทุกสถานะจะต้องเท่ากับ 1 เข้าพิจารณาร่วมด้วยแล้ว จะช่วยให้สามารถระบุคำตอบเพียงชุดเดียวได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.26 จากตัวอย่างที่ 3.25 สัดส่วนผู้ติดเชื้อที่สถานะคงที่จะเท่ากับ $\boldsymbol{\pi}$ ที่เป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่เหมือนกัน

$$\begin{pmatrix} 1-0.3 & -0.3 \\ -0.7 & 1-0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \pi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งให้คำตอบของระบบสมการมากมายไม่จำกัด ในรูป

$$\pi^1 = \frac{3}{7}\pi^2$$

อย่างไรก็ตาม จากคุณสมบัติของความน่าจะเป็น คือ $\pi^2 = 1 - \pi^1$ เมื่อนำไปแทนที่ในคำตอบของระบบสมการข้างต้น จะให้คำตอบเพียงชุดเดียว คือ

$$\pi^1 = 0.3 \text{ และ } \pi^2 = 0.7$$

กล่าวคือ ในระยะยาว สัดส่วนผู้ติดเชื้อและผู้ไม่ติดเชื้อจะคงที่ ที่ร้อยละ 30 และ 70 ตามลำดับ ทั้งนี้ หากเปรียบเทียบสัดส่วนที่ระดับคงที่ข้างต้น กับสัดส่วนที่ได้จากการเปลี่ยนผ่านสถานะจากเวลาแรกไปสู่ช่วงต่อไปในตัวอย่างที่ 3.25 จะเห็นว่า การเปลี่ยนผ่านตามเมตริกซ์มาร์คอฟในตัวอย่างนี้ ทำให้สัดส่วนผู้ติดเชื้อเข้าสู่ระดับคงที่อย่างรวดเร็ว กล่าวคือ จากสัดส่วนผู้ติดเชื้อในช่วงแรกที่เท่ากับ 0.01 เมื่อผ่านไปเพียงช่วงเวลาเดียว สัดส่วนผู้ติดเชื้อจะเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวที่ระดับ 0.3 ซึ่งไม่เปลี่ยนแปลงอีกต่อไปหลังจากนี้ อนึ่ง จากคุณสมบัติความคงที่ของความน่าจะเป็น ที่เข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว สถานะการติดเชื้อในช่วงเวลาต่อมา จะเท่ากับ

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.7 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

ซึ่งเท่ากับสัดส่วนผู้ติดเชื้อในช่วงเวลาเดิม $\square$

การหาความน่าจะเป็นที่ดุลยภาพระยะยาวอีกวิธีหนึ่ง สามารถใช้วิธีการยกกำลังเมตริกซ์ และแก้หาคำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้น ดังที่ได้พิจารณาก่อนหน้านี้ โดยหากตีความคำว่าระยะยาว ว่าหมายถึงชั่วขณะเวลาที่นานออกไปไม่มีที่สิ้นสุด ดังนี้ ความน่าจะเป็นในระยะยาวจึงเท่ากับ $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}_n$ ทั้งนี้ แม้การหาดุลยภาพระยะยาวด้วยวิธีแม้อาจดูยุ่งยากไปบ้าง เนื่องจากต้องคำนวณหาค่าเฉพาะของเมตริกซ์มาร์คอฟ เพื่อยกกำลังเมตริกซ์ แต่ก็มีข้อดีเหนือกว่าการใช้นิยามของความน่าจะเป็น ในสถานะคงที่บางประการ คือ ในประการแรก การหาคำตอบของสมการผลต่าง จะช่วยให้สามารถสรุปกฎเกณฑ์ที่สำคัญ เกี่ยวกับค่าเฉพาะของเมตริกซ์มาร์คอฟ และความเสถียร (stability) ของเมตริกซ์ได้ว่า ค่าเฉพาะแบบใดจะทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเสถียร และค่าเฉพาะแบบใดจะทำให้ความสัมพันธ์ไม่เสถียร[1] ข้อดีที่ชัดเจนอีกประการหนึ่งของการหาคำตอบของสมการผลต่าง คือ คำตอบของระบบสมการในรูปทั่วไป จะช่วยให้สามารถคำนวณค่าความน่าจะเป็นที่ขณะเวลาใดเวลาหนึ่งได้ โดยไม่จำเป็นต้องศึกษาความน่าจะเป็นที่สถานะคงที่เท่านั้น เช่น จากตัวอย่างเรื่องสัดส่วนผู้ติดเชื้อโควิด หากต้องการทราบสัดส่วนผู้ติดเชื้อ

[1]ในที่นี้ ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรจากสมการผลต่างที่เสถียร สามารถนิยามได้ว่า คือกรณีที่ความน่าจะเป็นในระยะยาวจะเบี่ยงเข้าหาค่าใดค่าหนึ่ง (converge) ต่างจากความสัมพันธ์ที่ไม่เสถียร ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ ความน่าจะเป็นในระยะยาวเปลี่ยนแปลงสับสนไปมา ไม่มีรูปแบบที่ชัดเจน (diverge)

โควิดในอีก 10 เดือนข้างหน้าก็สามารถทำได้ง่าย หากได้ทราบรูปแบบคำตอบของระบบสมการผลต่างเป็นการเฉพาะ

คำตอบของระบบสมการผลต่าง ในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ คือ เมตริกซ์มาร์คอฟสามารถหาได้ ด้วยวิธีการในทฤษฎีบทที่ 3.5 อย่างไรก็ตาม โดยที่เมตริกซ์มาร์คอฟมีคุณสมบัติพิเศษบางประการ คือ ผลรวมของค่าในทุกคอลัมน์จะต้องเท่ากับ 1 คุณสมบัติดังกล่าวจึงช่วยให้ทราบได้ ถึงค่าเฉพาะบางค่าของเมตริกซ์มาร์คอฟเป็นการทันที ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.9 สมมติให้ $\boldsymbol{P}$ เป็นเมตริกซ์มาร์คอฟ ค่าเฉพาะค่าหนึ่งของ $\boldsymbol{P}$ จะเท่ากับ 1 เสมอ ■

ทฤษฎีบทที่ 3.9 สามารถพิสูจน์ได้ จากการหาค่าเฉพาะของเมตริกซ์ด้วยกระบวนการปกติ กล่าวคือ หากให้ λ เป็นค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{P} = (p)_{ij}$ ซึ่งเป็นเมตริกซ์มาร์คอฟขนาด $k \times k$ แล้ว จากคำนิยามของค่าเฉพาะ จะได้ว่า

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

จากคุณสมบัติของเมตริกซ์มาร์คอฟ ที่ผลรวมของค่าในแต่ละคอลัมน์จะต้องเท่ากับ 1 ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{k} p_{ij} - \lambda = 1 - \lambda$$

และจากคุณสมบัติของตัวกำหนด ที่ว่าหากผลรวมของค่าในทุกคอลัมน์ของเมตริกซ์เท่ากับ 0 ค่ากำหนดของเมตริกซ์จะเท่ากับ 0 ดังนี้ ค่ากำหนดค่าหนึ่งที่ทำให้คุณสมบัติข้างต้นเป็นจริง จึงเท่ากับค่ากำหนดที่ทำให้ $1 - \lambda = 0$ กล่าวคือ $\lambda = 1$

หากนำผลที่ได้จากทฤษฎีบทที่ 3.9 ประกอบกับทฤษฎีบทที่ 3.5 คำตอบของสมการผลต่าง ที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ คือ เมตริกซ์มาร์คอฟขนาด $k \times k$ จึงเท่ากับ

$$\boldsymbol{\pi}_n = c_1 1^n \boldsymbol{z}_1 + c_2 \lambda_2^n \boldsymbol{z}_2 + \ldots + c_k \lambda_k^n \boldsymbol{z}_k$$

เมื่อ $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_k$ และ $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ คือเวคเตอร์เฉพาะ และค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{P}$ ตามลำดับ

และ $c_1, \ldots, c_k$ คือค่าคงที่ ที่ทำให้ $\boldsymbol{\pi}_0$ ตามรูปแบบข้างต้น เท่ากับค่าตั้งต้น $\bar{\boldsymbol{\pi}}_0$ จากคำตอบของสมการผลต่างข้างต้น หาก $|\lambda_i| < 1$ สำหรับ $i = 2, \ldots, k$ ความน่าจะเป็นในระยะยาวจะเท่ากับ

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\pi}_n = c_1\boldsymbol{z}_1$$

อนึ่ง จากข้อเท็จจริงที่ว่า ความน่าจะเป็นจะต้องมีค่าเป็นบวก $\boldsymbol{z}_1$ซึ่งเป็นเวคเตอร์เฉพาะของค่าเฉพาะ $\lambda = 1$ จึงต้องมีทุกค่าในเวคเตอร์เป็นค่าบวก และจากคุณสมบัติที่ว่า ผลรวมของความน่าจะเป็นจะต้องเท่ากับ 1 ค่า c_1 จึงเป็นค่าคงที่ ที่ปรับให้ผลรวมของค่าใน $c_1\boldsymbol{z}_1$ เท่ากับ 1 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.27 จากตัวอย่างที่ 3.25 เมตริกซ์มาร์คอฟของสถานะการติดเชื้อโควิด คือ

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.7 & 0.7 \end{pmatrix}$$

จากทฤษฎีบทที่ 3.9 ค่าเฉพาะค่าหนึ่งของ $\boldsymbol{P}$ คือ $\lambda = 1$ ซึ่งมีเวคเตอร์เฉพาะ คือ $\boldsymbol{z}_1$ ที่เป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{pmatrix} -0.7 & 0.3 \\ 0.7 & -0.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ดังนี้ คำตอบของระบบสมการ คือ เวคเตอร์เฉพาะ จึงเท่ากับ

$$\boldsymbol{z}_1 = s\begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

นอกจากนี้เนื่องจากทั้งสองแถวของเมตริกซ์ต่างไม่เป็นอิสระระหว่างกัน ค่าเฉพาะอีกค่าหนึ่งของ $\boldsymbol{P}$ จึงเท่ากับ 0 และโดยที่ค่าเฉพาะค่าอื่นนอกเหนือจาก 1 คือ $-1 < 0 < 1$ หากให้ $s = 1, c_1 = 0.7$ ความน่าจะเป็นในระยะยาวจะเท่ากับ

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\pi}_n = c_1\boldsymbol{z}_1 = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

ซึ่งเท่ากับความน่าจะเป็นที่สถานะคงที่ ซึ่งคำนวณได้ตามตัวอย่างที่ 3.26 □

จากตัวอย่างข้างต้น เงื่อนไขที่ทำให้เมตริกซ์สัมประสิทธิ์มาร์คอฟเสถียร สามารถสรุปได้ในรูปทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.10 สมมติให้ $\boldsymbol{P}$ คือ เมตริกซ์มาร์คอฟขนาด $k \times k$ ซึ่งมีคุณสมบัติ คือ (1) ทุกค่าในเมตริกซ์ อยู่ระหว่าง 0 และ 1 และผลรวมของค่าในเมตริกซ์ในแต่ละคอลัมน์เท่ากับ 1 และ (2) $\boldsymbol{P}^r$ ยังคงเป็นเมตริกซ์มาร์คอฟ ที่มีคุณสมบัติเช่นเดิมดังเช่นในข้อ (1) ดังนั้น

1. ค่าเฉพาะค่าหนึ่งของ $\boldsymbol{P}$ จะเท่ากับ 1

2. ค่าเฉพาะค่าอื่นๆ ของ $\boldsymbol{P}$ คือ λ จะอยู่ระหว่าง 0 และ 1 กล่าวคือ $|\lambda| < 1$

3. ค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{P}$ ซึ่งเท่ากับ 1 มีเวคเตอร์เฉพาะ $\boldsymbol{z}_1$ ซึ่งทุกค่าในเวคเตอร์เป็นบวก

4. ความน่าจะเป็นในระยะยาว คือ

$$\mathrm{lim}_{n\to\infty}\boldsymbol{\pi}_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} z_{1i}} \cdot \boldsymbol{z}_1$$

เมื่อ $\boldsymbol{z}_1 = (z_{11}, \ldots, z_{1k})$ และ $\boldsymbol{\pi}_n$ คือคำตอบของสมการผลต่าง $\boldsymbol{\pi}_{n+1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi}_n$ ■

3.7 ค่าของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ในรูปกำลังสอง

จากนิยามของฟังก์ชั่นในรูปกำลังสอง (quadratic form) ซึ่งอยู่ในรูป

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

เมื่อ $\boldsymbol{A}$ คือ เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ซึ่งเป็นเมตริกซ์สมมาตร ทั้งนี้ จากที่ได้พิจารณาแล้วจากกระบวน-การหาจุดต่ำสุด และสูงสุดของฟังก์ชั่น ว่า ค่า (definiteness) ของ $\boldsymbol{A}$ เป็นเงื่อนไขลำดับที่สองที่กำหนดว่าค่าของตัวแปร $\boldsymbol{x}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขลำดับแรก คือ $f(\boldsymbol{x}) = 0$ นั้น สอดคล้องกับรูปแบบใด จากความเป็นไปได้ทั้งห้าประเภท คือ จุดต่ำสุดในบริเวณรอบๆ ที่มีจุดเดียว จุดสูงสุดในบริเวณรอบๆ ที่มีจุดเดียว จุดต่ำสุดในบริเวณรอบๆ ที่มีหลายจุด จุดสูงสุดในบริเวณรอบๆ ที่มีหลายจุด หรือจุดต่ำสุดของจุดเว้าของอานม้า โดยแนวทางหนึ่งในการจำแนกความเป็นไปได้ในแต่ละแบบนั้น จำเป็นต้องพิจารณารูปแบบของไมเนอร์หลักของเมตริกซ์ ซึ่งเป็นกระบวนการที่ค่อนข้างซับซ้อน และใช้เวลาค่อนข้างมาก อย่างไรก็ตาม ในส่วนสุดท้ายของบทนี้ จะได้พิจารณาอีกวิธีการหนึ่งในการจำแนกแต่ละรูปแบบข้างต้น โดยพิจารณาเพียงลักษณะค่าเฉพาะของเมตริกซ์ ซึ่ง

เป็นวิธีที่ง่ายและสะดวกกว่าเดิมเป็นอย่างมาก ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.7 จากฟังก์ชั่นในรูปกำลังสอง $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ เมื่อ $\boldsymbol{A}$ คือ เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ซึ่งเป็นเมตริกซ์สมมาตรขนาด $n \times n$ ที่มีค่าเฉพาะคือ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ จะได้ว่า

1. $\boldsymbol{A}$ มีค่าเป็นบวกก็ต่อเมื่อค่าเฉพาะทุกค่ามากกว่า 0
2. $\boldsymbol{A}$ มีค่าเป็นลบก็ต่อเมื่อค่าเฉพาะทุกค่าน้อยกว่า 0
3. $\boldsymbol{A}$ มีค่ากึ่งบวกก็ต่อเมื่อค่าเฉพาะทุกค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0
4. $\boldsymbol{A}$ มีค่ากึ่งลบก็ต่อเมื่อค่าเฉพาะทุกค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0
5. $\boldsymbol{A}$ มีค่าไม่แน่นอนก็ต่อเมื่อค่าเฉพาะบางค่ามากกว่า 0 และมีค่าเฉพาะบางค่าน้อยกว่า 0 ■

การพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้นได้โดยง่ายจากผลในทฤษฎีบทที่ XX ว่าค่าเฉพาะของเมตริกซ์แกนจะเท่ากับค่าบนแกนของเมตริกซ์ ดังนั้น หากนิยาม $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ และนำไปแทนที่ $\boldsymbol{x}$ ในฟังก์ชั่นในรูปกำลังสองแล้ว จะได้

$$f(\boldsymbol{Qy}) = (\boldsymbol{Qy})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Qy}) = \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{AQ})\boldsymbol{y}$$

ซึ่งหาก $\boldsymbol{Q}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีคุณสมบัติที่ทำให้ $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{AQ}$ เป็นเมตริกซ์แกน จะช่วยให้กระบวนการหาค่าเฉพาะ และการหาค่าของเมตริกซ์ในกรณีเมตริกซ์แกน สามารถทำได้โดยง่าย[1] กล่าวคือ

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{Qy}) &= \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{AQ})\boldsymbol{y} \\ &= \boldsymbol{y}'\mathsf{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\boldsymbol{y} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 \end{aligned}$$

จากนิยามค่าของเมตริกซ์ และจากคุณสมบัติของ $y_i^2 > 0$ เมื่อ $y_i \neq 0, \forall i = 1, \ldots, n$ ค่าของเมตริกซ์ในรูปสมการข้างต้น จึงมีความสัมพันธ์กับค่าเฉพาะของเมตริกซ์โดยตรง เช่น ในกรณีที่ $\lambda_i > 0, \forall i = 1, \ldots, n$ จะได้ว่า $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$ สำหรับ $\boldsymbol{x} \gg \boldsymbol{0}$ เสมอ ซึ่งสอดคล้องกับนิยามของ

[1] จากกระบวนการแปลงให้เป็นเมตริกซ์แกน เมื่อ $\boldsymbol{Q}$ มีคุณสมบัติที่ทำให้ $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}$ เป็นเมตริกซ์แกน และจากทฤษฎีบทสเปคตรัมของเมตริกซ์สมมาตร ที่ $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ} = \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{AQ}$ เมื่อ $\boldsymbol{A}$ สมมาตร โดยที่ $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{AQ}$ และ $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์คล้ายกัน จึงมีค่าเฉพาะเดียวกัน โดยนัยแห่งทฤษฎีบทที่ 3.2

เมตริกซ์ที่มีค่าเป็นบวก ดังนี้ ค่าของเมตริกซ์จึงอาจจำแนกได้ จากค่าของค่าเฉพาะโดยตรงตามทฤษฎีบทที่ 3.7

ตัวอย่างที่ 3.28 จากเมตริกซ์
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
แถวทั้งสองของเมตริกซ์ไม่เป็นอิสระระหว่างกัน ดังนี้ ค่าเฉพาะค่าหนึ่งของ $\boldsymbol{A}$ จึงเท่ากับ 0 และจากคุณสมบัติของค่าเฉพาะที่ว่า ผลรวมของค่าเฉพาะของเมตริกซ์จะเท่ากับ $\text{tr}(\boldsymbol{A}) = 5$ ค่าเฉพาะอีกค่าหนึ่งของเมตริกซ์ จึงเท่ากับ 5 จากทฤษฎีบทที่ 3.7 โดยที่ค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ ทุกค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 จึงสรุปได้ว่า $\boldsymbol{A}$ มีค่ากึ่งบวก ทั้งนี้ จากตัวอย่างข้างต้น จะสังเกตได้ว่า การหาค่าของเมตริกซ์ด้วยวิธีพิจารณาค่าเฉพาะ สามารถทำได้สะดวกรวดเร็ว กว่าวิธีการพิจารณาไมเนอร์หลัก กล่าวคือ โดยที่ไมเนอร์หลักแบบเรียง (Leading principal minor) ของ $\boldsymbol{A}$ ที่ระดับ 1 คือ 1 และไมเนอร์หลักแบบเรียงที่ระดับ 2 คือ $|\boldsymbol{A}| = 0$ ค่าของเมตริกซ์จึงไม่อาจพิจารณาได้จากค่าของไมเนอร์หลักแบบเรียงเท่านั้น หากจะต้องพิจารณาค่าของไมเนอร์หลักทั้งหมด โดยจากไมเนอร์หลักที่ระดับ 1 อีกค่าหนึ่ง คือ 4 นั้น จึงสามารถสรุปได้ว่า $\boldsymbol{A}$ มีค่ากึ่งบวก เนื่องจากค่าของไมเนอร์หลักทุกระดับมากกว่า หรือเท่ากับ 0 ซึ่งตรงกับข้อสรุปที่ได้จากวิธีแรก □

ตัวอย่างที่ 3.19 จากเมตริกซ์
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}$$
หากพิจารณาค่าของเมตริกซ์ ด้วยวิธีไมเนอร์หลักและไมเนอร์หลักแบบเรียง จะได้ว่า $\boldsymbol{A}$ ไม่สามารถมีค่าลบหรือมีค่ากึ่งลบได้ เนื่องจากไมเนอร์หลักแบบเรียงที่อันดับแรก คือ 1 มีค่าเป็นบวก แต่ไมเนอร์หลักแบบเรียงอันดับที่สอง คือ $x - 4$ ดังนี้ หาก $x > 4$ ค่าของไมเนอร์หลักแบบเรียงอันดับแรก และอันดับที่สอง จะมีค่าเป็นบวกทั้งคู่ และหาก $x = 4$ อันดับแรกจะเป็นบวกและอันดับที่สองจะเท่ากับศูนย์ และหาก $x < 4$ อันดับแรกจะเป็นบวกและอันดับที่สองเป็นลบ ซึ่งให้ผลสรุปคือ $\boldsymbol{A}$ มีค่าเป็นบวก มีค่ากึ่งบวก และมีค่าไม่แน่นอน ตามลำดับ

เงื่อนไขทั้งสามข้อข้างต้น สามารถพิจารณาเทียบกับค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ คือ λ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & x-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(x-\lambda) - 4 = \lambda^2 - (x+1)\lambda + (x-4) = 0$$

ซึ่งมีคำตอบคือ

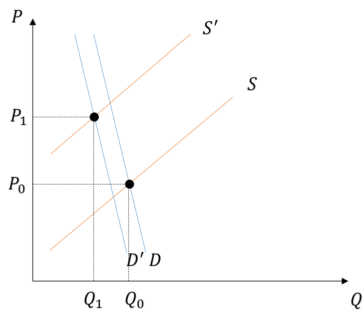
$$\lambda = \frac{x+1 \pm \sqrt{(x+1)^2 - 4(x-4)}}{2} = \frac{x+1 \pm \sqrt{x^2 - 2x + 17}}{2}$$

หาก $x = 4$ จะได้ค่า $\lambda = 0, 5$ ซึ่งชี้ให้เห็นว่า $\boldsymbol{A}$ มีค่ากึ่งบวกตามทฤษฎีบทที่ 3.7 และหาก $x > 4$ จะได้ค่า $\lambda = \frac{x+1\pm\sqrt{x^2-2x+17}}{2}$ ที่มากกว่า 0 ทั้งสองค่า ซึ่งสอดคล้องกับการที่ $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีค่าบวกตามทฤษฎีบทที่ 3.7 และหาก และหาก $x < 4$ จะได้ค่า $\lambda = \frac{x+1+\sqrt{x^2-2x+17}}{2} > 0$ แต่ $\lambda = \frac{x+1-\sqrt{x^2-2x+17}}{2} < 0$ ซึ่งสอดคล้องกับการที่ $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีค่าไม่แน่นอนตามทฤษฎีบทที่ 3.7 ทั้งนี้ เนื่องจากสำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ ค่าของ $\lambda = \frac{x+1+\sqrt{x^2-2x+17}}{2} > 0$ เสมอ $\boldsymbol{A}$ จึงไม่สามารถมีค่าลบหรือค่ากึ่งลบได้ $\square$

3.8 กรณีศึกษา: เมตริกซ์มาร์คอฟ และผลกระทบจากนโยบายการทำให้ยาเสพติดไม่ใช่ความผิดทางอาญา

ยาเสพติดเป็นประเด็นสำคัญที่หลายฝ่ายมักเห็นตรงกันว่า เป็นปัญหาทำลายสังคมในหลายมิติ ทั้งมิติทางสาธารณสุข ที่ยาเสพติดสามารถส่งผลกระทบต่อร่างกาย และจิตใจของผู้เสพอย่างรุนแรง มิติทางสังคมที่ปัญหายาเสพติด มักเกิดขึ้นควบคู่กับปัญหาทางสังคมต่างๆ เช่น อาชญากรรมเกี่ยวกับทรัพย์ และอาชญากรรมเกี่ยวกับร่างกายและชีวิต ตลอดจนความรุนแรงที่อาจเกิดขึ้นระหว่างกลุ่มผู้ค้ายาเสพติด หรือระหว่างผู้ค้ายาเสพติดและเจ้าหน้าที่ของรัฐ มิติทางการปกครองที่กำไรที่สูงในตลาดยาเสพติดมักนำมาซึ่งการมีอิทธิพลของผู้ค้ายาเสพติด และปัญหาคอรัปชั่น ตลอดจนมิติทางเศรษฐศาสตร์ที่การเสพยาเสพติดมักสร้างความสูญเสียทางเศรษฐกิจ ในรูปค่าเสียโอกาสต่างๆ ของสังคม จากผลิตภาพการผลิตที่สูญหายหรือลดลง ตลอดจนทรัพยากรและงบประมาณที่สูญไปเพื่อป้องกัน ปราบปราม และลงโทษผู้กระทำความผิดในคดียาเสพติด ด้วยปัญหาดังกล่าวทุกประเทศจึงต่างกำหนดนโยบายและมาตรการ เพื่อควบคุมการซื้อขายยาเสพติดในระดับต่างๆ กัน ซึ่งโดยมากมักอยู่ในรูปการตรากฎหมายบัญญัติให้การเสพ การขาย และการครอบครองยาเสพติด เป็นการกระทำที่เป็นความผิดทางอาญา

อย่างไรก็ตาม งานวิจัยทางเศรษฐศาสตร์หลายชิ้น อาทิ Miron (2004) ได้ชี้ให้เห็นแง่มุมที่น่าสนใจเกี่ยวกับมาตรการดังกล่าวว่า นโยบายการปราบปรามยาเสพติดอย่างรุนแรง หรือแม้แต่การบัญญัติให้ยาเสพติดเป็นสิ่งที่มีความผิดทางอาญานั้น มีผลในเชิงป้องปรามน้อยมาก จากรูปที่ 3.6 หากให้ตลาดยาเสพติดมีลักษณะใกล้เคียงกับตลาดแข่งขันแบบสมบูรณ์ การกำหนดให้การเสพและการค้ายาเสพติดเป็นความผิดทางอาญา ซึ่งเปรียบได้กับการเพิ่มขึ้นของต้นทุนของการ



รูปที่ 3.6 ผลกระทบจากการบัญญัติให้การเสพและค้ายาเสพติดเป็นความผิดทางอาญา ภายใต้เงื่อนไขที่ตลาดยาเสพติดมีสภาพใกล้เคียงกับตลาดแข่งขันแบบสมบูรณ์ มาตรการดังกล่าวจะส่งผลให้อุปสงค์และอุปทานในตลาดลดลง เมื่อเปรียบเทียบกับกรณีตลาดเสรี และส่งผลให้ดุลยภาพราคาใหม่สูงกว่าดุลยภาพเดิม และดุลยภาพปริมาณใหม่น้อยกว่าดุลยภาพเดิม ตามลำดับ ทั้งนี้โดยที่อุปสงค์ของยาเสพติดมีความยืดหยุ่นต่อราคาต่ำ มาตรการดังกล่าว จึงส่งผลให้ดุลยภาพปริมาณยาเสพติดในตลาด ลดลงจากระดับในตลาดเสรีเพียงเล็กน้อย แต่ส่งผลให้ดุลยภาพราคาสูงขึ้นเป็นอย่างมาก

เสพและการค้ายาเสพติด จะส่งผลให้อุปสงค์ของยาเสพติดขยับจากเส้น D ไปเป็น D' และส่งผลให้อุปทานของยาเสพติดขยับจากเส้น S ไปเป็น S' ตามลำดับ และโดยที่โทษทางอาญาต่อผู้ค้า มักสูงกว่าโทษทางอาญาต่อผู้เสพ การลดลงของอุปทานซึ่งมากกว่าการลดลงของอุปสงค์ จึงส่งผลให้ดุลยภาพปริมาณในตลาดยาเสพติดลดลงจากที่ระดับ Q_0 เป็น Q_1 และดุลยภาพราคาสูงขึ้นจาก P_0 เป็น P_1 ทั้งนี้ โดยธรรมชาติของยาเสพติดซึ่งเป็นสินค้าที่อุปสงค์มีความยืดหยุ่นต่อราคาต่ำ มาตรการดังกล่าว จึงส่งมักส่งผลให้ดุลยภาพปริมาณยาเสพติดในตลาด ลดลงจากระดับในตลาดเสรีแต่เพียงเล็กน้อย ผิดกับดุลยภาพราคา ซึ่งสูงขึ้นเป็นอย่างมาก[1]

ราคายาเสพติดที่สูงขึ้น เป็นสาเหตุสำคัญของผลกระทบเชิงลบจากยาเสพติดหลายประการ อาทิ การเพิ่มขึ้นของปัญหาอาชญากรรมเกี่ยวกับทรัพย์ ซึ่งก่อโดยผู้เสพที่ไม่มีรายได้เพียงพอที่จะซื้อยาเสพติด กำไรที่สูงขึ้นของผู้ค้ารายใหญ่ ซึ่งก่อให้เกิดการสร้างสมอิทธิพลของผู้ค้ายา และปัญหาคอร์รัปชั่นของเจ้าหน้าที่ของรัฐที่เกี่ยวข้อง การเพิ่มขึ้นของปัญหาความรุนแรงระหว่างกลุ่มผู้ค้ายาเสพติด ตลอดจนอัตราการติดเชื้อจากการเสพยา และอัตราการตายจากการเสพยาเกินขนาดที่เพิ่มสูงขึ้น[2] ปัญหาข้างต้นซึ่งมักถูกเข้าใจว่าเป็นปัญหาของยาเสพติด โดยแท้จริงแล้วจึงอาจเป็นปัญหาที่เกิดจากการปราบปรามยาเสพติด มากกว่าที่จะเป็นปัญหาจากยาเสพติดโดยตรง มายาคติดังกล่าวยังอาจสร้างกลไกในเชิงพลวัต ที่ส่งผลให้ปัญหายาเสพติดทวีความรุนแรงต่อเนื่องไปเรื่อย ๆ กล่าวคือ เพราะเกิดปัญหารัฐจึงปราบปราม และเพราะรัฐปราบปรามจึงเกิดปัญหา เป็นต้น

ความล้มเหลวจากสงครามยาเสพติดในหลายประเทศ ได้กระตุ้นให้เกิดแนวคิดการจัดการกับปัญหายาเสพติดในทิศทางตรงข้าม โดยเมื่อปี 2001 โปรตุเกสได้ประกาศให้การเสพยา หรือการครอบครองยาเสพติดไว้เพื่อเสพในปริมาณไม่เกินที่กฎหมายกำหนด ไม่เป็นความผิดทางอาญาอีกต่อไป[3] ซึ่งจากงานวิจัยของ Stevens (2010) Unlu et al. (2020) และ Felix and Portugal (2017) พบว่า มาตรการของโปรตุเกส ซึ่งต่อมาเป็นที่รู้จักกันแพร่หลายในชื่อว่า **ตัวแบบของโปรตุเกส (Portuguese model)** นั้น ก่อให้เกิดผลกระทบสำคัญที่ตรงข้ามกับสามัญสำนึกของบุคคลทั่วไป กล่าวคือ นอกจากมาตรการดังกล่าวจะไม่ทำให้ปัญหายาเสพติดทวีความรุนแรงยิ่ง

[1]จากงานวิจัยของ Iyavarakul (2023a) พบว่ายาบ้าในประเทศไทยในช่วงที่รัฐบาลประกาศทำสงครามกับยาเสพติดมีราคาสูงถึงเม็ดละประมาณห้าร้อย บาท คิดเป็นหนึ่งพันเท่าของต้นทุนส่วนเพิ่มในการผลิตยาบ้าที่ประมาณเม็ดละห้าสิบสตางค์

[2]จากการศึกษาของ National Research Council (1994) อัตราการตายจากการเสพยาเกินขนาดที่มักเพิ่มสูงขึ้นในช่วงที่ยาเสพติดมีราคาสูง อาจเกิดจากพฤติกรรมของผู้เสพที่เลือกวิธีเสพ เช่น การฉีดเข้าเส้น ให้ได้ฤทธิ์จากยาเสพติดมากที่สุด เพื่อให้คุ้มค่ากับเงินที่จ่ายไป ซึ่งเป็นวิธีที่มีความเสี่ยงสูง และอาจก่ออันตรายจากการเสพยาเกินขนาดได้มากกว่าวิธีอื่น

[3]อย่างไรก็ตาม การครอบครองยาเสพติดยังถือเป็นความผิดทางปกครอง (administrative offence) ซึ่งเจ้าหน้าที่ของรัฐสามารถว่ากล่าวตักเตือน ริบยาเสพติดในความครอบครอง ห้ามผู้ฝ่าฝืนเข้าใช้สถานที่บางแห่ง ตลอดจนกำหนดให้ผู้ฝ่าฝืนจ่ายค่าปรับตามที่กฎหมายกำหนดได้

ขึ้นแล้ว กลับช่วยลดปัญหายาเสพติดได้อย่างมีประสิทธิภาพ กล่าวคือ แม้จำนวนผู้ใช้ยาเสพติดในกลุ่มประชากรวัยทำงานจะเพิ่มสูงขึ้นบ้าง แต่จำนวนผู้เสพเรื้อรังกลับลดลงอย่างรวดเร็ว จากการที่ผู้เสพจำนวนมาก กล้าเข้ารับบริการบำบัดการเสพติดอย่างเปิดเผย ผลการศึกษาในเชิงประจักษ์ยังชี้ให้เห็นว่า มาตรการดังกล่าวยังช่วยลดอัตราการเสียชีวิตจากการใช้ยาเสพติดเกินขนาด อัตราการติดเชื้อจากการใช้เข็มฉีดยาร่วมกัน และราคายาเสพติดในตลาดได้อย่างมีนัยสำคัญ ทั้งนี้ แม้ตัวแบบของโปรตุเกสเป็นต้นแบบให้หลายประเทศ พยายามใช้มาตรการในลักษณะเดียวกันเพื่อแก้ปัญหาการระบาดของยาเสพติด อย่างไรก็ตาม ผลกระทบที่เกิดขึ้นในบางประเทศ กลับเสมือนเป็นไปในทิศทางตรงข้ามกับความสำเร็จของโปรตุเกส อาทิ เชคซึ่งได้ประกาศให้การครอบครองยาเสพติดทุกประเภท เพื่อเสพเองตามจำนวนที่กฎหมายกำหนด เป็นสิ่งถูกกฎหมายตั้งแต่ปี 2010 กลับพบว่าการใช้ยาเสพติดในประชากรวัยทำงาน ได้เพิ่มสูงขึ้นมากอย่างมีนัยสำคัญ อีกทั้งยังพบการเพิ่มขึ้นของนักท่องเที่ยวที่เข้ามาในประเทศเพื่อต้องการเสพยา (drug tourist) เป็นจำนวนมาก

หลักฐานในเชิงประจักษ์ที่แตกต่างกันอย่างยิ่งในแต่ละประเทศ บ่งชี้ถึงความจำเป็นและความสำคัญของการศึกษา ปัจจัยและเงื่อนไขที่ส่งผลต่อความสำเร็จของตัวแบบของโปรตุเกส โดยจากงานวิจัยของ Iyavarakul (2023b) ซึ่งได้ศึกษาผลกระทบของนโยบายการทำให้ยาเสพติดไม่ใช่ความผิดทางอาญา (drug decriminalization) ต่อพลวัตของอุปสงค์ของการใช้ยาเสพติด หากให้ประเทศหนึ่งมีประชากรซึ่งมีอายุยืนยาวไม่จำกัด (infinitely lived) และมีจำนวนคงที่เท่ากับ P ในทุกช่วงเวลา ที่แต่ละช่วงเวลา t สามารถจำแนกเป็นสามกลุ่มที่ไม่ซ้ำกัน คือ ผู้ไม่ใช้ยาเสพติด $N(t)$ ผู้ใช้ยาเสพติด $U(t)$ และผู้อยู่ในสถานบำบัด $H(t)$ พลวัตของกลุ่มประชากรจะสามารถแสดงในรูประบบสมการผลต่างเชิงเส้น คือ

$$
\begin{aligned}
N(t+1) &= (1-\alpha)N(t) + \beta U(t) + \delta H(t) \\
U(t+1) &= \alpha N(t) + (1-\beta-\gamma)U(t) + (1-\delta)H(t) \\
H(t+1) &= \gamma U(t),
\end{aligned}
$$

เมื่อ α คือ ความน่าจะเป็นที่ผู้ไม่ใช้ยาเสพติดกลายเป็นผู้ใช้ยาเสพติด β คือ ความน่าจะเป็นที่ผู้ใช้ยาเสพติดเลิกเสพด้วยตนเอง γ คือ ความน่าจะเป็นที่ผู้ใช้ยาเสพติด เข้ารับการบำบัดในสถานบำบัด และ δ คือ ความน่าจะเป็นที่ผู้เข้ารับการบำบัดสามารถเลิกเสพได้ โดยสมการผลต่างสมการแรกในระบบ คือ การจำแนกกลุ่มผู้ไม่ใช้ยาเสพติดในเวลา $t+1$ ออกเป็น กลุ่มผู้ไม่ใช้ยาเสพติดที่ยังคงไม่ใช้ยาเสพติด $(1-\alpha)N(t)$ กลุ่มผู้ใช้ยาเสพติดที่เลิกเสพด้วยตนเอง $\beta U(t)$ และกลุ่มผู้เข้ารับการบำบัดที่สามารถเลิกเสพได้ $\delta H(t)$ สมการผลต่างสมการที่สอง คือ การจำแนกกลุ่มผู้ใช้

ยาเสพติดในเวลา $t+1$ ออกเป็นกลุ่มผู้ไม่ใช้ยาเสพติดที่กลายเป็นผู้ใช้ยาเสพติด $\alpha N(t)$ กลุ่มผู้ใช้ยาเสพติดที่ยังคงใช้ยาเสพติด $(1-\beta-\gamma)U(t)$ และกลุ่มผู้เข้ารับการบำบัดที่ไม่สามารถเลิกเสพได้ $(1-\delta)H(t)$ และสมการผลต่างสุดท้าย คือ กลุ่มผู้เข้ารับการบำบัดในเวลา $t+1$ ซึ่งเท่ากับสัดส่วนผู้ใช้ยาเสพติดในเวลาก่อนหน้า ที่เข้ารับการบำบัด $\gamma U(t)$ พลวัตของประชากรแต่ละกลุ่มจากระบบสมการผลต่างข้างต้น ในช่วงก่อนและหลังการประกาศใช้มาตรการ สามารถแสดงในรูปเมตริกซ์ คือ

$$\boldsymbol{X}_{t+1} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}_t \text{ และ } \boldsymbol{X}_{t+1} = \boldsymbol{M}_d\boldsymbol{X}_t$$

เมื่อ $\boldsymbol{X}_t = \begin{pmatrix} N(t) & U(t) & H(t) \end{pmatrix}'$ และ

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta & \delta \\ \alpha & 1-\beta-\gamma & 1-\delta \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{M}_d = \begin{pmatrix} 1-\alpha_d & \beta_d & \delta_d \\ \alpha_d & 1-\beta_d-\gamma_d & 1-\delta_d \\ 0 & \gamma_d & 0 \end{pmatrix}$$

โดยที่ พารามิเตอร์แต่ละตัวซึ่งมีตัวห้อย d คือ พารามิเตอร์ภายหลังการประกาศใช้มาตรการ ซึ่งจากหลักฐานในเชิงประจักษ์ใน Felix and Portugal (2017) และ Hughes and Stevens (2010) จะได้เงื่อนไขที่ว่า $\alpha_d > \alpha$ และ $\gamma_d > \gamma$ กล่าวคือ มาตรการดังกล่าวซึ่งมีส่วนลดตราบาปของการใช้ยาเสพติด ต่างลดทั้งต้นทุนของการเสพยาเสพติด และการเข้ารับการบำบัดยาเสพติด

จำนวนประชากรแต่ละกลุ่มที่ดุลยภาพระยะยาวทั้งในกรณีที่มี และไม่มีการประกาศใช้มาตรการ จะเท่ากับคำตอบของระบบสมการที่มีลักษณะเดียวกัน สำหรับระบบสมการผลต่างที่มีเมตริกซ์การเปลี่ยนผ่านเท่ากับ $\boldsymbol{M}$ และ $\boldsymbol{M}_d$ ตามลำดับ อาทิ ในกรณีที่ไม่มีการประกาศใช้มาตรการ จะได้จำนวนประชากรที่ดุลยภาพระยะยาวเท่ากับ $\overline{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} \overline{N} & \overline{U} & \overline{H} \end{pmatrix}'$ เมื่อ $(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{I})\overline{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{0}$ ดังข้อเสนอต่อไปนี้

ข้อเสนอที่ 3.1 สัดส่วนประชากรในดุลยภาพระยะยาวสำหรับเมตริกซ์การเปลี่ยนผ่าน $\boldsymbol{M}$ คือ

$$\begin{pmatrix} \bar{n} \\ \bar{u} \\ \bar{h} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha+\beta+\alpha\gamma+\gamma\delta} \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha \\ \beta+\gamma\delta \end{pmatrix}$$

เมื่อ $\begin{pmatrix} \bar{n} & \bar{u} & \bar{h} \end{pmatrix}' = \frac{1}{P}\overline{\boldsymbol{X}}$ ■

ข้อเสนอข้างต้น สามารถพิสูจน์ได้จากคุณสมบัติของจำนวนประชากรที่ดุลยภาพระยะยาว ที่ไม่

เปลี่ยนแปลงอีกต่อไป กล่าวคือ $\overline{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{X}}$ หรือ $(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{I})\overline{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{0}$ โดยจาก

$$\begin{pmatrix} -\alpha & \beta & \delta \\ \alpha & -\beta-\gamma & 1-\delta \\ 0 & \gamma & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{N} \\ \bar{U} \\ \bar{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งมีเมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ขยาย ที่สามารถแปลงให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแถวแบบลดรูป คือ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\alpha & \beta & \delta & 0 \\ \alpha & -\beta-\gamma & 1-\delta & 0 \\ 0 & \gamma & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & -\beta & -\delta & 0 \\ 0 & \gamma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ดังนี้ หากให้ $\overline{H} = u \in \mathbb{R}_+$ คือ ตัวแปรอิสระของระบบสมการ จะได้ $\overline{U} = \frac{1}{\gamma}u$ และ $\overline{N} = \left(\frac{\beta+\gamma\delta}{\alpha\gamma}\right)u$ หรือ $\overline{h} = v = \frac{u}{P}$, $\overline{u} = \frac{1}{\gamma}v$ และ $\overline{n} = \left(\frac{\beta+\gamma\delta}{\alpha\gamma}\right)v$ ทั้งนี้ โดยที่ $\overline{n} + \overline{u} + \overline{h} = 1$ จะได้ว่า

$$\left(1 + \frac{1}{\gamma} + \frac{\beta+\gamma\delta}{\alpha\gamma}\right)v = 1 \text{ หรือ } v = \frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta+\alpha\gamma+\gamma\delta}$$

ซึ่งให้คำตอบของระบบสมการ คือ

$$\begin{pmatrix} \bar{n} \\ \bar{u} \\ \bar{h} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha+\beta+\alpha\gamma+\gamma\delta} \begin{pmatrix} \beta+\gamma\delta \\ \alpha \\ \alpha\gamma \end{pmatrix}$$

ข้อเสนอที่ 3.2 สัดส่วนประชากรที่ใช้ยาเสพติดที่ดุลยภาพระยะยาวภายหลังประกาศใช้มาตรการจะไม่สูงกว่าสัดส่วนก่อนประกาศใช้มาตรการ หาก

$$\frac{\alpha_d}{\alpha_d+\beta_d+\alpha_d\gamma_d+\gamma_d\delta_d} \leq \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\alpha\gamma+\gamma\delta} \qquad \blacksquare$$

จากข้อเสนอที่ 3.2 หากพิจารณาหลักฐานในเชิงประจักษ์ที่ว่า นโยบายการทำให้ยาเสพติดไม่เป็นความผิดอาญา สามารถส่งผลกระทบต่อสัดส่วนประชากรที่ใช้ยาเสพติดได้ในสองช่องทาง คือ อาจเพิ่มอัตราการไหลเข้า (inflow) สู่กลุ่มประชากรที่ใช้ยาเสพติดผ่านอัตราการใช้ยาเสพติดที่สูงขึ้น $\alpha_d > \alpha$ และอาจเพิ่มอัตราการไหลออก (outflow) จากกลุ่มประชากรที่ใช้ยาเสพติดผ่าน

อัตราการเข้ารับบำบัดที่สูงขึ้น $\gamma_d > \gamma$ ดังนี้ หากพิจารณาส่วนผสมของ α_d และ γ_d ภายหลังการประกาศใช้มาตรการ ที่ทำให้สัดส่วนของประชากรที่ใช้ยาเสพติดคงที่ จะได้ส่วนผสมที่ประกอบกันขึ้นเป็น**เส้นความพอใจที่เท่ากันของสังคม (social indifference curve)** ที่มีอัตราการทดแทนส่วนเพิ่ม (marginal rate of substitution) ดังข้อเสนอต่อไปนี้

ข้อเสนอที่ 3.3 อัตราการทดแทนส่วนเพิ่ม บนเส้นความพอใจที่เท่ากันของสังคม ที่ทุกจุดบนเส้นความพอใจ คืออัตราการไหลเข้า (α_d) และไหลออก (γ_d) ที่ทำให้สัดส่วนของประชากรที่ใช้ยาเสพติดคงที่ ที่ดุลยภาพระยะยาว เท่ากับ

$$\frac{d\alpha_d}{d\gamma_d} = \frac{\alpha_d + \delta_d}{\frac{\beta+\gamma_d}{\alpha} + (\gamma - \gamma_d)} \qquad \blacksquare$$

ข้อเสนอที่ 3.3 สามารถพิสูจน์ได้จากการพิจารณาข้อเสนอที่ 3.2 โดยหากให้

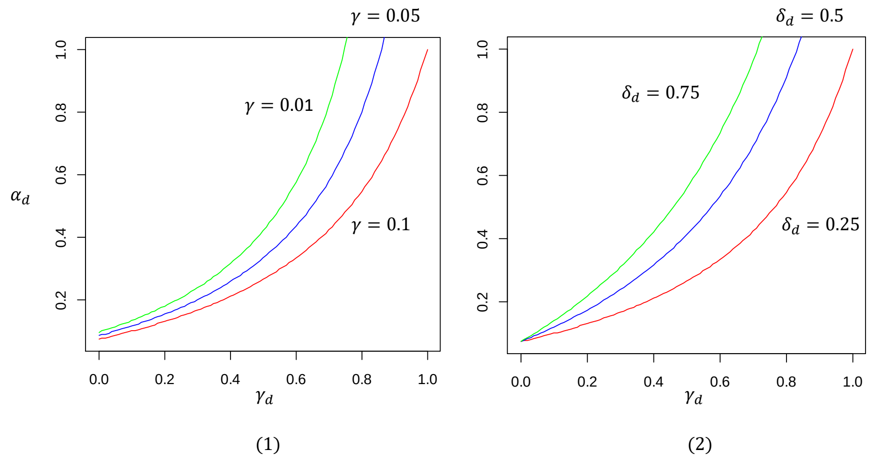
$$F(\Theta) = \alpha_d(\alpha + \beta + \alpha\gamma + \gamma\delta) - \alpha(\alpha_d + \beta_d + \alpha_d\gamma_d + \gamma_d\delta_d) = 0$$

คือ ฟังก์ชั่นกำหนดเงื่อนไขที่ทำให้สัดส่วนประชากรที่ใช้ยาเสพติดคงที่ หากคำนวณผลต่างทั้งหมด (total differential) เมื่อกำหนดให้การเปลี่ยนแปลงของ $F(\Theta)$ คงที่ จะได้ $F_{\alpha_d}d\alpha_d + F_{\gamma_d}d\gamma_d = 0$ หรือ

$$\frac{d\alpha_d}{d\gamma_d} = -\frac{F_{\gamma_d}}{F_{\alpha_d}} = \frac{\alpha_d + \delta_d}{\frac{\beta+\gamma_d}{\alpha} + (\gamma - \gamma_d)}$$

ทั้งนี้ แม้พจน์ $\gamma - \gamma_d < 0$ อาจส่งผลให้ $\frac{d\alpha_d}{d\gamma_d} < 0$ ในบางกรณี แต่โดยที่ $\frac{\beta+\gamma_d}{\alpha}$ มักมีค่าเกินกว่า 1 โดยทั่วไปแล้ว จึงมักได้ผลลัพธ์ที่ว่า $\frac{d\alpha_d}{d\gamma_d} > 0$ ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดตามสามัญสำนึก คือ ทั้งอัตราการไหลเข้าและอัตราการไหลออก จะต้องเพิ่มขึ้นในอัตราที่ได้สมดุลกัน จึงจะทำให้สัดส่วนประชากรที่ใช้ยาเสพติดคงที่ อนึ่ง มีข้อสังเกตที่น่าสนใจว่า อัตราการทดแทนส่วนเพิ่มดังกล่าว จะลดลงตาม γ และเพิ่มขึ้นตาม δ_d กล่าวคือ สังคมจะพร้อมรับอัตราการไหลเข้าของผู้เสพใหม่ที่มากกว่าเดิม ต่ออัตราการไหลออกของผู้เข้ารับการบำบัดที่เพิ่มขึ้นหนึ่งส่วนได้ หากอัตราการเข้ารับการบำบัดเดิมก่อนมีมาตรการ γ อยู่ในระดับต่ำ ซึ่งส่งผลให้ส่วนต่างระหว่างอัตราการเข้ารับการบำบัดก่อนและหลังมีมาตรการ คือ การที่ $\gamma - \gamma_d$ กว้างขึ้น และ หากทรัพยากรที่ต้องหมดเปลืองไปกับการป้องกัน ปราบปราม และการลงโทษผู้กระทำความผิด ได้ถูกถ่ายโอนไปพัฒนาระบบบำบัดให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น หรือการที่ δ_d มีค่าสูงกว่าเดิม

ลักษณะของเส้นความพอใจเท่ากันของสังคมดังข้อเสนอที่ 3.3 สามารถพิจารณาได้จากรูปที่



รูปที่ 3.7 เส้นความพอใจเท่ากันของสังคมซึ่งทุกค่า α_d และ γ_d ให้สัดส่วนประชากรที่ใช้ยาเสพติด ที่ดุลยภาพระยะยาวคงที่ ในกรณีที่ (1) เมื่อ $\alpha = 0.1$; $\beta = \beta_d = 0.1$; $\delta = \delta_d = 0.25$ และระดับความพอใจของสังคมสูงขึ้น ตามส่วนต่างระหว่างอัตราการเข้ารับการบำบัดก่อนและหลังมีมาตรการ $(\gamma - \gamma_d)$ และในกรณีที่ (2) เมื่อ $\alpha = 0.1$; $\beta = \beta_d = 0.1$; $\gamma = 0.1$; $\delta = 0.25$ และระดับความพอใจของสังคมสูงขึ้นตามประสิทธิภาพของระบบบำบัด (δ_d)

3.7 โดยในกรณีที่ (1) หากกำหนดให้ $\alpha = 0.1$; $\beta = \beta_d = 0.1$; $\delta = \delta_d = 0.25$ จะได้เส้นความพอใจเท่ากันที่มีความชันเป็นบวก ซึ่งแสดงถึงเงื่อนไขที่ว่าอัตราการไหลเข้าสู่และอัตราการไหลออกจากกลุ่มผู้เสพยาเสพติด จะต้องเพิ่มขึ้นในระดับที่สมดุลกัน จึงจะทำให้สัดส่วนผู้เสพที่ดุลยภาพระยะยาวคงที่ โดยจากการวิเคราะห์เชิงสถิตเปรียบเทียบของระดับที่สมดุลของสัดส่วนทั้งสอง ต่อการเปลี่ยนแปลงของอัตราการเข้ารับการบำบัดเดิม (γ) ได้ชี้ให้เห็นว่า อัตราการเข้ารับการบำบัดเดิมซึ่งต่ำลงเรื่อยๆ ที่ระดับ $\gamma = 0.1, 0.05, 0.001$ จะช่วยให้สังคมสามารถรับอัตราการไหลเข้าสู่กลุ่มผู้เสพยาเสพติดที่สูงขึ้นได้ นอกจากนี้ ในกรณีที่ (2) หากกำหนดให้ $\alpha = 0.1$; $\beta = \beta_d = 0.1$; $\gamma = 0.1$; $\delta = 0.25$ จะได้เส้นความพอใจเท่ากันของสังคมที่มีความชันเป็นบวก เช่นเดียวกับในกรณีที่ (1) อนึ่ง การวิเคราะห์เชิงสถิตเปรียบเทียบต่อการเปลี่ยนแปลงของอัตราความสำเร็จของมาตรการบำบัดภายหลังการใช้นโยบาย คือ (δ_d) ได้ชี้ให้เห็นว่า การจัดสรรทรัพยากรใหม่จากการปราบปราม และการดำเนินคดีผู้กระทำความผิดสู่การบำบัดผู้เสพเป็นปัจจัยสำคัญหนึ่ง ที่ช่วยลดสัดส่วนผู้เสพที่ดุลยภาพได้ อีกทั้งยังมีผลกระทบในเชิงปฏิสัมพันธ์ที่น่าสนใจ กับอัตราการเข้ารับการบำบัดหลังการบังคับใช้มาตรการ (γ_d) กล่าวคือ อัตราการเข้ารับการบำบัดที่สูงขึ้น จะเร่งให้อัตราของความสำเร็จของมาตรการบำบัด ช่วยลดสัดส่วนผู้เสพที่ดุลยภาพได้มากยิ่งขึ้น ดังปรากฏตามส่วนต่างในเชิงแนวตั้งระหว่างเส้นความพอใจเท่ากันตามแต่ละระดับของ δ_d ซึ่งกว้างขึ้นเรื่อยๆ ตามระดับของ γ_d

3.9 เอกสารอ่านประกอบเพิ่มเติม

หนังสือพีชคณิตทั่วไปมักแยกเรื่องค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะออกเป็นบทเฉพาะ โดย ผู้สนใจสามารถศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับเรื่องนี้เพิ่มเติม และทดลองทำแบบฝึกหัด พร้อมศึกษาแนวคำตอบและเฉลยได้ ในบทที่ยี่สิบสามของ Simon and Blume (1994) บทที่สี่เรื่องค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะ ในกรณีที่ค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริงใน และบทที่แปดในกรณีที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนใน Fraleigh and Beauregard (1990) บทที่เจ็ดเรื่องค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะ และบทที่แปดเรื่องการประยุกต์ใช้ค่าเฉพาะ และเวคเตอร์เฉพาะใน Kolman and Hill (2014) อย่างไรก็ตาม หนังสือบางเล่ม เช่น Nicholson (2013) ได้จัดเรียงลำดับเนื้อหาเกี่ยวกับค่าเฉพาะ รวมไว้กับเรื่องตัวกำหนด และการทำให้เป็นเมตริกซ์แกนในบทที่สาม ผู้สนใจแนวคิดเกี่ยวกับเมตริกซ์ของมาร์คอฟ ตลอดจนการขยายแนวคิดดังกล่าว ไปสู่หัวข้อสำคัญต่างๆ เรื่องความน่าจะเป็นและสถิติ เช่น กระบวนการความไม่แน่นอน (stochastic processes) สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากตำราเรื่องความน่าจะเป็นและสถิติ เช่น Stewart (2009) และ Grinstead and Snell (1997) ทั้งนี้ ปัจจุบันมีตำราเกี่ยวกับการวิเคราะห์เชิงพลวัต ทางเศรษฐศาสตร์อยู่เป็นจำนวนมาก ทั้งที่แยกกล่าวเป็นบทเฉพาะ เช่น บทที่ยี่สิบสี่และยี่สิบห้าของ Simon and Blume (1994)

ซึ่งกล่าวถึงการหาคำตอบของสมการผลต่าง และระบบสมการผลต่างเชิงเส้น ด้วยค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะ และตำราเกี่ยวกับหัวข้อดังกล่าวเป็นการเฉพาะ อาทิ ตำราระดับพื้นฐาน สำหรับนักศึกษาปริญญาเอกปีแรก เช่น Gandolfo (1971) และ Shone (2002) และตำราระดับสูงสำหรับนักศึกษาปริญญาเอกปีสูงขึ้น เช่น Stachurski (2009) ที่มีความรู้เรื่องการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ (analysis) ต่างๆ เป็นอย่างดี

ผู้สนใจเกี่ยวกับความเป็นมาของการหาคำตอบของสมการพหุนามกำลังสาม สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก Plante (2018) และสามารถอ่านหนังสือที่คาร์ดาโนได้แต่งไว้ตั้งแต่ยุคเรอเนสซอง ซึ่งมีผู้แปลและเรียบเรียงใหม่ จาก Cardano et al. (2007) เรื่องราวที่น่าสนใจเกี่ยวกับการค้นพบทฤษฎีบทสเปกตรัมของเมตริกซ์สมมาตรของโคชชี่ สามารถหาอ่านได้จาก Hawkins (1975) และสามารถศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับกรณีศึกษา เรื่องผลกระทบของการทำให้ยาเสพติดไม่เป็นความผิดทางอาญาในประเด็นเพิ่มเติม อาทิ พลวัตของจำนวนประชากรแต่ละกลุ่มที่แต่ละช่วงเวลา ได้จาก Iyavarakul, T. (2023b)

3.10 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะของเมตริกซ์ต่อไปนี้

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. จงหาค่าเฉพาะของเมตริกซ์สามเหลี่ยมบนและล่างขนาด $n \times n$

3. จากข้อ 1 จงแปลงเมตริกซ์ในข้อ (1) (2) และ (3) ให้เป็นเมตริกซ์แกน

4. จงหาคำตอบของสมการผลต่างต่อไปนี้

(1) $x_{n+1} = 2x_n; y_{n+1} = x_n + y_n$

(2) $x_{n+1} = -2y_n; y_{n+1} = -x_n - y_n$

(3) $x_{n+1} = x_n; y_{n+1} = y_n + z_n; z_{n+1} = x_n + y_n + z_n$

5. จงหาดุลยภาพระยะยาวของเมตริกซ์มาร์คอฟต่อไปนี้

(1) $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.5 & 0.9 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}$

6. จากตัวแบบการขยายตัวทางเศรษฐกิจ ซึ่งอยู่ในรูประบบสมการ

$$\begin{aligned} s_t &= ay_t \\ i_t &= b(y_t - y_{t-1}) \\ s_t &= i_t \end{aligned}$$

เมื่อ y_t, s_t, i_t คือ รายได้ประชาชาติ ระดับการออม และการลงทุนของประเทศ ในปี t ตามลำดับ และ $a, b > 0$ คือ พารามิเตอร์ของตัวแบบ จงหาสมการที่อธิบายรายได้ประชาชาติ y_t ในรูปรายได้ประชาชาติตั้งต้น y_0 และเงื่อนไขที่เหมาะสมเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่าง a และ b

บทที่ 4

เรขาคณิตของเวคเตอร์

ในบรรดาความรู้ต่างๆ ในโลก คณิตศาสตร์ถือเป็นศาสตร์ที่ใกล้เคียงความจริงตามธรรมชาติมากที่สุดสาขาหนึ่ง ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกบัญญัติ และรวบรวมเอาไว้ จึงถือเป็นสิ่งที่ถูกค้นพบ (discover) ไม่ใช่สิ่งที่ถูกคิดค้น (invent) หรือเสนอ (propose) ดังเช่นความรู้ หรือผลงานในศาสตร์อื่นๆ ทั้งนี้ เป็นที่น่าสนใจว่า การค้นพบความรู้ที่สำคัญต่างๆ ทางคณิตศาสตร์นั้น เสมือนจะเกิดขึ้นจากความจำเป็นของมนุษย์ ที่ต้องการนำความรู้เรื่องนั้น ไปใช้หรือไปเป็นเครื่องมือ เพื่อศึกษาเรื่องจำเป็นต่างๆ เป็นการเฉพาะ เช่น การค้นพบแคลคูลัส และการพัฒนาแคลคูลัสอย่างเป็นระบบ ในวงวิชาการของซีกโลกตะวันตก ซึ่งถือเป็นการค้นพบความรู้ทางคณิตศาสตร์ ที่สำคัญที่สุดเรื่องหนึ่งนั้น เกิดขึ้นในช่วงศตวรรษที่ 17 เมื่อนักดาราศาสตร์ต้องการเครื่องมือทางคณิต-ศาสตร์ เพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ของดวงดาว ซึ่งมีลักษณะเป็นเส้นโค้ง ความรู้เกี่ยวกับแคลคูลัส ซึ่งสามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงที่ไม่คงที่ จึงเป็นสิ่งจำเป็น เพื่อทำความเข้าใจปัญหาที่กำลังเผชิญอยู่ในขณะนั้น

ความรู้ทางคณิตศาสตร์อีกเรื่องหนึ่ง ที่สำคัญมากไม่น้อยไปกว่าแคลคูลัส คือ เรขาคณิต ซึ่งมีการพัฒนาอย่างเป็นระบบ เป็นระยะเวลายาวนานนับพันปี ตั้งแต่ยุคอียิปต์ จนเข้าสู่ยุคทองในกรีก โดยยูคลิดแห่งอเล็กซานเดรีย (Euclid of Alexandria, 300 BC) นักคณิตศาสตร์ชาวกรีกผู้ได้รับการขนานนามว่า เป็นบิดาแห่งวิชาเรขาคณิต เพื่อตอบสนองความต้องการในทางวิศวกรรมศาสตร์

รูปที่ 4.1 ยูคลิดแห่งอเล็กซานเดรีย (Euclid of Alexandria, 300 BC)* โดยปกติแล้วความรู้ทางคณิตศาสตร์ไม่ว่าแขนงใดๆ มักจะถูกพัฒนาไปอย่างรวดเร็ว จนเปลี่ยนรูปแบบจากเดิมไปมากภายในระยะเวลาไม่กี่ร้อยปี อย่างไรก็ตาม ความรู้ทางเรขาคณิต ซึ่งได้ถูกพัฒนาขึ้นโดยยูคลิดนั้น อาจกล่าวได้ว่า ขึ้นสู่ระดับสูงสุดตั้งแต่สมัยที่ยูคลิดยังมีชีวิตอยู่ และแม้ภายหลังจากที่ยูคลิดได้ตายไปแล้วกว่าสองพันปี ก็ยังคงรูปแบบเดิมไว้ ไม่เปลี่ยนแปลงไปจากเดิมมากดังเช่นความรู้ในแขนงอื่น จนแม้ความรู้ทางเรขาคณิตที่แพร่หลายและศึกษาอยู่ในปัจจุบัน ก็ได้รับการขนานนามว่าเรขาคณิตแบบยูคลิด (Euclidean geometry) ผลงานทางเรขาคณิตของยูคลิดที่เป็นที่รู้จักกันดีคือ ตำราเอเลเมนส์ (Elements) ซึ่งเป็นตำราที่ได้รับการพิมพ์ซ้ำมากที่สุดในโลก มรดกของยูคลิดยังรวมถึงกระบวนการศึกษาทางคณิตศาสตร์ ที่มีความแม่นยำและละเอียดลออ (mathematical rigor) และกระชับ ที่กฎหรือข้อเสนอใดๆ ทางคณิตศาสตร์ ต่างต้องได้รับการพิสูจน์เสมอ

*https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c6/Jusepe_de_Ribera_-_Euclid_-_2001.26_-_J._Paul_Getty_Museum.jpg

ต่างๆ เช่น การสร้างสิ่งก่อสร้าง และการเดินทางสำรวจ[1] ทั้งนี้ แม้การประยุกต์ความรู้เรื่องเรขาคณิตในทางเศรษฐศาสตร์ อาจไม่เด่นชัดดังเช่นการประยุกต์ในทางวิศวกรรมศาสตร์ แต่ถือได้ว่าเป็นความรู้จำเป็น ในวิชาเศรษฐมิติและเศรษฐศาสตร์วิเคราะห์ขั้นสูง เช่น ตัวประมาณการแบบกำลังสองน้อยที่สุด (least squares estimator) ในทางเศรษฐมิติ ถือตัวประมาณที่ทำให้ระยะทางน้อยที่สุด (minimum-distance estimator) ประเภทหนึ่ง นอกจากนี้ ทฤษฎีทางเรขาคณิต เช่น ทฤษฎีบทระนาบบนแบ่งแยก (separating hyperplane) และระนาบบนหนุน (supporting hyperplane) ยังเป็นทฤษฎีบทสำคัญ ซึ่งถูกนำไปใช้วิเคราะห์เกี่ยวกับกระบวนการทำให้ดีที่สุด (optimization) ในเศรษฐศาสตร์วิเคราะห์[2]

4.1 เวคเตอร์และพีชคณิตของเวคเตอร์

จากที่ได้พิจารณาไปก่อนหน้านี้บ้างแล้วว่า เมตริกซ์ขนาด $1 \times n$ และเมตริกซ์ขนาด $n \times 1$ นั้นเปรียบได้กับเวคเตอร์แถวและเวคเตอร์คอลัมน์ ที่มีความยาวเท่ากับ n ตามลำดับ การตีความเวคเตอร์ในเชิงเรขาคณิต สามารถเป็นไปได้สองทาง ในทางหนึ่ง เวคเตอร์เปรียบได้กับ**จุด (point)** บนระนาบที่มีมิติเท่ากับความยาวของเวคเตอร์นั้น เช่น จุดใน $\mathbb{R}^1$ บนเส้นจำนวน x_1 สามารถแสดงได้ด้วย $\boldsymbol{x} = a$ ซึ่งเป็นจุดที่อยู่บนเส้นจำนวน x_1 ไปทางขวาของ 0 เป็นระยะทางเท่ากับ a หน่วย จุดใน $\mathbb{R}^2$ บนระนาบ (x_1, x_2) สามารถแสดงได้ด้วยค่า $\boldsymbol{x} = (a, b)$ ซึ่งเท่ากับจุดที่อยู่ไปทางขวาของ 0 บนเส้นจำนวน x_1 เป็นระยะทางเท่ากับ a หน่วย และไปทางขวาของ 0 บนเส้นจำนวน x_2 เป็นระยะทางเท่ากับ b หน่วย และจุดใน $\mathbb{R}^3$ สามารถแสดงได้ด้วยค่า $\boldsymbol{x} = (a, b, c)$ ซึ่งอยู่ไปทางขวาของ 0 บนเส้นจำนวน x_1 เป็นระยะทางเท่ากับ a หน่วย และไปทางขวาของ 0 บนเส้นจำนวน x_2 เป็นระยะทางเท่ากับ b หน่วย และไปทางขวาของ 0 บนเส้นจำนวน x_3 เป็นระยะทาง

---

[1] การค้นพบและการพัฒนาความรู้ทางเรขาคณิตโดยยูคลิด เกิดขึ้นในช่วงแรก ที่มนุษย์ต้องการวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อทำความเข้าใจธรรมชาติรอบตัว และเพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการสำรวจและการค้าขาย ความรู้ทางเรขาคณิตที่เกี่ยวข้องกับตำแหน่ง ระยะทาง พื้นที่ ปริมาตร จึงเป็นเรื่องจำเป็นที่ได้รับการพัฒนาขึ้นก่อน ทั้งนี้ หากพิจารณาเครื่องมือทางเรขาคณิตแต่ละชิ้นในบริบทของวิชาพีชคณิตเชิงเส้นแล้ว จะเห็นได้ว่าเครื่องมือบางอย่าง เช่น ระยะทาง เป็นแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับเส้นตรงโดยตรง ตามนิยามของระยะทาง ซึ่งเท่ากับความยาวของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุด

[2] เนื้อหาในบทนี้ จะได้รวบรวมความรู้ทางเรขาคณิต ที่เกี่ยวข้องกับเวคเตอร์เข้าไว้ด้วยกันเป็นบทเดียว ซึ่งครอบคลุมแนวคิดเกี่ยวกับจุด เส้นตรง การเป็นอิสระกันของเส้นตรง การตั้งฉากกันของเส้นตรง ระนาบ ระนาบบน และปริภูมิ ต่างจากตำราเล่มอื่นที่อาจแยกและอธิบายเนื้อหาบางเรื่องเป็นบทเฉพาะ แต่เนื่องจากในทางเศรษฐศาสตร์นั้น ความรู้ที่จำเป็นเกี่ยวกับพีชคณิตในระดับพื้นฐานดูจะโน้มเอียงไปทางด้านการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเสียมากกว่า ผู้เขียนจึงได้ให้น้ำหนักกับเรื่องการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นและพีชคณิตของเมตริกซ์เป็นหลักโดยได้ยกขึ้นเป็นบทแรกๆ ของหนังสือ และรวบรวมความรู้ทางเรขาคณิตเกี่ยวกับเวคเตอร์ซึ่งเป็นเครื่องมือสำหรับการศึกษาในระดับสูงเข้าไว้เป็นบทเดียวกัน

รูปที่ 4.2 เรอเน เดการ์ท (René Descartes, 1596-1650)* เดการ์ทเป็นนักปรัชญาและคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสที่กล่าวได้ว่าเป็นเลิศในศาสตร์สองสาขา คือ ในด้านปรัชญาก็เป็นผู้บุกเบิกการศึกษาปรัชญาตะวันตกสมัยใหม่ ที่แตกต่างไปจากการศึกษาปรัชญาสมัยกรีก และได้รับยกย่องให้เป็นบิดาของปรัชญาสมัยใหม่ (modern philosophy) ที่มีอิทธิพลสูงมาก จนแม้ผลงานของเดการ์ท เช่น Meditations on First Philosophy ยังคงเป็นตำราปรัชญา ที่ยังคงใช้ศึกษากันในปัจจุบัน อีกทั้งคำกล่าวของเดการ์ทที่ว่า Je pense, donc je suis! (I think, therefore I am!) ยังถือได้ว่าเป็นหนึ่งในข้อความเชิงปรัชญา ที่เป็นที่รู้จักกันอย่างกว้างขวางที่สุด ส่วนในด้านคณิตศาสตร์นั้น เดการ์ทถือได้ว่าเป็นผู้พัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ ให้ก้าวหน้าไปอย่างมาก ด้วยการรวมเอาความรู้ทางเรขาคณิต กับความรู้ทางพีชคณิตเข้าไว้ด้วยกัน จนเป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งที่มีชื่อว่า เรขาคณิตวิเคราะห์ (analytic geometry) ซึ่งยังคงเป็นวิธีการศึกษาเรขาคณิต ที่ได้รับความนิยมจนกระทั่งในปัจจุบัน ความรู้ทางเรขาคณิตวิเคราะห์ ช่วยเชื่อมโยงสมการทางคณิตศาสตร์และกราฟเข้าด้วยกัน เช่น สมการ $x_2 = ax_1 + b$ คือ เส้นตรงบนระนาบ (x_1, x_2) ที่มีความชันเท่ากับ a และจุดตัดแกน x_2 คือ b หรือ สมการ $(x_1-a)^2+(x_2-b)^2 = r^2$ คือ วงกลมบนระนาบ (x_1, x_2) ที่มีจุดศูนย์กลางที่คู่อันดับ (a, b) และรัศมีเท่ากับ r เป็นต้น ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญ ที่นำไปสู่การค้นพบแคลคูลัสของนิวตันและไลบ์นิซต่อมา

*https://en.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes#/media/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg

เท่ากับ c หน่วย เป็นต้น ทั้งนี้ แม้การแสดงจุดด้วยภาพตั้งแต่ $\mathbb{R}^4$ เป็นต้นไปจะทำได้ยาก แต่การขยายแนวคิดของจุดไปสู่ $\mathbb{R}^n$ กลับทำได้ง่ายกว่า ด้วยเวคเตอร์ $\boldsymbol{x}$ ที่มีขนาด $n \times 1$ หรือ $1 \times n$ ซึ่งแต่ละค่าภายในเวคเตอร์ แทนค่าบนเส้นจำนวน $x_1, \ldots, x_n$ ตามลำดับ การตีความเวคเตอร์ในอีกรูปแบบหนึ่ง ที่เป็นที่นิยมกันมากโดยเฉพาะอย่างยิ่งในทางวิศวกรรมศาสตร์ คือ การเปรียบเวคเตอร์กับ**ลูกศร (displacement)** จากจุดกำเนิดซึ่งชี้ไปยังจุดที่ระบุ ดังรูปที่ 4.3 (1) และ 4.3 (2)

นิยามที่ 4.1 สมมติให้ $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ และ $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ คือเวคเตอร์แถวในมิติเดียวกัน

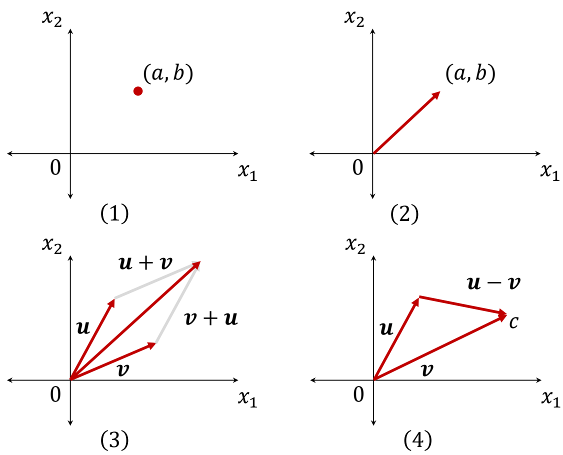
1. $\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v} = (u_1 \pm v_1, \ldots, u_n \pm v_n)$

2. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 \cdot v_1 + \ldots + u_n \cdot v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'$ ■

นิยามข้อแรกสอดคล้องกับการบวกและลบเมตริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน กล่าวคือ การบวกหรือลบเวคเตอร์สามารถทำได้โดยการนำค่าของเวคเตอร์ในตำแหน่งที่สอดคล้องกัน มาบวกหรือลบกันแล้วแต่กรณี การบวกและลบเวคเตอร์ มีการตีความในเชิงเรขาคณิตที่น่าสนใจ คือ การบวกเวค-เตอร์เทียบได้กับการนำเวคเตอร์แต่ละเวคเตอร์ มาต่อกันไปเรื่อยๆ เช่น จากรูปที่ 4.3 (3) หากให้ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ คือ ลูกศรจากจุดกำเนิดไปยังจุดที่เกี่ยวข้องบนระนาบ (x_1, x_2) ตามลำดับ $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ จะเปรียบได้กับการลาก $\boldsymbol{v}$ ที่เริ่มจากจุดปลายของ $\boldsymbol{u}$ แทนที่จะเริ่มจากจุดกำเนิด ซึ่งเท่ากับ $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ ที่ได้จากการลาก $\boldsymbol{u}$ จากจุดปลายของ $\boldsymbol{v}$ และเท่ากับการลากลูกศรจากจุดกำเนิดไปยังจุด $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$

การตีความในเชิงเรขาคณิตของการลบกันของเวคเตอร์นั้น อาจมีความซับซ้อนอยู่บ้างเมื่อเทียบกับการบวก แต่เป็นแนวคิดที่สามารถพัฒนา ไปสู่การเขียนสมการเพื่ออธิบายเส้นตรงต่อไป สำหรับการลบเวคเตอร์ โดยที่ $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$ $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ จึงเทียบได้กับเส้นที่ลากจากจุดปลายของ $\boldsymbol{u}$ ที่นำไปสู่จุดสุดท้ายที่จะต้องเท่ากับ $\boldsymbol{v}$ ดังรูปที่ 4.3 (4) และเช่นเดียวกัน จากข้อเท็จจริงที่ว่า $\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}$ ดังนั้น $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ จึงเทียบได้กับเส้นที่ลากจากจุดปลายของ $\boldsymbol{v}$ ที่นำไปสู่จุดสุดท้ายที่จะต้องเท่ากับ $\boldsymbol{u}$ ทั้งนี้ แม้ $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ จะเทียบได้กับเส้นตรงที่ลากเชื่อมระหว่างจุดสองจุดคือ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ เช่นเดียวกัน แต่จุดปลายของลูกศรของเวคเตอร์ทั้งสองกลับอยู่ตรงข้ามกัน คือ จุดปลายของลูกศรของ $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ จะอยู่ที่ $\boldsymbol{v}$ ส่วนจุดปลายของลูกศรของ $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ กลับอยู่ที่ $\boldsymbol{u}$ ต่างจากการบวกซึ่งทั้ง $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ และ $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ ซึ่งต่างมีปลายของลูกศรที่จุดเดียวกัน

นิยามข้อต่อไปคือ $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ หรือ **การคูณภายใน** (inner product หรือ dot product) เปรียบได้



รูปที่ 4.3 การตีความเวคเตอร์และการบวกและลบเวคเตอร์ (1) การตีความเชิงเรขาคณิตของเวคเตอร์ (a, b) ในรูปของจุด (point) และ (2) การตีความเชิงเรขาคณิตของเวคเตอร์ (a, b) ในรูปของลูกศรจากจุดกำเนิด $\mathbf{0} = (0, 0)$ ไปยังจุด (a, b) โดยมีหัวของลูกศรอยู่ที่จุด (a, b) (3) ผลลัพธ์ที่ได้จาก $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ จะเท่ากับการต่อเวคเตอร์ $\boldsymbol{v}$ จากจุดปลายของ $\boldsymbol{u}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ จากรูป ความยาวของ $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ จะน้อยกว่าหรือเท่ากับ ความยาวของ $\boldsymbol{u}$ รวมกับความยาวของ $\boldsymbol{v}$ เสมอ โดยจะเท่ากันเฉพาะในกรณีที่ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ เป็นเวคเตอร์ที่ชี้ไปในทางเดียวกัน (4) ผลลัพธ์ที่ได้จาก $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ จะเท่ากับเวคเตอร์ที่เชื่อมระหว่าง $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่ $\boldsymbol{u}$ และจุดปลายที่ $\boldsymbol{v}$ จากรูป ความยาวของ $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ จะมากกว่าหรือเท่ากับความยาวของ $\boldsymbol{u}$ ลบด้วยความยาวของ $\boldsymbol{v}$ เสมอ

กับการคูณเวคเตอร์[1] การคูณภายในถือเป็นตัวดำเนินการที่กระชับกว่าการคูณโดยการใช้ทรานส์โพสของเมตริกซ์ เนื่องจากด้วยนิยามของการคูณภายในนั้น $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$ เสมอ โดยไม่ต้องระบุว่าเป็นเวคเตอร์แถวหรือเวคเตอร์คอลัมน์ ต่างจากการคูณกันโดยการใช้ทรานส์โพสที่จะต้องมีการระบุให้ชัดเจนว่าเป็นเวคเตอร์ประเภทใด อาทิ หากทั้ง $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ เป็นเวคเตอร์แถวหรือเมตริกซ์ที่มีขนาด $1 \times n$ จะได้ว่า $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'$ ในทางกลับกัน หากทั้ง $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ เป็นเวคเตอร์คอลัมน์ จะได้ว่า $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}$ เป็นต้น

คุณสมบัติที่สำคัญเกี่ยวกับนิยามข้างต้น เป็นไปดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.1 สมมติให้ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ คือเวคเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$

1. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$

2. $s\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot s\boldsymbol{v}$ เมื่อ s คือค่าคงที่

3. $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \pm \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \pm \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$ เมื่อ $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$

4. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \geq 0$ และ $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 0$ ได้ในกรณีที่ $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ เท่านั้น

5. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$ ■

คุณสมบัติทั้งหมดข้างต้น คือ การคูณเวคเตอร์ด้วยค่าคงที่ การกระจาย และคุณสมบัติของการคูณภายใน ที่จะต้องมีค่าเป็นบวกเสมอนั้น เป็นคุณสมบัติที่สามารถเห็นได้อย่างชัดเจน และสามารถพิสูจน์ได้โดยง่าย ซึ่งจะได้ละไว้ให้ผู้สนใจได้ฝึกพิสูจน์ในแบบฝึกหัดท้ายบท

แนวคิดที่สำคัญยิ่งเกี่ยวกับเวคเตอร์ได้แก่ **ความยาว (length)** ของเวคเตอร์ และ**ระยะทาง (distance)**[2] ระหว่างจุด โดยแนวคิดแรกถือเป็นกรณีเฉพาะของแนวคิดที่สอง กล่าวคือ ระยะทางเป็นแนวคิดที่ถูกนิยามจากจุดใดๆ สองจุด ผิดจากความยาว ซึ่งเป็นแนวคิดที่ถูกนิยามขึ้นจากจุดใดๆ หนึ่งจุด และอีกจุดซึ่งจะต้องเป็นจุดกำเนิดเท่านั้น ดังนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 4.2 สมมติให้ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ คือเวคเตอร์หรือจุดใน $\mathbb{R}^n$ แล้วแต่กรณี

---

[1]ในภาษาไทยนิยมอ่าน $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ ว่า $\boldsymbol{u}$ ด็อท $\boldsymbol{v}$

[2]แนวคิดเกี่ยวกับระยะทางที่จะได้พิจารณาในที่นี้ จำกัดเฉพาะระยะทางแบบยูคลิเดียน (Euclidean distance) ดังปรากฏตามนิยามที่ 4.2 อย่างไรก็ตาม แนวคิดเกี่ยวกับระยะทางในทางคณิตศาสตร์ยังมีอีกมาก อาทิ ระยะทางแบบเฮาส์ดอร์ฟ (Hausdorff distance) และระยะทางแบบเฟรชเช (Fréchet distance) ซึ่งไม่ได้กล่าวถึงในที่นี้ด้วยว่าเป็นแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ (mathematical analysis) มากกว่าพีชคณิตเชิงเส้น

1. **ระยะทางแบบยูคลิเดียน (Euclidean distance)** ระหว่างจุด $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ เท่ากับ

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2+\ldots+(u_n-v_n)^2} = \sqrt{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})}$$

2. **ความยาว (length)** หรือ**ขนาด (norm)** ของ $\boldsymbol{u}$ คือ ระยะทางระหว่าง จุด $\boldsymbol{u}$ และ $\mathbf{0}$ ซึ่งเท่ากับ

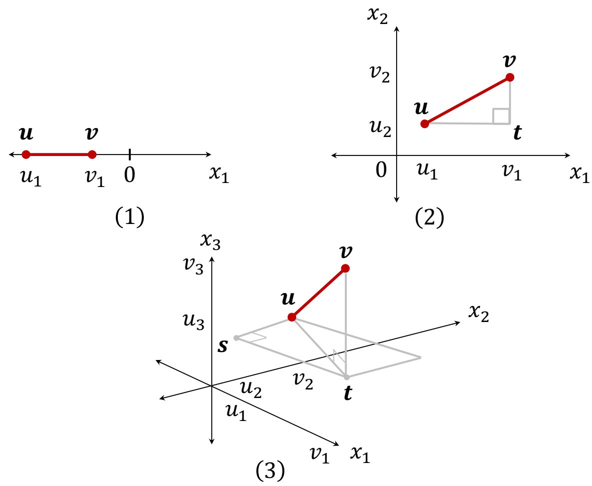
$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{u_1^2+\ldots+u_n^2} = \sqrt{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}} \quad \blacksquare$$

แนวคิดเกี่ยวกับความยาวของเวคเตอร์ และระยะทางระหว่างจุดข้างต้น แม้จะถูกกล่าวไว้ในเชิงคำนิยามที่แม้โดยทั่วไปไม่ต้องพิสูจน์ แต่หากได้พิจารณาตัวอย่างของการหาความยาวของเวคเตอร์ และระยะทางระหว่างจุดในมิติที่ไม่สูงนักเช่นใน $\mathbb{R}^1$ หรือ $\mathbb{R}^2$ ก็อาจช่วยให้เข้าใจและสามารถขยายแนวคิดเรื่องนี้ไปสู่ $\mathbb{R}^n$ ได้โดยง่าย สำหรับระยะทางระหว่างจุดสองจุดใน $\mathbb{R}^1$ เช่น จากรูปที่ 4.4 (1) นั้น ระยะทางระหว่างจุด $\boldsymbol{u} = u_1$ และ $\boldsymbol{v} = v_1$ ใน $\mathbb{R}^1$ หรือระยะทางระหว่างจุดบนเส้นจำนวนนั้น คือ $|u_1-v_1| = \sqrt{(u_1-v_1)^2}$ เนื่องจากระยะทางหรือระยะห่างระหว่างจุดย่อมมีค่าเป็นบวกเสมอ สำหรับการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดคือ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ใน $\mathbb{R}^2$ ดังรูปที่ 4.4 (2) ในกรณีทั่วไปที่จุดแต่ละจุดไม่ได้อยู่ตรงกัน ระยะทางสามารถหาได้จากกฏของปิทาโกรัส ที่ว่าสำหรับสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากยกกำลังสอง จะเท่ากับผลบวกของความยาวของแต่ละด้านที่เหลือยกกำลังสอง เนื่องจากความยาวของสามเหลี่ยมตามเส้นจำนวน x_1 ยกกำลังสองเท่ากับ $(u_1-v_1)^2 = (v_1-u_1)^2$ และความยาวของสามเหลี่ยมตามเส้นจำนวน x_2 ยกกำลังสองเท่ากับ $(u_2-v_2)^2 = (v_2-u_2)^2$ ดังนี้ ระยะทางระหว่างจุด $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ใน $\mathbb{R}^2$ จึงเท่ากับ

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2}$$

ในกรณีสุดท้ายตามรูปที่ 4.4 (3) การหาระยะทางระหว่างจุดใน $\mathbb{R}^3$ สามารถทำได้ในลักษณะเดียวกันกับการหาระยะทางระหว่างจุดใน $\mathbb{R}^2$ โดยการใช้กฏของปิทาโกรัส หาความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากในระนาบ $\mathbb{R}^2$ ไปเรื่อยๆ จนได้ความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่ประกอบขึ้นเป็นระยะทางระหว่างจุดที่ต้องการ เช่น จากรูป ระยะทางระหว่าง $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{t}$ กำลังสองเท่ากับ $(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2$ และเนื่องจากระยะทางระหว่างจุด $\boldsymbol{v}$ และ $\boldsymbol{t}$ กำลังสองเท่ากับ $(u_3-v_3)^2$ ดังนั้น จากกฏของปิทาโกรัส ระยะทางระหว่างจุด $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ใน $\mathbb{R}^3$ จึงเท่ากับ

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+(u_3-v_3)^2}$$



รูปที่ 4.4 ระยะทางระหว่างจุดใน $\mathbb{R}^1$ $\mathbb{R}^2$ และ $\mathbb{R}^3$ (1) ระยะทางระหว่างจุด $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ใน $\mathbb{R}^1$ เท่ากับ $|u_1 - v_1| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2}$ (2) ระยะทางระหว่างจุด $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ใน $\mathbb{R}^2$ สามารถหาได้จากกฎของปิทาโกรัส (3) ระยะทางระหว่างจุด $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ใน $\mathbb{R}^3$ สามารถหาได้โดยการใช้กฎของปิทาโกรัสเพื่อหาระยะทางระหว่างจุด $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{t}$ ก่อน จากนั้นจึงใช้กฎของปิทาโกรัส เพื่อหาระยะทางระหว่างจุด $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ต่อไป

แนวคิดข้างต้นสามารถขยายจาก $\mathbb{R}^3$ ให้สูงขึ้นได้เรื่อยๆ จนถึงกรณีทั่วไป ซึ่งให้ระยะทางระหว่าง จุด $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ใน $\mathbb{R}^n$ ดังนิยามที่ 4.1

ตัวอย่างที่ 4.1 ระยะทางระหว่าง จุด $\boldsymbol{u} = (1, 1, 1)$ และ $\boldsymbol{v} = (2, 0, 1)$ คือ

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| &= \sqrt{(1-2)^2 + (1-0)^2 + (1-1)^2} \\ &= \sqrt{2} \quad \square \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.2 ความยาวของเวคเตอร์ $\boldsymbol{u} = (1, 1, 1)$ และ $\boldsymbol{v} = (2, 0, 1)$ คือ $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{3}$ และ $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{5}$ ในกรณีนี้หากต้องการหาเวคเตอร์ที่ชี้ไปในทิศทางเดียวกับ $\boldsymbol{u}$ หรือ $\boldsymbol{v}$ แต่ถูกปรับขนาดให้เท่ากับ 1 จะหาได้จากการนำเอาความยาวของเวคเตอร์ที่หาได้ หารด้วยค่าแต่ละตัวในเวคเตอร์ กล่าวคือ

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ และ } \tilde{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

คือเวคเตอร์ที่มีความยาวเท่ากับ 1 หน่วย ซึ่งชี้ไปในทิศทางเดียวกับ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ตามลำดับ $\square$

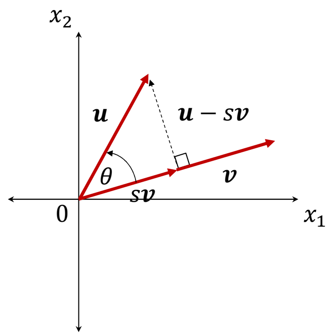
คุณสมบัติสำคัญเรื่องต่อไปเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างเวคเตอร์ ความยาวของเวคเตอร์ และมุมที่เกิดขึ้นจากเวคเตอร์ เป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.2 สมมติให้ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ซึ่งเป็นเวคเตอร์ที่มีความยาวใดๆ ใน $\mathbb{R}^n$ สร้างมุมซึ่งเท่ากับ θ จะได้ว่า $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \cos \theta \quad \blacksquare$

ทฤษฎีบทข้างต้นแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชั่น $\cdot$ ของเวคเตอร์ และความยาวของกับเวคเตอร์กับมุมของเวคเตอร์ การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้สามารถทำได้โดยพิจารณา $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ใน $\mathbb{R}^2$ ซึ่งทำมุม θ โดยที่ $\boldsymbol{u}$ เป็นเวคเตอร์ที่สั้นกว่า $\boldsymbol{v}$ ดังรูป 4.5 จากนั้น หากลากเส้นตรงจากจุดปลายของ $\boldsymbol{u}$ ลงมาตั้งฉากกับ $\boldsymbol{v}$ จะได้สามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งเมื่อใช้นิยามของ $\cos \theta$ จะได้ว่า[1]

$$\cos \theta = \frac{\|s\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{u}\|} = s\frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{u}\|}$$

[1] การพิสูจน์กรณีที่ $\boldsymbol{u}$ ยาวกว่า $\boldsymbol{v}$ สามารถทำได้โดยสลับ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ในทฤษฎีบท



รูปที่ 4.5 การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4.3 สมมติให้ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ เป็นเวคเตอร์ใน $\mathbb{R}^2$ ซึ่งทำมุม θ โดยที่ $\boldsymbol{u}$ เป็นเวคเตอร์ที่สั้นกว่า $\boldsymbol{v}$ เส้นตรงที่ลากจากจุดปลายของ $\boldsymbol{u}$ ลงมาตั้งฉากกับ $\boldsymbol{v}$ และตัดกับ $\boldsymbol{v}$ ที่จุดใดจุดหนึ่งบน $\boldsymbol{v}$ สมมติให้เวคเตอร์จากจุดกำเนิดไปยังจุดตัดเท่ากับ $s\boldsymbol{v}$ โดยที่ $0 < s < 1$ คือพารามิเตอร์ที่ปรับขนาดหรือย่อ $\boldsymbol{v}$ ให้เท่ากับจุดตัดพอดี จากการตีความเวคเตอร์ในเชิงเรขาคณิตข้างต้น จะได้ว่า $\boldsymbol{u} - s\boldsymbol{v}$ คือเส้นที่ลากจาก จากจุดตัดไปยัง $\boldsymbol{u}$

ทั้งนี้ จากกฎของปิทาโกรัส และจากนิยามของความยาวและระยะทางข้างต้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}\|^2 &= \|s\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{u} - s\boldsymbol{v}\|^2 \\ &= s^2\|\boldsymbol{v}\|^2 + (\boldsymbol{u} - s\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{u} - s\boldsymbol{v}) \\ &= s^2\|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{u}\|^2 - 2s\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + s^2\|\boldsymbol{v}\|^2 \end{aligned}$$

เมื่อจัดรูปแบบสมการให้ $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ อยู่ทางฝั่งซ้ายจะได้

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = s\|\boldsymbol{v}\|^2$$

และท้ายที่สุดจากนิยามของ $\cos\theta$ ข้างต้น ซึ่งให้ผลลัพธ์ที่ว่า $s\|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\|\cos\theta$ เมื่อนำไปแทนค่าในฝั่งขวาของสมการข้างต้นจะได้

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta$$

ซึ่งเป็นคุณสมบัติตามทฤษฎีบท

จากทฤษฎีบทข้างต้น และคุณสมบัติที่ว่าความยาวของเวคเตอร์จะเป็นบวกเสมอ ประกอบกับคุณสมบัติของฟังก์ชั่น $\cos(\theta)$ ที่ว่า $\cos(\theta) > 0$ หาก θ เป็นมุมแหลม $\cos(\theta) = 0$ หาก θ เป็นมุมฉาก $\cos(\theta) < 0$ หาก θ เป็นมุมป้าน ดังนี้ ค่าของ $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ จึงขึ้นอยู่กับค่าของ $\cos(\theta)$ อีกทั้งยังสามารถบอกมุมที่เกิดจากเวคเตอร์ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ว่าเป็นมุมชนิดใดได้ จากการพิจารณาค่าของ $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.3 สมมติให้เวคเตอร์ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ใน $\mathbb{R}^n$ สร้างให้เกิดมุมซึ่งเท่ากับ θ

1. θ เป็นมุมแหลมหาก $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} > 0$

2. θ เป็นมุมฉากหาก $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$

3. θ เป็นมุมป้านหาก $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} < 0$ ■

ทฤษฎีบทข้างต้นเป็นทฤษฎีสำคัญที่แสดงความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตและพีชคณิตเชิงเส้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งผลลัพธ์ในข้อสอง ของทฤษฎีบทนี้ จะเนื้อหาสำคัญที่ใช้ศึกษาเรื่อง**การตั้งฉาก (orthogonality)** ต่อไป

ตัวอย่างที่ 4.3 เมื่อพิจารณา $\boldsymbol{u} = (0, x)$ และ $\boldsymbol{v} = (y, 0)$ ใน $\mathbb{R}^2$ จะเห็นได้ว่า $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ คือเส้นตรงจากจุดกำเนิดที่ขนานไปกับแนวนอนและแนวตั้ง ซึ่งมีความยาวเท่ากับ x และ y ตามลำดับ มุมที่เกิดจากเส้นตรงทั้งสองเส้น จะเป็นมุมฉากเสมอ โดยไม่สำคัญว่าความยาวของเส้นตรงแต่ละเส้นเป็นเท่าใด ผลลัพธ์ดังกล่าวสอดคล้องกับค่าของ $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0(y) + x(0) = 0$ ตามทฤษฎีบทที่ 4.3 □

ผลลัพธ์ที่สำคัญอีกเรื่องหนึ่งที่สืบเนื่องจากทฤษฎีบทที่ 4.2 ได้แก่ ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของผลรวมของเวคเตอร์และผลรวมของความยาวเวคเตอร์ ซึ่งสามารถสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.4 สมมติให้ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ เป็นเวคเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$

1. $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$

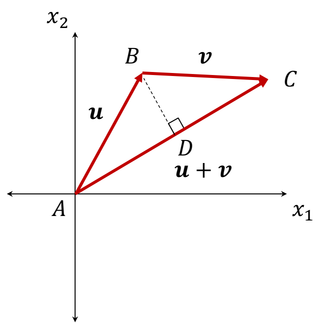
2. $\|\boldsymbol{u}\| - \|\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$ ■

การพิสูจน์ข้อแรกของทฤษฎีบทสามารถทำได้ง่ายในกรณี $\mathbb{R}^2$ โดยจาก $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ และ $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ ใน $\mathbb{R}^2$ ซึ่งประกอบกันเป็นสามเหลี่ยม ABC ดังรูปที่ 4.6 จากรูป เส้นตรงจากมุม B ไปตั้งฉากกับเส้น $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ จะแบ่ง $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|$ ออกเป็นสองส่วนคือ AD และ CD ซึ่งจากคุณสมบัติของสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้ว่าความยาวของด้าน AB จะยาวกว่าด้าน AD เสมอ และความยาวของด้าน BC จะยาวกว่าด้าน CD เสมอ ซึ่งนำไปสู่ข้อสรุปที่ว่า $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| < \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ เสมอหาก $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ประกอบกันเป็นสามเหลี่ยม ส่วนในกรณีเฉพาะที่ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ไม่ได้ประกอบกันเป็นสามเหลี่ยม กล่าวคือเมื่อ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ชี้ไปในทิศทางเดียวกัน หรือตรงข้ามกันนั้น จะได้ว่า $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4.4 ในกรณี $\mathbb{R}^2$ สามารถใช้ทฤษฎีบทที่ 4.3 และคุณสมบัติที่ว่า $\cos(\theta) \leq 1$ เสมอ ดังนั้น

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \leq \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\|$$

จากนั้นหากนำ 2 คูณเข้าทั้งสองข้างของอสมการ และนำเอา $\|\boldsymbol{u}\|^2$ และ $\|\boldsymbol{v}\|^2$ บวกทั้งสองข้างของอสมการ พร้อมใช้นิยามของความยาวของเวคเตอร์ จะได้

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \|\boldsymbol{v}\|^2 &\leq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}\|^2 \\
\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} &\leq (\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2 \\
(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) &\leq (\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2
\end{aligned}$$



รูปที่ 4.6 ความสัมพันธ์ $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \le \|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|$ ใน $\mathbb{R}^2$ สมมติให้ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ เป็นเวคเตอร์ใน $\mathbb{R}^2$ ซึ่งชี้ไปในองศาที่ไม่เท่ากัน จากรูป $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ และ $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ จะประกอบกันเป็นสามเหลี่ยม ABC หากลากเส้นตรงจากมุม B ไปตั้งฉากกับเส้น $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ จะแบ่ง $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|$ ออกเป็นสองส่วน คือ AD และ CD ซึ่งจากคุณสมบัติของสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้ว่าความยาวของด้าน AB จะยาวกว่าด้าน AD เสมอ และความยาวของด้าน BC จะยาวกว่าด้าน CD เสมอ ซึ่งนำไปสู่ข้อสรุปที่ว่า $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| < \|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|$ ส่วนในกรณีเฉพาะที่ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ชี้ไปในองศาเดียวกันนั้น จะได้ว่า $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|$

ในขั้นตอนสุดท้าย จากการใช้นิยามของความยาวของเวคเตอร์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 &\leq (\|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|)^2\\ \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| &\leq \|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|\end{aligned}$$

ซึ่งเป็นคุณสมบัติตามทฤษฎีบท การพิสูจน์ข้อที่สองของทฤษฎีบท สามารถทำได้โดยอาศัยผลลัพธ์จากข้อแรกของทฤษฎีบท กล่าวคือ หากให้ $\boldsymbol{x}$ และ $\boldsymbol{y}$ เป็นเวคเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ จะได้ว่า

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$$

หรือ

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|$$

จากนั้นหากให้ $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{v}$ ดังนั้น $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ ซึ่งเมื่อนำไปแทนค่าตามอสมการข้างต้น จะได้คุณสมบัติตามทฤษฎีบท

ตัวอย่างที่ 4.4 ทฤษฎีบททั่วไปของปิทาโกรัส จากทฤษฎีบทพื้นฐานของปิทาโกรัสที่ว่า สำหรับสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ ความยาวของเส้นตรงข้ามมุมฉากยกกำลังสอง จะเท่ากับเส้นที่เหลือแต่ละเส้นยกกำลังสองรวมกัน ผลจากทฤษฎีบทนี้ สามารถขยายให้ครอบคลุมสามเหลี่ยมมุมฉากที่เกิดขึ้นจากเวคเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ ได้โดยแสดงให้เห็นว่า สำหรับเวคเตอร์ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ใน $\mathbb{R}^n$ ที่ตั้งฉากกัน

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{v}\|^2$$

โดยจากทฤษฎีบทที่ 4.4 ที่หาก $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ตั้งฉากกันแล้ว $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$ ดังนั้น

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|\cos(\theta) = 0$$

และจากขั้นตอนการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4.5 จะได้ว่า $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \|\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{v}\|^2$ $\square$

4.2 เส้น

แนวคิดที่พัฒนาต่อเนื่องจากจุดคือแนวคิดเกี่ยวกับ**เส้น (line)** เส้นตามคำนิยามทางคณิตศาสตร์ทั่วไป แม้จะไม่ได้มีคำขยายความหมายเป็นการเฉพาะ แต่ก็มักเป็นที่เข้าใจอย่างกว้างขวาง ว่าหมายถึงเส้นตรง ซึ่งเท่ากับระยะทางสั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดที่ต่างกัน อนึ่ง แม้ก่อนหน้านี้ได้

กล่าวถึงเส้นไปบ้างแล้ว เช่น ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4.5 ที่ต้องลากเส้นจากมุมหนึ่งในสามเหลี่ยมมาตั้งฉากกับด้านที่ตรงข้ามกับมุม แต่แนวคิดเรื่องเส้นดังกล่าว ก็ยังคงเป็นเพียงแนวคิดในเชิงเรขาคณิต ในส่วนต่อไปนี้จึงจะได้ขยายความเข้าใจเกี่ยวกับเส้นเพิ่มเติมจากแนวคิดในเชิงเรขาคณิตที่เส้น คือ การลากเชื่อมจุด ไปสู่แนวคิดในเชิงเรขาคณิตวิเคราะห์ ที่อธิบายเส้นด้วยสมการ ในลักษณะเดียวกับการอธิบายจุดด้วยเวคเตอร์

เป็นที่ทราบกันดีว่า เส้นตรงบนระนาบ (x_1, x_2) สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยสมการ $x_2 = ax_1 + b$ หรือ การกำหนดจุดสองจุดที่เส้นลากผ่าน ก็เป็นอีกวิธีหนึ่งที่สามารถกำหนดเส้นที่ไม่ซ้ำกับเส้นอื่นๆ ได้ อาทิ การหาสมการที่กำหนดเส้นตรงบนระนาบ (x_1, x_2) ที่ลากผ่านจุด $\boldsymbol{p} = (x_{10}, x_{20})$ และจุด $\boldsymbol{q} = (x_{11}, x_{21})$ ดังในรูปที่ 4.4 (1) จึงสามารถทำได้ โดยการหาความชันของเส้นตรงซึ่งเท่ากับ $\frac{x_{21}-x_{20}}{x_{11}-x_{10}}$ จากนั้นจึงนำจุดใดจุดหนึ่ง และความชันมาประกอบขึ้นเป็นฟังก์ชั่นเส้นตรง

ตัวอย่างที่ 4.5 ความชันของสมการเส้นตรงที่ลากผ่านจุด $(1, 1)$ และ $(2, 3)$ บนระนาบ (x_1, x_2) เท่ากับ

$$a = \frac{3-1}{2-1} = \frac{1-3}{1-2} = 2$$

ทั้งนี้ มีข้อสังเกตที่สำคัญ คือ การหาความชันข้างต้นนั้น ไม่สำคัญว่าจะใช้จุดใดเป็นจุดแรกหรือจุดปลาย กล่าวคือ หากสลับค่าของจุดทั้งสองให้ $(2, 3)$ เป็นจุดเริ่มต้นและจุด $(1, 1)$ เป็นจุดปลายจะได้ความชันที่เท่าเดิม เมื่อได้ความชันของเส้นตรง ที่ลากผ่านทั้งสองจุดข้างต้นแล้ว หากนำจุดใดจุดหนึ่ง คือ $(1, 1)$ หรือ $(2, 3)$ ไปแทนในสมการเส้นตรงคือ $x_2 = ax_1 + b$ จะสามารถหาค่าพารามิเตอร์ที่เหลือ คือ b ได้คือ

$$b = 1 - 2(1) = 3 - 2(2) = -1$$

กล่าวคือสมการกำหนดเส้นตรง ที่ลากผ่านจุดทั้งสองจุด คือ $x_2 = 2x_1 - 1$ □

ตัวอย่างที่ 4.6 ในการหาว่าเส้นตรงเส้นหนึ่งลากผ่านจุดสามจุด คือ $(1, 1)$ และ $(2, 3)$ และ $(4, 6)$ หรือไม่นั้น จากตัวอย่างที่ 4.5 ซึ่งสามารถหาสมการที่ลากผ่านจุดสองจุด คือ $(1, 1)$ และ $(2, 3)$ ได้เท่ากับ

$$x_2 = 2x_1 - 1$$

จากนั้นหากนำ $x_1 = 4$ ไปแทนค่าในสมการ จุดที่อยู่บนสมการจะต้องมีค่า $x_2 = 2(4) - 1 = 7$ ดังนี้ จุด $(4, 6)$ จึงไม่อยู่บนเส้นตรงนี้ กล่าวคือ ไม่มีเส้นตรงใดที่ลากผ่านจุดสามจุดที่กำหนด □

การกำหนดสมการของเส้นตรงอีกวิธีหนึ่ง ซึ่งเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในกรณีสมการเส้นตรงบนระนาบที่มากกว่าสองมิติ ได้แก่ การกำหนดจุดที่เส้นตรงลากผ่านหนึ่งจุด และทิศทางที่เส้นตรงชี้ไปที่อยู่ในรูป

$$\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{p} + s\boldsymbol{u}$$

โดยที่ $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}$ ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงใน n มิติที่ลากผ่านจุด $\boldsymbol{p}$ และชี้ไปในทิศทางเดียวกับเวคเตอร์ $\boldsymbol{u}$ โดยมีพารามิเตอร์ s ทำหน้าที่ย่อ หรือขยายความยาวของเส้น หรือปรับทิศทางของเส้นให้ไปในทิศทางตรงข้าม □

ตัวอย่างที่ 4.7 เส้นตรงซึ่งลากผ่านจุด $\boldsymbol{p}$ และชี้ไปในทิศทางเดียวกับเวคเตอร์ $\boldsymbol{u}$ เมื่อ

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ และ } \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการ

$$\boldsymbol{x}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

โดยที่ $s \in \mathbb{R}$ □

ตัวอย่างที่ 4.8 การพิจารณาว่าจุด $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ อยู่บนเส้นตรง

$$\boldsymbol{x}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

หรือไม่ สามารถทำได้โดยคำนวณหาค่า s จากค่าใดค่าหนึ่งของเวคเตอร์ และแทนค่า s ที่คำนวณได้ ในค่าที่เหลือว่าสอดคล้องกันหรือไม่ เช่น หากใช้ค่าที่อยู่บนแถวบนของเวคเตอร์จะได้

$$-1 = 0 + s(1)$$

ซึ่งให้ค่า $s = -1$ จากนั้นเมื่อแทนค่า $s = -1$ ลงในฝั่งขวาของแถวล่างของเวคเตอร์ จะได้

$$1 + -1(1) = 0$$

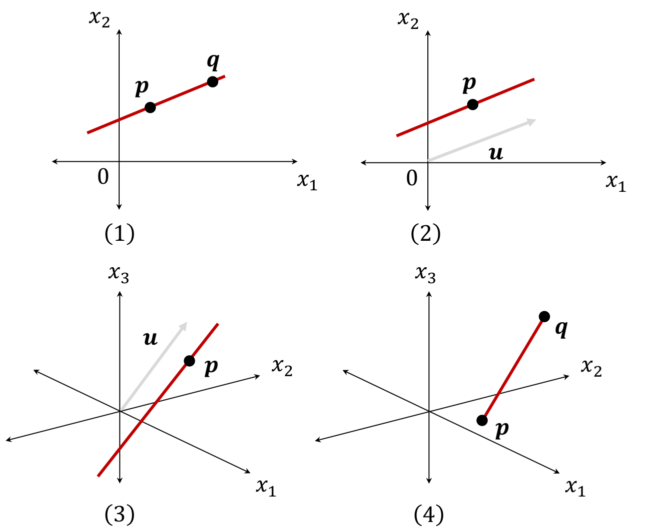
กล่าวคือ จุดที่อยู่บนเส้นตรงคือ $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ไม่ใช่จุด $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\square$

การหาสมการอธิบายเส้นตรงทั้งสองรูปแบบ คือ การกำหนดจุดที่สมการลากผ่าน 2 จุดสำหรับสมการเส้นตรงในระนาบ n มิติขึ้นมาก่อน แล้วจึงหาค่าพารามิเตอร์ของสมการ ซึ่งเป็นวิธีแรก และการกำหนดจุดที่สมการลากผ่าน 1 จุด และเวคเตอร์ซึ่งกำหนดทิศทางที่เส้นตรงชี้ไป ซึ่งเป็นวิธีที่สองนั้น สามารถอธิบายได้ดังรูปที่ 4.7 ในรูปที่ 4.7 (1) เป็นการหาสมการอธิบายเส้นตรง โดยกำหนดจุด 2 จุด บนระนาบ 2 มิติ จากนั้นจึงคำนวนค่าพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้อง คือ ความชันและจุดตัดแกนตั้ง ส่วนในรูปที่ 4.7 (2) และ 4.7 (3) ตามลำดับ จะเป็นการหาสมการอธิบายเส้นตรง โดยการกำหนดจุดที่เส้นตรงลากผ่านเพียงจุดเดียว และทิศทางที่เส้นตรงชี้ไปใน 2 และ 3 มิติตามลำดับ ทั้งนี้ จากรูปจะเห็นได้ว่า การหาสมการอธิบายเส้นตรงด้วยวิธีแรก คือ การหาความชันและจุดตัดแกนนั้น มีความซับซ้อนขึ้นเรื่อยๆ ในมิติที่มากกว่า 2 มิติ เนื่องจากจุดตัดแกนและความชันของเส้นตรงที่ต้องกำหนด จะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ตามขนาดของมิติ ดังนี้ การพยายามอธิบายสมการเส้นตรงในมิติที่สูงขึ้นด้วยวิธีแรก คือ การกำหนดความชันของเส้นและจุดตัดแกน จึงซับซ้อนและไม่มีประสิทธิภาพเท่าที่ควร เมื่อเทียบกับการอธิบายสมการของเส้นตรงด้วยวิธีที่สอง คือ การกำหนดจุดที่เส้นลากผ่านเพียงหนึ่งจุด และเวคเตอร์อีกหนึ่งเวคเตอร์ ที่ระบุทิศทางที่เส้นตรงชี้ไปทางนั้น ซึ่งอยู่ในรูปแบบที่กระชับกว่า คือ $\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{p} + s\boldsymbol{u}$ เมื่อ $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}$

การกำหนดเส้นตรงด้วยวิธีสุดท้ายที่จะได้กล่าวถึงในที่นี้ ได้แก่ การกำหนดสมการที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดเข้าด้วยกัน กล่าวคือ หากให้ $\boldsymbol{p}$ และ $\boldsymbol{q}$ เป็นจุดใน $\mathbb{R}^n$ แล้ว สมการที่เชื่อมระหว่างจุด $\boldsymbol{p}$ และ $\boldsymbol{q}$ เข้าด้วยกันสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \{s\boldsymbol{p} + (1-s)\boldsymbol{q}, 0 \leq s \leq 1\}$$

จากสมการข้างต้นจะเห็นได้ว่าหาก $s = 0$ สมการที่อธิบายเส้นข้างต้นจะลดรูป เป็นสมการที่อธิบายจุด $\boldsymbol{p}$ และหาก $s = 1$ สมการที่อธิบายเส้นข้างต้นจะลดรูป อเป็นสมการที่อธิบายจุด $\boldsymbol{q}$ การให้ค่า s เป็นค่าใดๆ ที่อยู่ระหว่าง 0 และ 1 จึงเปรียบได้กับการลากเส้นที่เชื่อม $\boldsymbol{p}$ และ $\boldsymbol{q}$ เข้าด้วยกัน ดังรูปที่ 4.7 (4) ทั้งนี้ มีข้อสังเกตที่น่าสนใจประการหนึ่ง คือ โดยทั่วไปแล้วการอธิบายเส้นตรงด้วยสมการด้วยสามวิธีแรก จะเป็นการอธิบายเส้นตรงที่มีความยาวไม่จำกัด แต่วิธีสุดท้ายจะการ



รูปที่ 4.7 เส้นตรง (1) เส้นตรงใน $\mathbb{R}^2$ ซึ่งกำหนดได้จากเส้นที่ลากผ่านจุดสองจุด คือ $\boldsymbol{p} = (x_{10}, x_{20})$ และ $\boldsymbol{q} = (x_{11}, x_{21})$ ที่ไม่ซ้ำกัน สมการซึ่งอธิบายเส้นตรงแบบแรกจะอยู่ในรูป $x_2 = ax_1 + b$ โดยที่ $b = \frac{x_{21} - x_{20}}{x_{11} - x_{10}} = \frac{x_{20} - x_{21}}{x_{10} - x_{11}}$ และ $a = x_{20} - bx_{10} = x_{21} - bx_{11}$ (2) เส้นตรงใน $\mathbb{R}^2$ ซึ่งกำหนดได้จากเส้นที่ลากผ่านจุดหนึ่งจุด คือ $\boldsymbol{p}$ ที่ชี้ไปในทิศทางตามเวคเตอร์ $\boldsymbol{u}$ และ (3) เส้นตรงใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่งกำหนดจากเส้นที่ลากผ่านจุดหนึ่งจุด คือ $\boldsymbol{p}$ ที่ชี้ไปในทิศทางตามเวคเตอร์ $\boldsymbol{u}$ สมการซึ่งอธิบายเส้นตรงใน (2) และ (3) จะอยู่ในรูป $\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{p} + s\boldsymbol{u}$ โดยที่ $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}$ (4) เส้นตรงใน $\mathbb{R}^3$ ที่เกิดขึ้นจากการเชื่อมจุด $\boldsymbol{p}$ และจุด $\boldsymbol{q}$ เข้าด้วยกัน

อธิบายเส้นตรงที่มีความยาวจำกัดระหว่างจุดสองจุด ซึ่งหากต้องการขยายความยาวของเส้นตรงให้พ้นเลยจุดทั้งสองจุดที่กำหนดนั้น ก็สามารถทำได้โดยการขยายเงื่อนไขของ s จาก $0 \leq s \leq 1$ ไปเป็น $s \in \mathbb{R}^n$

4.3 ความเป็นอิสระกันของเส้นตรง

นิยามที่ 4.3 สมมติให้ $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ เป็นเวคเตอร์ที่มีขนาดเท่ากันใน $\mathbb{R}^n$ **ส่วนผสมเชิงเส้น (linear combination)** ของ $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ ได้แก่

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_m\boldsymbol{v}_m$$

เมื่อ $c_1, \ldots, c_n$ คือ ค่าคงที่ ■

จากนิยามของส่วนผสมเชิงเส้นข้างต้น แนวคิดเรื่องความเป็นอิสระกันของเส้นตรงสามารถนิยามได้ ดังต่อไปนี้

นิยามที่ 4.4 เวคเตอร์ $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ ใน $\mathbb{R}^n$ มี**ความเป็นอิสระกัน (linearly independence)** หาก

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0}$$

สำหรับค่าสเกลาร์ $c_1, \ldots, c_m$ ก็ต่อเมื่อ $c_1 = \ldots = c_m = 0$ ■

กล่าวคือ กลุ่มเวคเตอร์หนึ่งจะเป็นอิสระกันก็ต่อเมื่อ ส่วนผสมเชิงเส้นของกลุ่มเวคเตอร์นี้ มีค่าเท่ากับศูนย์ได้ เมื่อค่าคงที่ในส่วนผสมเชิงเส้นนี้ทุกตัวเท่ากับศูนย์เท่านั้น นิยามข้างต้นสามารถขยายความให้เห็นภาพชัดเจนยิ่งขึ้น โดยการพิจารณาเวคเตอร์ใน $\mathbb{R}^2$ ดังรูปที่ 4.8 จากรูปจะเห็นได้ว่า $\boldsymbol{v}_1 = (1,1)$ และ $\boldsymbol{v}_2 = (2,2)$ ไม่เป็นอิสระกัน เนื่องจากค่า c_1 และ c_2 ที่ทำให้ $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ ไม่ได้มีแต่เพียงค่า $c_1 = c_2 = 0$ เท่านั้น หากยังมีค่าอื่นอีกมาก เช่น $c_1 = -2, c_2 = 1$ เป็นต้น ในความเป็นจริงแล้ว โดยที่ $\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}_1$ ดังนี้ ทุกค่า $c_1 = -2s, c_2 = s$ เมื่อ $s \in \mathbb{R}$ ต่างทำให้ $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ ในทางตรงข้าม $\boldsymbol{v}_2 = (2,2)$ และ $\boldsymbol{v}_3 = (2,1)$ เป็นอิสระกัน เนื่องจากค่า c_1 และ c_2 ที่ทำให้ $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ มีเพียงค่า $c_1 = c_2 = 0$ เท่านั้น เมื่อพิจารณาเงื่อนไขของการเป็นอิสระกันของเวคเตอร์ ในเชิงเรขาคณิตแล้วจะเห็นว่า ในกรณีแรก คือ $\boldsymbol{v}_1$ และ $\boldsymbol{v}_2$ ซึ่งไม่เป็นอิสระกันนั้น จะสามารถเชื่อมจุด 3 จุด คือ จุดกำเนิด จุด $\boldsymbol{v}_1$ และ จุด $\boldsymbol{v}_2$ เข้าด้วยกันได้ด้วยเส้นตรงเพียงเส้นเดียว ต่างจากในอีกกรณี คือ $\boldsymbol{v}_2$ และ $\boldsymbol{v}_3$ ซึ่งเป็นอิสระกัน ที่ไม่สามารถเชื่อมจุดกำเนิด จุด $\boldsymbol{v}_2$ และ จุด $\boldsymbol{v}_3$ เข้าด้วยกันได้ด้วยเส้นตรงเพียงเส้นเดียว

การตีความนิยามที่ 4.3 ในอีกรูปแบบหนึ่ง คือ หากให้ $c_1, \ldots, c_m$ เป็นพารามิเตอร์ปรับขนาด (scale parameter) ที่ใช้ย่อ ขยาย หรือเปลี่ยนทิศทางของเวคเตอร์ วิธีหนึ่งที่สามารถทำให้ผลรวมของเวคเตอร์ทุกตัวเท่ากับศูนย์ ได้แก่การปรับขนาดเวคเตอร์แต่ละตัวให้เท่ากับ $\mathbf{0}$ ด้วยการคูณเวคเตอร์ $\boldsymbol{v}_i$ แต่ละตัวด้วย c_i แล้วจึงนำมารวมกัน วิธีนี้กล่าวได้ว่าเป็นวิธีที่ไม่ใช่สาระสำคัญ (non-trivial) เนื่องจากเป็นวิธีที่สามารถทำได้เสมอไม่ว่า $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ จะเป็นเวคเตอร์ใดก็ตาม อีกวิธีที่สามารถทำให้ผลรวมของเวคเตอร์ทุกตัวเท่ากับศูนย์ ซึ่งสามารถทำได้เฉพาะกับเวคเตอร์ที่ไม่เป็นอิสระกันเท่านั้น คือ การใช้พารามิเตอร์ปรับขนาดที่ปรับขนาด และทิศทางเวคเตอร์แต่ละตัวให้หักล้างกันไปจนผลรวมเท่ากับ $\mathbf{0}$ ดังรูปที่ 4.8

โดยทั่วไปแล้ว การตรวจสอบว่าเวคเตอร์ใดเป็นอิสระกันหรือไม่ โดยการพิจารณากราฟว่าเวคเตอร์ดังกล่าว อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่ มักเป็นเรื่องยุ่งยากและซับซ้อนโดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่มากกว่าสามมิติ อย่างไรก็ตาม วิธีการพิจารณาความเป็นอิสระกันซึ่งเป็นระบบกว่า สามารถทำได้โดยตรง โดยใช้นิยามความเป็นอิสระกันของเส้นตรงตามนิยามที่ 4.4 ประกอบกับการหาคำตอบของระบบสมการที่เหมือนกัน (homogeneous system of equations) กล่าวคือ $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ เมื่อ $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^n$ จะเป็นอิสระกันก็ต่อเมื่อ ระบบสมการ

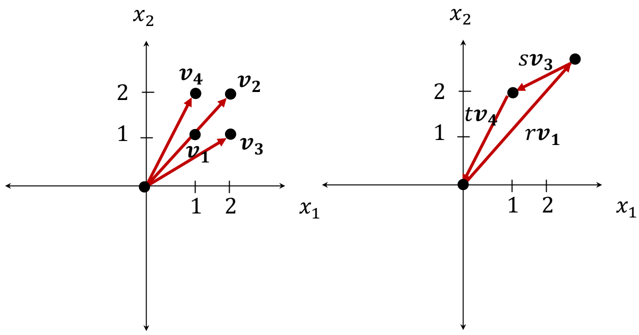
$$\begin{pmatrix} v_{11} & \ldots & v_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \ldots & v_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

มีคำตอบชุดเดียว คือ $c_1 = \ldots = c_m = 0$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.9 จากตัวอย่างตามรูปที่ 4.8 การพิจารณาความเป็นอิสระกันระหว่าง $\boldsymbol{v}_1$ และ $\boldsymbol{v}_2$ สามารถทำได้โดยการหาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

จากการหาคำตอบด้วยวิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์ เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการนี้ มีอันดับเท่ากับ 1 ซึ่งน้อยกว่าจำนวนแถวของระบบสมการซึ่งเท่ากับ 2 ระบบสมการนี้ จึงมีคำตอบนับไม่ถ้วน คือ หากให้ $c_2 = s$ เมื่อ $s \in \mathbb{R}$ เป็นตัวแปรอิสระ ทุกค่า $(c_1, c_2) = (-2s, s)$ จะเป็นคำตอบของระบบสมการนี้ ดังนี้ $\boldsymbol{v}_1$ และ $\boldsymbol{v}_2$ จึงไม่เป็นอิสระระหว่างกัน สำหรับการพิจารณาความ



(1) (2)

รูปที่ 4.8 ความเป็นอิสระกันของเส้นตรง (linear independence) (1) เวคเตอร์ $\boldsymbol{v}_1$ และ $\boldsymbol{v}_2$ ไม่เป็นอิสระกันเนื่องจากค่า c_1 และ c_2 ที่ทำให้ $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$ คือ $c_1 = -2s, c_2 = s$ เมื่อ $s \in \mathbb{R}$ เวคเตอร์ $\boldsymbol{v}_2$ และ $\boldsymbol{v}_3$ เป็นอิสระกันเนื่องจากค่า c_1 และ c_2 ที่ทำให้ $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$ มีเพียงค่า $c_1 = c_2 = 0$ เท่านั้น (2) เวคเตอร์ $\boldsymbol{v}_1$ และ $\boldsymbol{v}_3$ และ $\boldsymbol{v}_4$ เป็นกลุ่มเวคเตอร์ที่ไม่เป็นอิสระกัน เนื่องจากการเข้าสู่จุดศูนย์กลางสามารถทำได้หลายวิธีโดยไม่จำเป็นต้องปรับขนาดเวคเตอร์แต่ละเส้นให้เป็นศูนย์เท่านั้น เช่น หากปรับขนาดของ $\boldsymbol{v}_1$ ให้เป็น $r\boldsymbol{v}_1$ ปรับขนาดและทิศทางของ $\boldsymbol{v}_3$ ให้เป็น $s\boldsymbol{v}_3$ และปรับทิศทางของ $\boldsymbol{v}_4$ ให้เป็น $t\boldsymbol{v}_4$ จะได้ว่า $r\boldsymbol{v}_1 + s\boldsymbol{v}_3 + t\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}$ โดยที่ $r, s, t \neq 0$

เป็นอิสระกันระหว่าง $\boldsymbol{v}_2$ และ $\boldsymbol{v}_3$ นั้น สามารถทำได้โดยการหาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

จากการหาคำตอบด้วยวิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์ เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการนี้มีลำดับเท่ากับ 2 ซึ่งเท่ากับจำนวนแถวของระบบสมการ ระบบสมการนี้ซึ่งเป็นระบบสมการที่เหมือนกัน จึงมีคำตอบเพียงชุดเดียว คือ $c_1 = c_2 = 0$ ดังนี้ $\boldsymbol{v}_1$ และ $\boldsymbol{v}_2$ จึงเป็นอิสระระหว่างกัน $\square$

จากกระบวนการพิจารณาความเป็นอิสระกันของเส้นตรง ด้วยการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่เหมือนกันข้างต้น ประกอบกับข้อเท็จจริง คือ ประการแรก อันดับของระบบสมการเชิงเส้นจะต้องน้อยกว่า หรือเท่ากับจำนวนแถวของระบบสมการเสมอ ประการที่สอง คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นใดๆ สามารถเป็นได้เพียงสามกรณี คือ ไม่มีคำตอบ มีคำตอบชุดเดียว หรือไม่คำตอบนับไม่ถ้วน ประการที่สาม ระบบสมการเชิงเส้นที่เหมือนกันจะมีคำตอบอย่างน้อยหนึ่งชุดเสมอ และ ประการสุดท้าย ระบบสมการเชิงเส้นที่มีลำดับน้อยกว่าแถว จะมีคำตอบนับไม่ถ้วน หรือไม่มีคำตอบ เมื่อได้นำข้อเท็จจริงทั้งหมดพิจารณาร่วมกัน จะได้ว่า หากมีเวคเตอร์ใน $\mathbb{R}^2$ มากกว่า 2 เส้น เวคเตอร์กลุ่มนี้จะต้องไม่เป็นอิสระกันเสมอ จากรูปที่ 4.8 เวคเตอร์สามเส้นคือ $\boldsymbol{v}_1$ และ $\boldsymbol{v}_3$ และ $\boldsymbol{v}_4$ เป็นกลุ่มเวคเตอร์ที่ไม่เป็นอิสระกัน เนื่องจากการเข้าสู่จุดศูนย์กลางสามารถทำได้หลายวิธี โดยไม่จำเป็นต้องปรับขนาดเวคเตอร์แต่ละเส้นให้เป็นศูนย์เท่านั้น อาทิ หากปรับขนาดของ $\boldsymbol{v}_1$ ให้เป็น $r\boldsymbol{v}_1$ ปรับขนาดและทิศทางของ $\boldsymbol{v}_3$ ให้เป็น $s\boldsymbol{v}_3$ และปรับทิศทางของ $\boldsymbol{v}_4$ ให้เป็น $t\boldsymbol{v}_4$ จะได้ว่า $r\boldsymbol{v}_1 + s\boldsymbol{v}_3 + t\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}$ โดยที่ $r, s, t \neq 0$ ผลลัพธ์นี้สามารถขยายให้ครอบคลุมกรณีทั่วไปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.6 เวคเตอร์ $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ ใน $\mathbb{R}^n$ ไม่เป็นอิสระกันเสมอ หาก $m > n$

ในกรณีเฉพาะที่ ขนาดของเวคเตอร์และจำนวนเวคเตอร์เท่ากัน กล่าวคือ สำหรับ $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ ใน $\mathbb{R}^n$ การพิจารณาความเป็นอิสระระหว่างกันของกลุ่มเวคเตอร์ สามารถทำได้โดยการตรวจสอบตัวกำหนดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ง่ายโดยอาศัยความรู้เรื่องอันดับตามทฤษฎีบทที่ 4.6 ■ และความสัมพันธ์ระหว่างตัวกำหนดของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์และอันดับดังเช่นในบทที่ 2

ทฤษฎีบทที่ 4.7 เวคเตอร์ $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ ใน $\mathbb{R}^n$ เป็นอิสระกัน หาก

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \ldots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \neq 0 \quad ■$$

ตัวอย่างที่ 4.10 จากตัวอย่างตามรูปที่ 4.8 $\boldsymbol{v}_1$ และ $\boldsymbol{v}_2$ ไม่เป็นอิสระกันเนื่องจาก

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

อย่างไรก็ตาม $\boldsymbol{v}_2$ และ $\boldsymbol{v}_3$ เป็นอิสระกันเนื่องจาก

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 \neq 0 \qquad \square$$

4.4 ระนาบและระนาบบน

ระนาบ (plane) และ**ระนาบบน (hyperplane)** เป็นแนวคิดที่ต่อเนื่องจากจุดและเส้น[1] โดยเมื่อพิจารณาจากสมการเส้นตรงใน n มิติด้วยวิธีการกำหนดจุด 1 จุดที่เส้นตรงลากผ่าน และทิศทางที่เส้นตรงชี้ไป คือ

$$\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{p} + s\boldsymbol{u}$$

โดยที่ $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}$ แนวคิดเรื่องเส้นสามารถขยายไปสู่เรื่องระนาบได้ ด้วยการกำหนดจุด 1 จุด ที่ระนาบตัดผ่านและทิศทางของระนาบ 2 ทิศทาง ซึ่งอยู่ในรูป

$$\boldsymbol{x}(s,t) = \boldsymbol{p} + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$$

โดยที่ $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n; s,t \in \mathbb{R}$ อาทิ รูปที่ 4.9 (1) เป็นการแสดงระนาบใน 3 มิติ ที่ปรับทิศทางของระนาบ ไปในทิศทางของเวคเตอร์ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ซึ่งอยู่ในรูปสมการ $s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$ ทั้งนี้ มีข้อควรสังเกตที่สำคัญคือ การปรับทิศทางของระนาบใน 3 มิติให้คงที่นั้น จำเป็นต้องระบุทิศทางของระนาบ 2 ทิศทาง ในลักษณะเดียวกันกับการปรับทิศทางของเส้นตรงให้คงที่ ที่จะต้องระบุทิศทางของเส้นตรง 1 ทิศทาง จากนั้นจึงยกระนาบผ่านจุดกำเนิดที่ได้ปรับทิศทางให้คงที่แล้ว ให้ผ่านจุดที่กำหนดคือ $\boldsymbol{p}$

ตัวอย่างที่ 4.11 ระนาบผ่านจุด $(0,0,1)$ ใน $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ ซึ่งขนานไปกับระนาบ $(x_1,x_2) \in$

[1] แนวคิดเรื่องจุด เส้น และระนาบ ล้วนสอดคล้องกันไปในลักษณะเช่นเดียวกัน โดยอาจเปรียบได้ว่า จุดสองจุดที่ไม่ซ้ำกันสามารถสร้างเส้นขึ้นได้เช่นใด เส้นสองเส้นที่เป็นอิสระจากกันก็สามารถสร้างระนาบขึ้นได้เช่นนั้น อนึ่ง คำว่าระนาบในที่นี้ หมายรวมเฉพาะระนาบแบบยูคลิเดียน (Euclidean plane) ซึ่งเป็นแนวคิดที่ถูกเสนอโดยยูคลิดในกรณีระนาบในปริภูมิขนาด 2 มิติ และถูกพัฒนาต่อมาโดยเดส์คาร์ต (René Descartes, 1596-1650) และแฟร์มา (Pierre de Fermat, 1607-1665)

$\mathbb{R}^2$ สามารถกำหนดได้จากสมการ

$$\boldsymbol{x}(s,t) = \boldsymbol{p} + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$$

$s, t \in \mathbb{R}$ ที่ $\boldsymbol{p} = (0,0,1)$ ในการปรับทิศทางของระนาบ $\boldsymbol{x}(s,t)$ ให้ขนานไปกับระนาบ $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ สามารถกำหนดให้ $\boldsymbol{u} = (1,0,0)$ และ $\boldsymbol{v} = (0,1,0)$ อย่างไรก็ตาม มีข้อควรสังเกตว่า การกำหนดทิศทางของระนาบข้างต้นนั้น ไม่ได้ตายตัวว่าจะต้องให้ $\boldsymbol{u} = (1,0,0)$ และ $\boldsymbol{v} = (0,1,0)$ เสมอไป โดยหากให้ $\boldsymbol{u} = (q,0,0)$ และ $\boldsymbol{v} = (0,r,0)$ หรือให้ $\boldsymbol{u} = (0,q,0)$ และ $\boldsymbol{v} = (r,0,0)$ เมื่อ $q, r \in \mathbb{R}$ ก็ต่างกำหนดทิศทางที่ขนานไปกับระนาบ $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ เช่นเดียวกันทั้งสิ้น $\square$

สมการกำหนดระนาบยังอาจแสดงในรูปการกำหนดจุด 3 จุดบนระนาบ ในลักษณะเดียวกันกับสมการกำหนดเส้นที่แสดงในรูปการกำหนดจุด 2 จุดบนเส้น เช่น หากให้ $\boldsymbol{x}_0$ และ $\boldsymbol{x}_1$ เป็นจุดใน $\mathbb{R}^n$ แล้ว สมการกำหนดเส้น ที่เชื่อมระหว่างจุด $\boldsymbol{p}$ และ $\boldsymbol{q}$ เข้าด้วยกันสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \{s\boldsymbol{p} + (1-s)\boldsymbol{q}; s \in \mathbb{R}\}$$

ในลักษณะเดียวกันนี้ สมการกำหนดระนาบที่ตัดผ่านจุด 3 จุดใน n มิติ สามารถแสดงในรูปส่วนผสมเชิงเส้นที่ตัดผ่านจุด $\boldsymbol{p}$ และ $\boldsymbol{q}$ และ $\boldsymbol{s}$ จะอยู่ในรูป

$$\wp(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}) = \{(1-s-t)\boldsymbol{p} + s\boldsymbol{q} + t\boldsymbol{r}; s, t \in \mathbb{R}\}$$

ทั้งนี้ มีข้อสังเกตที่น่าสนใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างสมการกำหนดระนาบทั้งสองรูปแบบ คือ $\boldsymbol{x}(s,t)$ และ $\wp(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$ ดังสามารถพิจารณาได้จากรูปที่ 4.9 (2) คือ การเขียนสมการกำหนดระนาบที่ตัดผ่านจุด 3 จุด คือ $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ และ $\boldsymbol{r}$ นั้น สามารถแปลงไปสู่การเขียนสมการกำหนดระนาบที่ตัดผ่านจุด 1 จุดได้ โดยการกำหนดให้จุดใดจุดหนึ่งจากทั้ง 3 จุดที่ระนาบตัดผ่านเป็นจุดตั้งต้น และกำหนดทิศทางของระนาบ ด้วยเวคเตอร์จากจุดตั้งต้นไปสู่อีก 2 จุดที่เหลือ เช่น หากให้จุด $\boldsymbol{p}$ เป็นจุดตั้งต้น จะสามารถกำหนดทิศทางหนึ่งของระนาบจากจุด $\boldsymbol{p}$ ไปยังจุด $\boldsymbol{q}$ ได้ ด้วยเวคเตอร์ที่ลากจากจุด $\boldsymbol{p}$ ไปยังจุด $\boldsymbol{q}$ ซึ่งเท่ากับ $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$ และเช่นเดียวกันนี้ ทิศทางของระนาบที่เหลืออีกทิศทางหนึ่ง จากจุด $\boldsymbol{p}$ ไปยังจุด $\boldsymbol{r}$ สามารถกำหนดได้จากเวคเตอร์ $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}$ ดังนี้ หากใช้สมการระนาบในรูปแบบ $\boldsymbol{x}(s,t)$ ซึ่งลากผ่านจุด $\boldsymbol{p}$ ในทิศทาง $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$ และ $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}$ จะได้สมการที่อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(s,t) &= \boldsymbol{p} + s(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) + t(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}) \\ &= (1-s-t)\boldsymbol{p} + s\boldsymbol{q} + t\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

ซึ่งเท่ากับสมการกำหนดระนาบในรูปแบบที่สอง

การกำหนดระนาบด้วยทั้งสองวิธีข้างต้น เป็นการกำหนดระนาบด้วย**สมการแบบพาราเมตริก (parametric equation)** กล่าวคือ ทั้ง $\boldsymbol{x}(s,t) = \boldsymbol{p} + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$ และ $\wp(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}) = (1 - s - t)\boldsymbol{p} + s\boldsymbol{q} + t\boldsymbol{r}$ ต่างเป็นสมการที่ขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ $s, t \in \mathbb{R}$ ด้วยกันทั้งสองสมการ นอกเหนือจากสมการแบบพาราเมตริกแล้ว การกำหนดระนาบยังอาจทำได้ด้วย**สมการแบบไม่เป็นพาราเมตริก (nonparametric equation)** ด้วยการกำหนดจุดที่ระนาบตัดผ่าน 1 จุด และ**เวคเตอร์ปกติ (normal vector)** ซึ่งมีคุณสมบัติตั้งฉากกับทุกเวคเตอร์ที่อยู่บนระนาบนั้น ดังรูปที่ 4.9 (3) ในกรณีนี้ เวคเตอร์ปกติเปรียบได้กับเส้นที่บังคับความชันของระนาบ ให้เป็นไปตามทิศทางที่กำหนด โดยสำหรับระนาบที่ตัดผ่านจุด $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$ และเส้นจากจุด $\boldsymbol{p}$ ที่อยู่บนระนาบซึ่งเท่ากับ $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p} = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3)$ จากคุณสมบัติที่ว่าทุกเส้นบนระนาบจะตั้งฉากกับเวคเตอร์ปกติ $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ จะได้ว่า $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) = 0$ ซึ่งให้สมการกำหนดระนาบแบบไม่เป็นพาราเมตริก เท่ากับ[1]

$$a(x_1 - p_1) + b(x_2 - p_2) + c(x_3 - p_3) = 0$$

หรือ

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d, \;\; d = -(ap_1 + bp_2 + cp_3)$$

ตัวอย่างที่ 4.12 ระนาบใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่งตัดผ่านจุด $\boldsymbol{p} = (1, 2, 1)$ และมีเวคเตอร์ปกติ $\boldsymbol{n} = (2, 1, 1)$ สามารถกำหนดได้จากสมการ

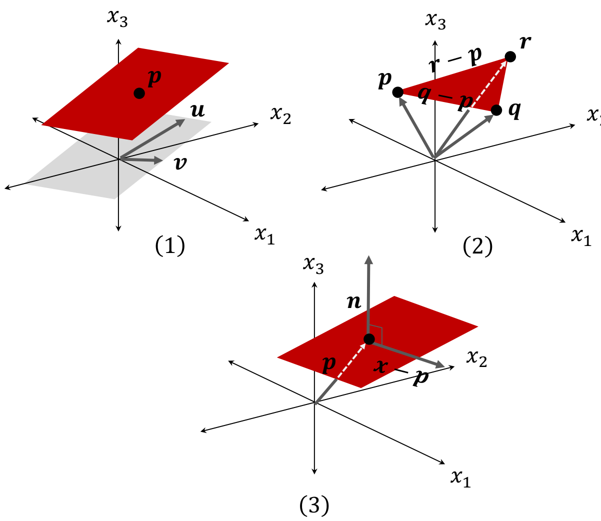
$$2(x_1 - 1) + 1(x_2 - 2) + 1(x_3 - 1) = 0$$

ซึ่งอยู่ในรูป

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

เมื่อ $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ $\square$

[1]อนึ่ง มีข้อสังเกตคือ สมการกำหนดระนาบในรูปแบบข้างต้น ไม่ขึ้นกับพารามิเตอร์ใดๆ ที่ใช้ย่อ ขยาย หรือปรับทิศทางของระนาบ ดังกรณีสมการแบบพาราเมตริก กล่าวคือ เมื่อกำหนดจุดที่ระนาบตัดผ่าน คือ $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$ และเวคเตอร์ปกติ $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ ที่บังคับระดับของระนาบ ให้เป็นไปตามคุณสมบัติที่กำหนดแล้ว สมการกำหนดระนาบ จะเป็นสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรที่ไม่มีค่าพารามิเตอร์ใดๆ



รูปที่ 4.9 ระนาบ (plane) (1) การกำหนดระนาบจากจุด 1 จุด คือ $\boldsymbol{p}$ ที่ชี้ไปยังทิศทาง 2 ทิศทาง คือ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ (2) การกำหนดระนาบจากจุด 3 จุด คือ $\boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{q}$ และ $\boldsymbol{r}$ ซึ่งเท่ากับการกำหนดระนาบจากจุด 1 จุด คือ $\boldsymbol{p}$ ที่ชี้ไปยังทิศทาง 2 ทิศทาง คือ คือ $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$ และ $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}$ (3) การกำหนดระนาบจากจุด 1 จุด คือ $\boldsymbol{p}$ และเวคเตอร์ปกติ (normal vector) 1 เส้น คือ $\boldsymbol{n}$ ซึ่งมีคุณสมบัติตั้งฉากกับทุกเส้นที่อยู่บนระนาบ

ตัวอย่างที่ 4.13 ระนาบใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่งตัดผ่านจุด $\boldsymbol{p} = (1, 2, 1)$ และมีเวคเตอร์ปกติ $\boldsymbol{n} = (1, 1, 1)$ กำหนดได้จากสมการ

$$1(x_1 - 1) + 1(x_2 - 2) + 1(x_3 - 1) = 0$$

ซึ่งอยู่ในรูป

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

สำหรับเวคเตอร์ปกติ $\boldsymbol{n} = (1, 1, 1)$ นั้น จะสังเกตได้ว่า $\boldsymbol{n}$ เป็นเวคเตอร์ปกติที่ลากผ่านจุดทุกจุด ใน $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ที่ $x_1 = x_2 = x_3$ ดังนี้ สมการกำหนดระนาบใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่งตัดผ่านจุด $\boldsymbol{p}$ และมีเวคเตอร์ปกติ $\boldsymbol{n} = (k, k, k)$ จึงควรเท่ากับสมการกำหนดระนาบ ที่ตัดผ่านจุด $\boldsymbol{p}$ และมีเวคเตอร์ปกติ $\boldsymbol{n} = (1, 1, 1)$ เช่นกัน ดังเห็นได้จากสมการกำหนดระนาบ

$$1(x_1 - 1) + 1(x_2 - 2) + 1(x_3 - 1) = 0$$

และสมการกำหนดระนาบ

$$k(x_1 - 1) + k(x_2 - 2) + k(x_3 - 1) = 0$$

ซึ่งเป็นสมการเดียวกัน □

ตัวอย่างที่ 4.14 ตัวอย่างที่ผ่านมาเป็นการหาสมการกำหนดระนาบที่ผ่านจุด 1 จุดโดยมีเวคเตอร์ปกติของระนาบที่ได้ถูกกำหนดมาแล้ว ในทางกลับกัน เราสามารถหาเวคเตอร์ปกติของระนาบใน $\mathbb{R}^3$ ที่ตัดผ่านจุด 3 จุดที่ได้ถูกกำหนดมาก่อนแล้วเช่นกัน เช่น ในการหาเวคเตอร์ปกติของระนาบที่ผ่านจุด 3 จุด คือ $\boldsymbol{p} = (1, 0, 1)$ $\boldsymbol{q} = (0, 2, 1)$ และ $\boldsymbol{r} = (1, 1, 0)$ เราสามารถกำหนดจุดใดจุดหนึ่ง เช่น $\boldsymbol{p}$ เป็นจุดตั้งต้น และให้เวคเตอร์ $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$ และ $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}$ คือเวคเตอร์ 2 เส้นบนระนาบที่ลากจากจุด $\boldsymbol{p}$ ไปยังจุด $\boldsymbol{q}$ และ $\boldsymbol{r}$ ตามลำดับ สมมติให้เวคเตอร์ปกติของระนาบนี้แทนด้วย $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ จากคุณสมบัติของการตั้งฉากของเวคเตอร์ จะได้ว่าทุกเส้นบนระนาบจะตั้งฉากกับเวคเตอร์ปกติ กล่าวคือ $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) = 0$ และ $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}) = 0$ ซึ่งภายหลังการแทนค่า จะได้ระบบสมการเชิงเส้น 2 สมการ 3 ตัวแปร คือ

$$\begin{aligned} -1a + 2b + 0c &= 0 \\ 0a + 1b - 1c &= 0 \end{aligned}$$

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นข้างต้นมีจำนวนไม่จำกัด ซึ่งให้เวคเตอร์ปกติของระนาบที่อยู่ในรูป

$$\boldsymbol{n} = (a, b, c) = k(2, 1, 1)$$

เมื่อ $k \in \mathbb{R}$ ทั้งนี้ พึงสังเกตว่าเราอาจกำหนดจุดใดจุดหนึ่งจากทั้ง 3 จุดนอกเหนือจากจุด $\boldsymbol{p}$ ที่มีเป็นจุดตั้งต้นก็ได้ เช่น หากกำหนดจุด $\boldsymbol{q}$ เป็นจุดตั้งต้น และให้เวคเตอร์ $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}$ และ $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}$ คือเวคเตอร์ 2 เส้นบนระนาบที่ลากจากจุด $\boldsymbol{q}$ ไปยังจุด $\boldsymbol{p}$ และ $\boldsymbol{r}$ ตามลำดับ จะได้ว่า $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) = 0$ และ $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}) = 0$ กล่าวคือ

$$\begin{aligned} 1a - 2b + 0c &= 0 \\ 1a - 1b - 1c &= 0 \end{aligned}$$

ซึ่งให้เวคเตอร์ปกติของระนาบที่เป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นข้างต้นในรูป

$$\boldsymbol{n} = (a, b, c) = k(2, 1, 1)$$

เมื่อ $k \in \mathbb{R}$ เช่นเดียวกัน $\square$

ตัวอย่างที่ 4.15 เวคเตอร์ปกติ $\boldsymbol{n}$ ของระนาบใน $\mathbb{R}^3$ ที่ตัดผ่านจุดสามจุดบนแกน คือ $(x_1, 0, 0)$ $(0, x_2, 0)$ และ $(0, 0, x_3)$ คือ $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติ

$$\begin{aligned} -ax_1 + bx_2 + c(0) &= 0 \\ -ax_1 + b(0) + cx_3 &= 0 \end{aligned}$$

ซึ่งให้เวคเตอร์ปกติของระนาบที่เป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นข้างต้นในรูป

$$\boldsymbol{n} = (a, b, c) = k\left(\frac{x_3}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, 1\right)$$

เมื่อ $k \in \mathbb{R}$ นอกจากนี้ ในกรณีเฉพาะของระนาบที่ตัดผ่านจุด $(x_1, 0, 0)$ $(0, x_2, 0)$ และ $(0, 0, x_3)$ เมื่อ $x_1 = x_2 = x_3$ เราสามารถเห็นได้โดยง่ายว่า $\boldsymbol{n} = k(1, 1, 1)$ เมื่อ $k \in \mathbb{R}$ คือ เวคเตอร์ปกติของระนาบนี้ $\square$

ตัวอย่างเรื่องสมการกำหนดระนาบซึ่งตัดไปใน $\mathbb{R}^3$ ข้างต้น สามารถขยายให้เป็นแนวคิดที่กว้าง

ขึ้น ในรูปของ**ระนาบบน (hyperplane)** ซึ่งจากก่อนหน้านี้ที่ว่า ระนาบใน $\mathbb{R}^3$ คือ แผ่นราบ $\mathbb{R}^2$ ซึ่งตัดไปใน $\mathbb{R}^3$ ในลักษณะเดียวกันนี้ ระนาบบนใน $\mathbb{R}^n$ จึงเป็น แผ่นราบ $\mathbb{R}^{n-1}$ ซึ่งตัดไปใน $\mathbb{R}^n$ โดยระนาบบนที่ลากผ่านจุด $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ ซึ่งมีเวคเตอร์ปกติ $\boldsymbol{n} = (a_1, \ldots, a_n)$ ที่ตั้งฉากกับทุกเส้นบนระนาบบนนี้ สามารถกำหนดได้ด้วยสมการที่อยู่ในรูป

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = d$$

โดยที่ $d = -\sum_{i=1}^{n} a_ip_i$

ตัวอย่างที่ 4.16 ใน $\mathbb{R}^2$ ระนาบบน คือ เส้นตรง $\mathbb{R}$ ที่ตัดไปใน $\mathbb{R}^2$ สำหรับระนาบบนใน $\mathbb{R}^2$ ซึ่งตัดผ่านจุดกำเนิด $\boldsymbol{p} = (0, 0)$ ซึ่งมีเวคเตอร์ปกติคือ $\boldsymbol{n} = (-1, 1)$ ระนาบบนหรือเส้นตรงนี้ สามารถกำหนดได้ด้วยสมการ

$$-x_1 + x_2 = 0$$

หรือ $x_1 = x_2$ ซึ่งเท่ากับเส้นทแยง 45° ที่ลากผ่านจุดกำเนิด ในลักษณะเดียวกันนี้ ระนาบบนที่ตัดไปใน $\mathbb{R}^3$ คือ แผ่นราบที่สามารถกำหนดได้ด้วยสมการ

$$a_1x_2 + a_2x_2 + a_3x_3 = d$$

เช่น หากให้ $a_1 = a_2 = d = 0$ และ $a_3 \neq 0$ สมการข้างต้น คือ $x_3 = 0$ จะให้ระนาบ $(x_1, x_2, 0)$ ซึ่งตัด $\mathbb{R}^3$ ผ่านจุดกำเนิด เสมือนว่าแบ่ง $\mathbb{R}^3$ เป็นสองส่วน คือ (x_1, x_2, x_3) เมื่อ $x_3 < 0$ และ (x_1, x_2, x_3) เมื่อ $x_3 > 0$ $\square$

ความเข้าใจเรื่องเส้น ระนาบ และระนาบบน สามารถใช้ประยุกต์ในการอธิบายระบบสมการเชิงเส้น และคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ในเชิงเรขาคณิตให้เห็นภาพได้ดียิ่งขึ้น ในกรณีระบบสมการเชิงเส้นซึ่งประกอบด้วย 2 ตัวแปร สมการแต่ละสมการเปรียบได้กับเส้นตรงแต่ละเส้น ที่ตัดไปใน $\mathbb{R}^2$ ดังนี้ ระบบสมการเชิงเส้นที่มี 2 ตัวแปรและ 1 สมการ เช่น

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

เมื่อ $a_1 = a_2 = 0$ และ $b \neq 0$ ซึ่งไม่สามารถแทนด้วยจุด หรือเส้นใดๆ ใน $\mathbb{R}^2$ ได้จึงไม่มีคำตอบ อย่างไรก็ตาม หากให้ $a_1 \neq 0$ หรือ $a_2 \neq 0$ แล้ว สมการข้างต้นสามารถสร้างเส้นตรงเส้นหนึ่งใน $\mathbb{R}^2$ ซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการที่มีคำตอบนับไม่ถ้วน คือ ทุกจุดบนเส้นตรงเสมอ และสำหรับ

ระบบสมการเชิงเส้นที่มี 2 ตัวแปรและ 2 สมการ เช่น

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

โดยหาก $a_{ij} = 0$ และ $b_i \neq 0$ เมื่อ $i, j = 1, 2$ จะเป็นกรณีที่สมการเส้นที่ i ไม่อาจถูกแทนด้วยเส้นตรงใดๆ ได้ จึงเป็นระบบสมการที่ไม่มีคำตอบ แต่ในกรณีที่ค่าสัมประสิทธิ์เป็นค่าอื่น เช่น หาก $a_{11} = ka_{21}, a_{12} = ka_{22}$ แต่ $b_1 \neq kb_2$ สมการทั้งสอง จะสร้างเส้นตรงสองเส้นซึ่งขนานกัน จึงเป็นระบบสมการที่ไม่มีคำตอบ แต่หาก $a_{11} = ka_{21}, a_{12} = ka_{22}$ และ $b_1 = kb_2$ สมการทั้งสอง จะสร้างเส้นตรงสองเส้นซึ่งทาบกัน จึงเป็นระบบสมการที่มีคำตอบนับไม่ถ้วน และหากค่าสัมประสิทธิ์เป็นค่าอื่น ที่ไม่เข้าเงื่อนไขใดที่ได้กล่าวมาแล้ว สมการทั้งสองจะสร้างเส้นตรงสองเส้นซึ่งตัดกันเพียงจุดเดียว จึงเป็นระบบสมการที่มีคำตอบหนึ่งชุด

สำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่มี 2 ตัวแปรและ สมการมากกว่า 2 สมการ เช่น

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &= b_3 \end{aligned}$$

ระบบสมการนี้อาจไม่มีคำตอบในสามกรณี คือ หากสมการใดไม่อาจสร้างเส้นตรงใดๆ บน $\mathbb{R}^2$ ได้ หรือระบบสมการสร้างเส้นตรง 3 เส้นที่ขนานกัน หรือ ระบบสมการสร้างเส้นตรง 3 เส้นที่มีความชันต่างกัน แต่ไม่ได้ตัดกันที่จุดเดียวกัน ระบบสมการนี้อาจมีคำตอบชุดเดียวใน 2 กรณี คือ ระบบสมการสร้างเส้นตรง 3 เส้นที่มีความชันต่างกันและตัดกันที่จุดเดียวกันทั้งหมด หรือ ระบบสมการสร้างเส้นตรง 2 เส้นที่ทาบกัน และตัดกับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งที่มีความชันต่างกับเส้นตรง 2 เส้นนี้ และในท้ายที่สุด ระบบสมการนี้อาจมีคำตอบมากมายไม่จำกัด ซึ่งเกิดขึ้นได้ในกรณีที่เส้นตรงทั้ง 3 เส้น ทาบกันทั้งหมด

ในกรณีระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร แต่ละสมการในระบบเปรียบได้กับระนาบที่ตัดไปใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่งให้คำตอบในลักษณะที่สอดคล้องกับการวิเคราะห์คำตอบ จากลักษณะการตัดกันของเส้นตรงในกรณีระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร โดยอาจไม่มีคำตอบในสามกรณี คือ หากสมการใดไม่อาจสร้างระนาบใดๆ ใน $\mathbb{R}^3$ ได้ หรือระบบสมการสร้างระนาบแผ่นใดแผ่นหนึ่งที่ขนานกัน หรือ ระบบสมการสร้างระนาบ 3 แผ่นที่แม้ไม่ได้ขนานกันทั้งหมด แต่ไม่มีจุดใดที่เป็นจุดตัดร่วมกัน ของระนาบทั้งสามแผ่น ระบบสมการนี้อาจมีคำตอบมากมายไม่จำกัดในสองกรณี คือ หากระนาบทุกแผ่นตัดกันเป็นเส้นตรง หรือระนาบทุกแผ่นทาบกัน และในท้ายที่สุด ระบบสมการนี้อาจมีคำตอบชุดเดียว

ซึ่งเกิดขึ้นได้ ในกรณีที่ระนาบทุกแผ่นมีจุดตัดร่วมกันเพียงจุดเดียว[1]

4.5 ปริภูมิและปริภูมิย่อย

ปริภูมิ (space) คือ เซตของวัตถุที่มีคุณสมบัติเฉพาะบางประการ ซึ่งในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะ**ปริภูมิเชิงเส้น (linear space)** หรือ**ปริภูมิเวคเตอร์ (vector space)** ดังนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 4.5 $\mathscr{V}$ คือ**ปริภูมิเชิงเส้น**หรือ**ปริภูมิเวคเตอร์** หากสำหรับทุกเวคเตอร์ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathscr{V}$

1. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \in \mathscr{V}$
2. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
3. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$
4. มีเวคเตอร์ $\mathbf{0} \in \mathscr{V}$ ซึ่ง $\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$
5. มีเวคเตอร์ $-\boldsymbol{u} \in \mathscr{V}$ ซึ่ง $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$
6. $k\boldsymbol{u} \in \mathscr{V}$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{R}$
7. $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{R}$
8. $(k + l)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}$ สำหรับทุก $k, l \in \mathbb{R}$
9. $(kl)\boldsymbol{u}) = k(l\boldsymbol{u})$
10. $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}1 = \boldsymbol{u}$ สำหรับค่า $1 \in \mathbb{R}$

คุณสมบัติห้าข้อแรกเป็นคุณสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวก ส่วนคุณสมบัติห้าข้อหลังเป็นคุณสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการคูณ ทั้งนี้ หากได้เปรียบนิยามของปริภูมิเชิงเส้นข้างต้น กับนิยามของปริภูมิทั่วไปแล้ว จะเห็นได้ว่าในกรณีของปริภูมิเชิงเส้นนั้น เซตของวัตถุที่พิจารณา คือ เซตของเวคเตอร์และคุณสมบัติเฉพาะที่กำหนดให้สอดคล้องกับปริภูมิเชิงเส้นนั้น ได้แก่ คุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกและการคูณข้างต้น ทั้งนี้ คุณสมบัติข้อที่ 1 และข้อที่ 6 ข้างต้น มีชื่อเรียกเป็นการเฉพาะว่า **คุณ-**

---

[1] ผู้สนใจสามารถทดลองหาค่าของสัมประสิทธิ์ในระบบสมการข้างต้นทั้งในกรณี 2 และ 3 ตัวแปร ที่สอดคล้องกับรูปแบบของคำตอบในลักษณะต่าง ๆ ได้ ในแบบฝึกหัดท้ายบท

สมบัติปิด (closure) โดยคุณสมบัติข้อที่ 1 ได้แก่คุณสมบัติปิดของการบวก และคุณสมบัติข้อที่ 6 ได้แก่คุณสมบัติปิดของการคูณ คุณสมบัติปิดทั้งสองประเภท เป็นคุณสมบัติสำคัญที่เซตบางเซตมักขาดคุณสมบัตินี้ และทำให้ขาดคุณสมบัติการเป็นปริภูมิเชิงเส้น

ตัวอย่างที่ 4.17 จากนิยามข้างต้น $\mathbb{R}^n$ เป็นปริภูมิเชิงเส้น เนื่องจากทุกเวคเตอร์ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ สอดคล้องกับคุณสมบัติทั้ง 8 ข้อข้างต้นทุกประการ อย่างไรก็ตาม $\mathbb{R}^n_{++}$ ไม่เป็นปริภูมิเชิงเส้น เนื่องจากไม่มีเวคเตอร์ $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n_{++}$ ซึ่ง $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ หรือเวคเตอร์ $-\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n_{++}$ ซึ่ง $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ สำหรับทุกเวคเตอร์ $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n_{++}$ นอกจากนี้ $\mathbb{R}^n_+$ ไม่เป็นปริภูมิเชิงเส้น เนื่องจากแม้จะมีเวคเตอร์ $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n_+$ ซึ่ง $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ แต่ไม่มีเวคเตอร์ $-\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n_+$ ซึ่ง $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ สำหรับทุกเวคเตอร์ $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n_+$ □

ตัวอย่างที่ 4.18 สมมติให้ $\mathscr{P}$ คือเซตของเลขพหุนาม โดยที่สำหรับทุก $p(t) \in \mathscr{P}$

$$p(t) = \sum_{t=1}^{s} a_s t^s = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_s t^s$$

สำหรับ $s = 1, 2, \ldots$ กรณีนี้สามารถเห็นได้โดยง่ายว่า $\mathscr{P}$ มีคุณสมบัติสอดคล้องกับคุณสมบัติข้อที่ 1-2 และ 4-10 สำหรับคุณสมบัติข้อที่ 3 นั้น หากให้ $a_0 = 0$ สำหรับ $p(0)$ จะได้ $p(0) = 0 \in \mathscr{P}$ ซึ่งมีคุณสมบัติสอดคล้องกับคุณสมบัติข้อที่ 3 คือ $p(t) + 0 = p(t)$ ดังนี้ $\mathscr{P}$ จึงเป็นปริภูมิเชิงเส้น □

ตัวอย่างที่ 4.19 สมมติให้ $\mathscr{M}$ คือเซตของเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ โดยที่ $a_{ij} \in \mathbb{R}$ เมื่อ a_{ij} คือค่าในแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ สำหรับทุก $\boldsymbol{A} \in \mathscr{M}$ ในกรณีนี้ $\mathscr{M}$ เป็นปริภูมิเชิงเส้น เนื่องจากมีคุณสมบัติสอดคล้องกับคุณสมบัติทั้ง 10 ข้อตามนิยามที่ 4.3 □

ตัวอย่างที่ 4.20 สมมติให้ $\mathscr{V} = \{(k, x_2, x_3) | x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ เมื่อ k คือค่าคงที่ ในกรณีนี้ $\mathscr{V}$ เป็นปริภูมิเชิงเส้นเฉพาะเมื่อ $k = 0$ และไม่เป็นปริภูมิเชิงเส้นสำหรับทุกค่า $k \neq 0$ เนื่องจากหาก $k \neq 0$ แล้ว จะไม่มี $\boldsymbol{u} = (k, x_2, x_3) \in \mathscr{V}$ ใดที่มีคุณสมบัติคือ $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ สำหรับทุก $\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$ และไม่มี $-\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$ ใดที่มีคุณสมบัติคือ $-\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} = (0, 0, 0)$ นอกจากนี้ หาก $k \neq 0$ เซต $\mathscr{V}$ ยังขาดคุณสมบัติปิดทั้งการบวกและการคูณ เช่น สำหรับ $\boldsymbol{u} = (k, a, b) \in \mathscr{V}$ และ $\boldsymbol{v} = (k, c, d) \in \mathscr{V}$ หาก $k \neq 0$ แล้ว จะได้ว่า

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (2k, a + c, b + d) \notin \mathscr{V}$$

ซึ่งขัดกับคุณสมบัติปิดของการบวก นอกจากนี้ สำหรับทุกค่า $l \neq 0$

$$l\boldsymbol{u} = (lk, la, lb) \notin \mathscr{V}$$

ซึ่งขัดกับคุณสมบัติปิดของการคูณ $\square$

จากนิยามของปริภูมิข้างต้น สามารถนิยาม**ปริภูมิย่อย (subspace)** ได้ดังนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 4.6 $\mathscr{V}_0 \subset \mathscr{V}$ เป็น**ปริภูมิย่อย (subspace)** ของปริภูมิเชิงเส้น $\mathscr{V}$ ก็ต่อเมื่อ $\mathscr{V}_0$ มีคุณสมบัติทั้ง 8 ข้อของปริภูมิเชิงเส้นตามนิยามที่ 4.5

ในทางเศรษฐศาสตร์และการเงิน ปริภูมิย่อยที่สำคัญ คือ ปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.21 จากตัวอย่างที่ 4.20 $\mathbb{R}^3$ เป็นปริภูมิเชิงเส้นเนื่องจาก $\mathbb{R}^3$ เป็นเซตที่มีคุณสมบัติครบทั้ง 10 ข้อตามนิยามที่ 4.3 อย่างไรก็ตาม $\mathscr{V}_0 = \{(k, x_2, x_3) | x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ เมื่อ k คือค่าคงที่ ถือเป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$ ก็ต่อเมื่อ $k = 0$ เนื่องจาก $\mathscr{V}_0$ มีคุณสมบัติครบทั้ง 10 ข้อตามนิยามที่ 4.3 เฉพาะในกรณีที่ $k = 0$ ดังที่ได้พิจารณาแล้วในตัวอย่างที่ 4.20 $\square$

ตัวอย่างที่ 4.22 $\mathscr{V}_0 = \{(a, b, c, a) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^4$ เนื่องจาก $\mathscr{V}_0$ มีคุณสมบัติครบทั้ง 10 ข้อตามนิยามที่ 4.3 สำหรับคุณสมบัติปิดของการบวก และการคูณนั้น หากพิจารณา $\boldsymbol{u} = (a, b, c, a) \in \mathscr{V}_0$ และ $\boldsymbol{v} = (d, e, f, d) \in \mathscr{V}_0$ จะเห็นได้ว่า

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (a + d, b + e, c + f, a + d) \in \mathscr{V}_0$$

และ

$$k\boldsymbol{u} = (ka, kb, kc, ka) \in \mathscr{V}_0$$

ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติปิดของการบวก และการคูณตามลำดับ $\square$

ตัวอย่างที่ 4.23 แกนของ $\mathbb{R}^n$ หรือ $\mathscr{V}_0 = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_1 = \ldots = x_n\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ $\square$

ตัวอย่างที่ 4.24 $\mathscr{V}_0 = \{\mathbf{0}\}$ เมื่อ $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ สำหรับกรณีนี้ มีข้อควรสังเกต คือ $\mathscr{V}_0$ เป็นเซตที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียว คือ $\mathbf{0}$ ซึ่งหากให้ $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} = \mathbf{0}$ แล้ว จะเห็นได้ว่า $\mathscr{V}_0 = \{\mathbf{0}\}$ มีคุณสมบัติครบทั้ง 10 ข้อตามนิยามที่ 4.3 $\square$

แนวคิดเรื่องปริภูมิเปรียบได้กับการขยายแนวคิดเรื่องจุด เส้น และระนาบ ให้กว้างขวางขึ้นเรื่อยๆ เช่น หากเปรียบปริภูมิใน $\mathbb{R}^3$ กับห้องที่มีขนาดความกว้าง ความยาว และความสูงที่ไม่จำกัดห้องหนึ่ง ระนาบก็อาจเปรียบได้กับกระดาษแผ่นหนึ่งในห้องนี้ ที่มีขนาดไม่จำกัด เส้นก็อาจเปรียบได้กับเข็มเล่มหนึ่งที่มีความยาวไม่จำกัด และจุดคือลูกปิงปองที่เล็กที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ในห้อง อย่างไรก็ตาม ความสำคัญของแนวคิดเรื่องปริภูมิไม่ได้จำกัดแต่เพียงข้างต้นเท่านั้น หากยังเป็นแนวคิดที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่ง ในการนิยามเรื่องเส้นและระนาบด้วยเซตขยาย (spanning set) ตลอดจนแนวคิดเรื่องฐาน (basis) และมิติ (dimension) ดังจะได้พิจารณาต่อไปนี้

นิยามที่ 4.7 เส้นที่ถูกขยาย (spanning line) หรือถูกสร้างจากเวคเตอร์ $\boldsymbol{v}$ คือ

$$\mathscr{S}(\boldsymbol{v}) = \{r\boldsymbol{v} : r \in \mathbb{R}\} \quad \blacksquare$$

กล่าวคือ เส้นที่ถูกขยายจากเวคเตอร์ $\boldsymbol{v}$ จะสร้างเส้นตรงที่ทาบไปกับ $\boldsymbol{v}$ ซึ่งลากผ่านจุดกำเนิด โดยมีค่าคงที่ r เป็นค่าสัมประสิทธิ์ที่ใช้ในการขยาย ย่อ หรือเปลี่ยนทิศทางของเส้นตามที่ต้องการ แนวคิดตามนิยามข้างต้น ยังสามารถขยายให้ครอบคลุมยิ่งขึ้น ด้วยส่วนผสมเชิงเส้นของเวคเตอร์ดังนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 4.8 เซตที่ถูกขยาย (spanning set) หรือถูกสร้างโดยเวคเตอร์ $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ คือ

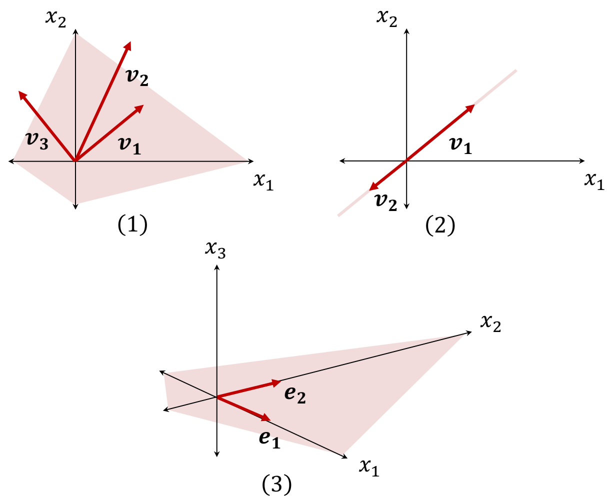
$$\mathscr{S}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) = \{r_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + r_k\boldsymbol{v}_k : r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}\}$$

และหากให้ $\mathscr{V} = \mathscr{S}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ สามารถเรียกได้ว่า $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ ขยาย (span) หรือสร้าง (generate) $\mathscr{V}$ $\blacksquare$

อาทิ หากให้ $\mathscr{S}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \{r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 : r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}$ $\boldsymbol{v}_1$ และ $\boldsymbol{v}_2$ จะสร้างหรือขยายระนาบ หาก $\boldsymbol{v}_1$ และ $\boldsymbol{v}_2$ เป็นอิสระระหว่างกัน และสร้างหรือขยายเส้น ตามนิยามที่ 4.8 หาก $\boldsymbol{v}_1$ และ $\boldsymbol{v}_2$ ไม่เป็นอิสระระหว่างกัน อนึ่ง ในกรณีนี้ เส้นที่ถูกสร้างหรือขยายขึ้นนั้น สามารถขยายได้โดย $\boldsymbol{v}_1$ หรือ $\boldsymbol{v}_2$ อย่างใดอย่างหนึ่ง โดยไม่จำเป็นต้องใช้ทั้ง $\boldsymbol{v}_1$ และ $\boldsymbol{v}_2$

จากนิยามที่ 4.8 การพิจารณาว่า $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ สร้าง $\mathscr{V}$ หรือไม่นั้น อาจพิจารณาว่า หากทุกค่าใน $\mathscr{V}$ สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของส่วนผสมเชิงเส้นของ $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ ได้ ก็ถือว่า $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ สร้าง $\mathscr{V}$ ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.25 เวคเตอร์ $\boldsymbol{v}_1 = (x_1)$ เมื่อ $x_1 \neq 0$ สามารถสร้างเส้นจำนวนจริง $\mathbb{R}$ ได้ เนื่องจาก



รูปที่ 4.10 เซตขยาย (spanning set) (1) เวคเตอร์ $\boldsymbol{v}_1$ $\boldsymbol{v}_2$ และ $\boldsymbol{v}_3$ ทั้งสามเส้นต่างเป็นอิสระระหว่างกัน การสร้าง $\mathbb{R}^2$ สามารถทำได้ จากเวคเตอร์เพียงสองเส้นที่ไม่ซ้ำกัน จาก $\boldsymbol{v}_1$ $\boldsymbol{v}_2$ และ $\boldsymbol{v}_3$ เท่านั้น โดยไม่จำเป็นต้องอาศัยเวคเตอร์ทั้งสามเส้น จากรูป $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ หรือ $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ หรือ $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3)$ ต่างเป็นฐานของ $\mathbb{R}^2$ ด้วยกันทั้งสิ้น (2) เวคเตอร์ $\boldsymbol{v}_1$ และ $\boldsymbol{v}_2$ ซึ่งไม่เป็นอิสระระหว่างกัน ไม่สามารถสร้าง $\mathbb{R}^2$ ได้ แต่เวคเตอร์ $\boldsymbol{v}_1$ หรือ $\boldsymbol{v}_2$ ตัวใดตัวหนึ่ง จะสามารถสร้างเส้นตรงซึ่งทาบกับ $\boldsymbol{v}_1$ และ $\boldsymbol{v}_2$ ได้ (3) ระนาบ (x_1, x_2) ซึ่งตัดปริภูมิ $\mathbb{R}^3$ สามารถสร้างได้จากเวคเตอร์ $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$ และ $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$ ซึ่งเป็นอิสระระหว่างกัน

จำนวนจริงทุกค่า สามารถแสดงในรูปของ r_1x_1 ได้เสมอ เช่นเดียวกันนี้ $\boldsymbol{v}_1 = (x_1)$ และ $\boldsymbol{v}_2 = (x_2)$ เมื่อ x_1 หรือ x_2 ตัวใดตัวหนึ่งไม่เท่ากับศูนย์ สามารถสร้างเส้นจำนวนจริง $\mathbb{R}$ ได้เช่นกัน อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่ x_1 และ x_2 ทั้งคู่ไม่เท่ากับศูนย์นั้น เส้นจำนวนจริง $\mathbb{R}$ สามารถถูกสร้างได้จากเวคเตอร์ตัวใดตัวหนึ่ง โดยไม่ต้องใช้ทั้งสองตัวก็ได้ ซึ่งในกรณีนี้ ถือได้ว่าเวคเตอร์ตัวใดตัวหนึ่งไม่จำเป็น (redundant) ในการสร้าง $\mathbb{R}$ และเช่นเดียวกันนี้ $\boldsymbol{v}_1$ และ $\boldsymbol{v}_2$ ซึ่งเป็นอิสระกันสามารถสร้าง $\mathbb{R}^2$ ได้ ดังรูปที่ 4.10 (1) แต่หาก $\boldsymbol{v}_1$ และ $\boldsymbol{v}_2$ ไม่เป็นอิสระกันดังรูปที่ 4.10 (2) จะไม่สามารถใช้สร้าง $\mathbb{R}^2$ ได้ $\square$

ตัวอย่างที่ 4.26 เส้นตรงที่ลากผ่านจุดกำเนิดใน $\mathbb{R}^n$ สามารถสร้างขึ้นได้จากเวคเตอร์ใดๆ ที่ทาบกับเส้นตรงเส้นนั้น อาทิ แกน x_2 จาก $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ สามารถสร้างขึ้นได้จาก $\boldsymbol{v}_1 = (0, 1, \ldots, 0)$ เนื่องจากทุกจุดบนแกน x_2 คือ $(0, x, \ldots, 0)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $r_1\boldsymbol{v}_1$ เมื่อ $x = r_1$ $\square$

ตัวอย่างที่ 4.27 ระนาบ $(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$ คือ ระนาบที่ตัดปริภูมิ $\mathbb{R}^3$ ซึ่งสามารถสร้างได้จาก $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$ และ $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$ เนื่องจาก

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

เมื่อ $r_1 = x_1$ และ $r_2 = x_2$ ดังรูปที่ 4.10 (3) $\square$

ตัวอย่างที่ 4.28 เวคเตอร์ $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ ซึ่งมีขนาด $n \times 1$ สามารถสร้างปริภูมิ $\mathbb{R}^n$ ได้ เนื่องจาก $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $r_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + r_n\boldsymbol{e}_n$ ได้ อนึ่ง $\boldsymbol{e}_k$ มีชื่อหนึ่งที่เป็นที่นิยมเรียกกันโดยทั่วไปว่า เวคเตอร์พื้นฐาน (elementary vector) เนื่องจากสามารถใช้สร้างปริภูมิขนาดที่ต้องการได้โดยง่าย $\square$

ดังที่ได้เห็นจากตัวอย่างที่ 4.25 แล้วว่า ทั้ง $\boldsymbol{v}_1 = (x_1)$ เมื่อ $x_1 \neq 0$ และ $\boldsymbol{v}_1 = (x_1)$ และ $\boldsymbol{v}_2 = (x_2)$ เมื่อ $x_1 \neq 0$ หรือ $x_2 \neq 0$ ต่างสามารถขยายเส้นจำนวนจริง $\mathbb{R}$ ได้เช่นกัน อย่างไรก็ตาม การสร้าง $\mathbb{R}$ จาก $\mathscr{S}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ นั้น ถือได้ว่าเป็นการสร้าง $\mathbb{R}$ ที่ไม่มีประสิทธิภาพ เมื่อเทียบกับการสร้าง $\mathbb{R}$ จาก $\mathscr{S}(\boldsymbol{v}_1)$ ซึ่งใช้เวคเตอร์เท่าที่จำเป็นในการสร้าง $\mathbb{R}$ แนวคิดเรื่องการสร้างเซตหรือขยายเซตอย่างมีประสิทธิภาพ โดยใช้เวคเตอร์เท่าที่จำเป็นดังนี้ คือ แนวคิดเรื่องฐานของเซตดังสรุปได้ในนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 4.9 สมมติให้ $\mathscr{V} = \ell(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)$ คือเซตที่ถูกสร้างโดย $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ เมื่อ $\boldsymbol{v}_i$ คือเวคเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ ดังนี้ $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$ คือ**ฐาน (basis)** ของ $\mathscr{V}$ หาก (1) $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$ สร้าง $\mathscr{V}$ ได้ และ (2) $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$ เป็นอิสระระหว่างกัน ■

จากนิยามข้างต้น ฐานของ $\mathscr{V}$ คือ กลุ่มเวคเตอร์เท่าที่จำเป็นต้องใช้ ในการสร้าง $\mathscr{V}$ โดยในกรณีนี้ เวคเตอร์คู่ใดที่ไม่เป็นอิสระระหว่างกัน ย่อมถือเป็นเวคเตอร์ที่ไม่จำเป็นในการสร้าง $\mathscr{V}$ ซึ่งสามารถตัดออกให้เหลือเพียงตัวเดียวได้[1] อนึ่ง จากทฤษฎีบท 4.6 ที่ว่าเวคเตอร์ $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ ใน $\mathbb{R}^n$ จะไม่เป็นอิสระกันเสมอหาก $m > n$ การสร้าง $\mathscr{V}$ ที่ถูกขยายจาก $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ เมื่อ $\boldsymbol{v}_i$ คือเวคเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ จึงไม่จำเป็นต้องใช้เวคเตอร์มากเกินกว่า m เวคเตอร์

ตัวอย่างที่ 4.28 กลุ่มเวคเตอร์ที่ประกอบกันขึ้นเป็นฐานของปริภูมิ $\mathbb{R}^n$ กลุ่มหนึ่งได้แก่ $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ เมื่อ $\boldsymbol{e}_k$ คือเวคเตอร์พื้นฐานขนาด $n \times 1$ ที่มีค่าเท่ากับ 1 ที่ตำแหน่ง k และมีค่าเท่ากับ 0 ที่ตำแหน่ง $j \neq k$ กลุ่มเวคเตอร์พื้นฐาน ซึ่งประกอบกันขึ้นเป็นฐานของปริภูมิเช่นนี้ มีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า **ฐานโดยบัญญัติ (canonical basis)** เนื่องจากเป็นฐานแบบพื้นฐานที่สามารถเห็นได้โดยง่ายว่าสามารถประกอบขึ้นเป็นปริภูมิ $\mathbb{R}^n$ ทั้งนี้ มีข้อควรสังเกตคือ ฐานของปริภูมิไม่ได้มีอยู่เพียงชุดเดียวเท่านั้น อีกทั้งไม่จำเป็นต้องเป็นฐานโดยบัญญัติเท่านั้น กล่าวคือ เวคเตอร์ขนาด $n \times 1$ จำนวน n เวคเตอร์ที่ต่างเป็นอิสระระหว่างกัน สามารถเป็นฐานของปริภูมิ $\mathbb{R}^n$ ได้ทั้งสิ้น เช่น ในกรณี $\mathbb{R}^2$ เวคเตอร์ 2 เส้น เช่น $\boldsymbol{u}_1 = (1, 1)$ และ $\boldsymbol{u}_2 = (1, 2)$ ซึ่งเป็นอิสระระหว่างกัน สามารถประกอบกันเป็นฐานของปริภูมิ $\mathbb{R}^2$ ได้ เนื่องจากสามารถแสดงทุกค่า $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ให้อยู่ในรูป

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ได้เสมอ ซึ่งจากการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ทั้งนี้ เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ข้างต้นจะมีอินเวอร์สเสมอ เนื่องจากแต่ละคอลัมน์ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์

---

[1] นิยามที่ 4.9 มีนัยยะที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดเรื่องประสิทธิภาพในทางเศรษฐศาสตร์อย่างน่าสนใจ กล่าวคือ จากนิยามเรื่องประสิทธิภาพในทางเศรษฐศาสตร์ ซึ่งหมายถึงการสามารถบรรลุเป้าหมายที่กำหนด โดยใช้ทรัพยากรน้อยที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ คุณสมบัติของฐานข้อที่ (1) ที่ว่า $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$ จะต้องบรรลุเป้าหมายในการสร้าง $\mathscr{V}$ ได้ และคุณสมบัติข้อที่ (2) ที่ว่า $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$ เป็นอิสระระหว่างกัน คือการใช้เวคเตอร์เท่าที่จำเป็นการสร้าง $\mathscr{V}$ จึงสอดคล้องกับหลักประสิทธิภาพในทางเศรษฐศาสตร์เป็นอย่างดี

ต่างเป็นอิสระระหว่างกัน $\square$

แนวคิดเรื่องฐานของเซตในปริภูมิข้างต้น สามารถใช้ในอธิบายแนวคิดเรื่องมิติได้อย่างเป็นระบบ ดังนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 4.10 สมมติให้ $\mathscr{V} = \mathscr{S}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ คือ เซตที่ถูกสร้างโดย $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ **มิติ (dimension)** ของ $\mathscr{V}$ หรือ dim$(\mathscr{V})$ คือ จำนวนเวคเตอร์ใน $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ ที่เป็นอิสระระหว่างกัน กล่าวคือ มิติ คือ จำนวนเวคเตอร์ที่ประกอบกันขึ้นเป็นฐานของ $\mathscr{V}$ $\blacksquare$

4.6 ปริภูมิแถวและปริภูมิคอลัมน์

ความเข้าใจเกี่ยวกับปริภูมิ ปริภูมิย่อย เซตที่ถูกสร้างขึ้นจากเวคเตอร์ ฐาน และมิติ ข้างต้น สามารถประมวลเข้าด้วยกัน และเชื่อมโยงกับเรื่องอันดับ และการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ด้วยแนวคิดเรื่องปริภูมิแถว และปริภูมิคอลัมน์ของเมตริกซ์ ดังนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 4.10 ปริภูมิแถว (row space) ของ $\boldsymbol{A}$ คือ

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = \mathscr{S}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$$

เมื่อ $\boldsymbol{A}$ คือ เมตริกซ์ขนาด $m \times n$ ที่มีแถวเท่ากับ $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$ $\blacksquare$

จากนิยามข้างต้น จะเห็นได้ว่า ปริภูมิแถวของเมตริกซ์ คือ เซตที่ถูกสร้างจากแถวของเมตริกซ์นั้น และจากที่ $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = \mathscr{S}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$ เมื่อ $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$ เซตที่ถูกสร้างซึ่งเป็นส่วนผสมเชิงเส้น ของกลุ่มเวคเตอร์จากจุดกำเนิด จึงเป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเชิงเส้นเสมอ ทั้งนี้ สามารถสรุปความสัมพันธ์ระหว่างอันดับของเมตริกซ์ และปริภูมิแถวได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.8 สำหรับเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ขนาด $m \times n$ ที่มีแถวคือ $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$ จะได้ว่า

$$\text{dim}(\mathscr{R}(\boldsymbol{A})) = \rho(\boldsymbol{A})$$

เมื่อ dim$(\mathscr{R}(\boldsymbol{A}))$ คือ มิติของปริภูมิแถวของ $\boldsymbol{A}$ และ $\rho(\boldsymbol{A})$ คือ อันดับของ $\boldsymbol{A}$ $\blacksquare$

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4.8 นั้น สมมติให้ $\boldsymbol{A}_r$ แทนเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปของการเรียงลำดับ จากนิยามของอันดับของ $\boldsymbol{A}$ ที่ว่า $\rho(\boldsymbol{A})$ เท่ากับจำนวนแถวของ $\boldsymbol{A}_r$ ที่ไม่ได้ประกอบด้วยค่าศูนย์ทั้งหมด ดังนี้ หากพิสูจน์ได้ว่า (1) $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = \mathscr{R}(\boldsymbol{A}_r)$ และ (2) แต่ละแถวของ $\boldsymbol{A}_r$

ที่ไม่ได้ประกอบด้วยค่าศูนย์ทั้งหมด เป็นอิสระระหว่างกัน จะสามารถสรุปได้ว่า $\dim(\mathscr{R}(\boldsymbol{A})) = \rho(\boldsymbol{A})$ ตามทฤษฎีบทข้างต้น

การพิสูจน์ข้อเท็จจริงข้อแรกที่ว่า $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = \mathscr{R}(\boldsymbol{A}_r)$ เริ่มจากการพิจารณาว่า การจัดการแถวพื้นฐาน เช่น การสลับแถว หรือการนำเอาค่าคงที่คูณกับทุกค่าในแถวเดียวกัน หรือการนำเอาค่าคงที่คูณกับทุกค่าในแถวหนึ่ง แล้วนำไปรวมกับอีกแถวหนึ่ง ย่อมไม่ส่งผลให้ปริภูมิแถวของเมตริกซ์หรือเซตที่ถูกสร้างจากส่วนผสมเชิงเส้น จากแถวของเมตริกซ์ต่างไปจากเดิม[1] เช่น หากให้ $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ ซึ่งมี

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = \mathscr{S}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = r_1\boldsymbol{a}_1 + r_2\boldsymbol{a}_2 + r_3\boldsymbol{a}_3$$

หากให้ $\boldsymbol{A}_r = (\boldsymbol{a}_1 + k\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2)$ จะได้

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}(\boldsymbol{A}_r) &= \mathscr{S}(\boldsymbol{a}_1 + k\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2) \\
&= s_1(\boldsymbol{a}_1 + k\boldsymbol{a}_2) + s_2\boldsymbol{a}_3 + s_3\boldsymbol{a}_2 \\
&= s_1\boldsymbol{a}_1 + (s_1k + s_3)\boldsymbol{a}_2 + s_2\boldsymbol{a}_3 \\
&= \mathscr{R}(\boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

เมื่อ $s_1 = r_1, s_2 = r_3, s_3 = r_2 - r_1k$ เป็นต้น

ในการพิสูจน์ข้อเท็จจริงส่วนที่สอง สมมติให้ $\boldsymbol{A}_r$ อยู่ในรูป

$$\boldsymbol{A}_r = \begin{pmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & a^*_{13} & \dots & a^*_{1j} & \dots & a^*_{1n} \\ 0 & a^*_{22} & a^*_{23} & \dots & a^*_{2j} & \dots & a^*_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a^*_{ij} & \dots & a^*_{in} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^*_1 \\ \boldsymbol{a}^*_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^*_i \\ \mathbf{0}_{(m-i)\times n} \end{pmatrix}$$

เมื่อ $\mathbf{0}$ มีขนาด $(m-1)\times 1$ และ $\mathbf{0}_{(m-i)\times n}$ มีขนาด $(m-1)\times n$ จากนิยามของความเป็นอิสระกันเชิงเส้น แต่ละแถวของ $\boldsymbol{A}_r$ ซึ่งไม่ได้ประกอบด้วยศูนย์ทั้งหมด คือ $\boldsymbol{a}^*_1, \dots, \boldsymbol{a}^*_i$ จะเป็นอิสระกัน

[1]จากนิยามของส่วนผสมเชิงเส้นที่เราสามารถปรับค่าสัมประสิทธิ์ในส่วนผสมเชิงเส้นหนึ่ง ให้เท่ากับค่าสัมประสิทธิ์ในอีกส่วนผสมเชิงเส้นหนึ่งได้เสมอ

เมื่อ

$$c_1\boldsymbol{a}_1^* + c_2\boldsymbol{a}_2^* + \ldots + c_i\boldsymbol{a}_i^* = \mathbf{0}_{n\times 1}$$

เฉพาะเมื่อ $c_1 = \ldots = c_i = 0$ เท่านั้น จากระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น ซึ่งประกอบด้วย n สมการและ i ตัวแปร และจากนิยามของ $\boldsymbol{A}_r$ ที่ว่าทุกค่าที่อยู่ด้านล่างของจุดหมุน จะต้องเท่ากับศูนย์เสมอ จะได้ว่าสมการแรกจะอยู่ในรูป

$$c_1 a_{11}^* + c_2 0 + \ldots + c_i 0 = 0$$

ซึ่งให้ค่า c_1 สำหรับ $a_{11}^* \neq 0$ และเช่นเดียวกันสมการที่สองซึ่งอยู่ในรูป $c_2a_{22}^* + c_3 0 + \ldots + c_i 0 = 0$ จะให้ค่า $c_2^* = 0$ จากนั้นเมื่อแทนค่า $c_1^* = \ldots = c_{i-1}^* = 0$ แล้ว จึงสรุปได้ว่า $c_i^* = 0$ ในที่สุด

ตัวอย่างที่ 4.29 สมมติให้

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ภายหลังจากที่ได้แปลงเมตริกซ์ให้อยู่ในรูปของการเรียงลำดับ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งให้อันดับ คือ $\rho(\boldsymbol{A}) = 2$ จากทฤษฎีบทที่ 4.8 อันดับของ $\boldsymbol{A}$ สามารถหาได้จากอีกวิธีหนึ่ง ด้วยการทดสอบว่า แต่ละแถวของ $\boldsymbol{A}$ เป็นอิสระกันหรือไม่ โดยการหาค่า c_1 และ c_2 ของระบบสมการเชิงเส้น

$$c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

จากสมการแรกและสมการสุดท้าย จะได้ว่า $2c_1 + c_2 = 0$ และจากสมการที่สอง $4c_1 + c_2 = 0$ กล่าวคือ $c_1 = 2c_1$ ดังนี้ $c_1 = c_2 = 0$ แถวของ $\boldsymbol{A}$ ซึ่งเป็นอิสระกัน จึงมีจำนวนทั้งหมดเท่ากับ 2 แถว ซึ่งเท่ากับอันดับของเมตริกซ์ กล่าวคือ $\mathsf{dim}(\mathscr{R}(\boldsymbol{A})) = 2 = \rho(\boldsymbol{A})$ □

แนวคิดที่คล้ายคลึงกันกับแนวคิดเรื่องปริภูมิแถว ได้แก่ ปริภูมิคอลัมน์[1] ดังนิยามต่อไปนี้

[1] แนวคิดเกี่ยวกับปริภูมิอีกประเภทหนึ่งซึ่งมักศึกษาควบคู่กันกับปริภูมิแถว (row space) และปริภูมิคอลัมน์ (column space) ได้แก่ ปริภูมิว่างหรือปริภูมิสู่ศูนย์ (null space) ทั้งนี้ผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับปริภูมิสู่ศูนย์

นิยามที่ 4.11 ปริภูมิคอลัมน์ (column space) ของ $\boldsymbol{A}$ คือ

$$\mathscr{C}(\boldsymbol{A}) = \mathscr{S}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

สำหรับเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ขนาด $m \times n$ ที่มีเวคเตอร์เท่ากับ $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ ■

จากนิยามข้างต้น ปริภูมิคอลัมน์ของเมตริกซ์ คือ ส่วนผสมเชิงเส้นของกลุ่มคอลัมน์ของเมตริกซ์ ทั้งนี้ มีข้อควรสังเกตที่สำคัญว่า เนื่องจากการจัดการแถวพื้นฐาน เป็นการสร้างส่วนผสมเชิงเส้นใหม่จากแถวไม่ใช่คอลัมน์ ปริภูมิคอลัมน์ของเมตริกซ์เดิม และปริภูมิคอลัมน์ของเมตริกซ์ที่ผ่านกระบวนการจัดการแถวพื้นฐาน จนเป็นเมตริกซ์ในรูปของการเรียงลำดับ จึงไม่จำเป็นต้องเท่ากันเสมอไป กล่าวคือ โดยทั่วไปแล้ว $\mathscr{C}(\boldsymbol{A}) \neq \mathscr{C}(\boldsymbol{A}_r)$ ด้วยเหตุนี้ ความสัมพันธ์ระหว่างมิติของปริภูมิคอลัมน์ และอันดับของเมตริกซ์ จึงแตกต่างจากความสัมพันธ์ระหว่างมิติของปริภูมิแถวและอันดับเมตริกซ์ ดังเช่นในทฤษฎีบทที่ 4.8 อยู่พอสมควร อย่างไรก็ตาม ในกรณีของปริภูมิคอลัมน์นั้น สามารถพิสูจน์ได้ว่า มิติของปริภูมิคอลัมน์จะเท่ากับจำนวนคอลัมน์พื้นฐาน ดังนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 4.12 คอลัมน์พื้นฐาน (basic column) ของเมตริกซ์ คือ คอลัมน์ของเมตริกซ์ ที่ได้จัดแถวให้อยู่ในรูปของการเรียงลำดับ (row echelon form) ซึ่งมีจุดหมุน (pivot) อยู่ในคอลัมน์ ■

ตัวอย่างที่ 4.30 จากเมตริกซ์

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_r$$

จากตัวอย่างข้างต้น $\boldsymbol{A}_r$ มีคอลัมน์พื้นฐาน 2 คอลัมน์ คือ $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0)$ ซึ่งมีจุดหมุน คือ ค่าแรกที่ไม่เท่ากับศูนย์ในแถวแรก ซึ่งเท่ากับ 1 และ $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1)$ ซึ่งมีจุดหมุน คือ ค่าแรกที่ไม่เท่ากับศูนย์ในแถวที่สอง ซึ่งเท่ากับ 1 เช่นกัน □

จากนิยามข้างต้น ความสัมพันธ์ระหว่างคอลัมน์พื้นฐานของเมตริกซ์ และฐานของปริภูมิคอลัมน์ของเมตริกซ์ สามารถอธิบายได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.9 สำหรับเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ขนาด $m \times n$ ซึ่งมีจุดหมุน k ตัว จะได้ว่า คอลัมน์พื้นฐานทั้ง k คอลัมน์ของ $\boldsymbol{A}$ ประกอบกันขึ้นเป็นฐานของ $\mathscr{C}(\boldsymbol{A})$ และ $\dim(\mathscr{C}(\boldsymbol{A})) = k$ ■

จากตำราพีชคณิตเชิงเส้นตั้งแต่ระดับกลางขึ้นไปได้ อาทิ Nicholson (2013)

กล่าวคือ คอลัมน์พื้นฐานของ $\boldsymbol{A}$ สามารถประกอบกันขึ้นเป็นฐานของ $\mathscr{C}(\boldsymbol{A})$ ได้ โดยไม่จำเป็นต้องใช้คอลัมน์ทั้งหมดของ $\boldsymbol{A}$ เช่นเดียวกันกับการที่แถวที่เป็นอิสระกันทั้งหมดของ $\boldsymbol{A}$ สามารถประกอบกันเป็นฐานของ $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})$ ได้ โดยไม่จำเป็นต้องใช้แถวทั้งหมด อนึ่ง การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ในส่วนแรก[1] ทำได้โดยการแสดงให้เห็นว่า คอลัมน์พื้นฐานทั้ง k คอลัมน์ของ $\boldsymbol{A}_r$ ประกอบกันขึ้นเป็นฐานของ $\mathscr{C}(\boldsymbol{A}_r)$ และ $\mathsf{dim}(\mathscr{C}(\boldsymbol{A}_r)) = k$ โดยหากให้ $\mathscr{C}(\boldsymbol{A}_r) = \mathscr{S}(\boldsymbol{a}_1^*, \ldots, \boldsymbol{a}_n^*)$ และให้คอลัมน์พื้นฐานของ $\boldsymbol{A}_r$ ซึ่งมีจุดหมุน ได้แก่ $\widetilde{\boldsymbol{a}}_1^*, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{a}}_k^*$ เมื่อ $k \leq n$ ดังนี้ โดยที่คอลัมน์ของ $\boldsymbol{A}_r$ ซึ่งจุดหมุนเป็นไปในลักษณะที่ว่า คอลัมน์แรกจะประกอบด้วยศูนย์ด้านล่างมากกว่าคอลัมน์ที่สอง และ คอลัมน์ที่สองจะประกอบด้วยศูนย์ด้านล่างมากกว่าคอลัมน์ที่สาม เช่นนี้ไปเรื่อยๆ ดังนี้ $\widetilde{\boldsymbol{a}}_1^*, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{a}}_k^*$ จึงเป็นอิสระกัน ดังที่ได้พิสูจน์ไว้ในทฤษฎีบทที่ 4.8 ผลดังกล่าวให้ข้อสรุปที่ว่า คอลัมน์พื้นฐานของ $\boldsymbol{A}_r$ คือ $\widetilde{\boldsymbol{a}}_1^*, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{a}}_k^*$ สามารถสร้าง $\mathscr{C}(\boldsymbol{A}_r)$ ได้ จากนั้นในส่วนต่อไป จึงเป็นการพิจารณาว่า คอลัมน์อื่นๆ ที่ไม่ใช่คอลัมน์พื้นฐานของ $\boldsymbol{A}_r$ ไม่จำเป็นในการสร้าง $\boldsymbol{A}_r$ โดยการแสดงว่า คอลัมน์อื่นดังกล่าว ไม่เป็นอิสระกันกับคอลัมน์พื้นฐาน ซึ่งสามารถเห็นได้ง่ายจากข้อเท็จจริงที่ว่า คอลัมน์ที่มีจุดหมุน สามารถประกอบกันใช้สร้าง คอลัมน์อื่นที่ไม่มีจุดหมุนได้เสมอ เช่น ในกรณีที่

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_r &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^* & \boldsymbol{a}_2^* & \boldsymbol{a}_3^* & \boldsymbol{a}_4^* & \boldsymbol{a}_5^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \underline{\mathsf{x}} & \mathsf{x} & \mathsf{x} & \mathsf{x} & \mathsf{x} \\ 0 & 0 & \underline{\mathsf{x}} & \mathsf{x} & \mathsf{x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{\mathsf{x}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ซึ่งมีคอลัมน์พื้นฐาน 3 คอลัมน์ ที่ประกอบด้วยจุดหมุน คือ $\underline{\mathsf{x}}$ ได้แก่ $\boldsymbol{a}_1^*, \boldsymbol{a}_3^*, \boldsymbol{a}_5^*$ และต่างเป็นอิสระกัน ในกรณีนี้ $\boldsymbol{a}_1^*$ และ $\boldsymbol{a}_2^*$ ไม่เป็นอิสระกัน เนื่องจากมีค่า $c_1, c_2 \neq 0$ ที่ทำให้ $c_1\boldsymbol{a}_1^* + c_2\boldsymbol{a}_2^* = \mathbf{0}$ และในลักษณะเดียวกันนี้ $\boldsymbol{a}_4^*$ ไม่เป็นอิสระจาก $\boldsymbol{a}_1^*$ และ $\boldsymbol{a}_3^*$ จากการที่ $\boldsymbol{a}_1^*$ และ $\boldsymbol{a}_3^*$ เป็นเวคเตอร์ที่เป็นอิสระกัน ซึ่งสามารถใช้สร้าง $\boldsymbol{a}_4^*$ ได้เสมอ ประกอบกับผลลัพธ์ที่ว่า คอลัมน์พื้นฐานของ $\boldsymbol{A}_r$ เพียงพอในการสร้าง $\mathscr{C}(\boldsymbol{A}_r)$ และคอลัมน์อื่นที่ไม่ใช่คอลัมน์พื้นฐานของ $\boldsymbol{A}_r$ ไม่จำเป็นในการสร้าง $\mathscr{C}(\boldsymbol{A}_r)$ ดังนี้ จึงสามารถสรุปได้ว่า คอลัมน์พื้นฐานของ $\boldsymbol{A}_r$ ประกอบกันขึ้นเป็นฐานของ $\mathscr{C}(\boldsymbol{A}_r)$ และ จำนวนของคอลัมน์พื้นฐานของ $\boldsymbol{A}_r$ ซึ่งโดยนิยามย่อมต้องเท่ากับจำนวนของจุดหมุนจะเท่ากับ $\mathsf{dim}(\mathscr{C}(\boldsymbol{A}_r))$

---

[1] ส่วนต่อไปที่จำเป็นต้องใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4.9 ให้สมบูรณ์ ได้แก่ การแสดงความสัมพันธ์ระหว่างฐานของ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{A}_r$ และความสัมพันธ์ระหว่างคอลัมน์พื้นฐานของ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{A}_r$ ซึ่งผู้สนใจสามารถทดลองพิสูจน์ได้ในแบบฝึกหัดท้ายบท และสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ จาก Simon and Blume (1994)

อนึ่ง $\dim(\mathscr{R}(\boldsymbol{A})) = \rho(\boldsymbol{A})$ จากทฤษฎีบทที่ 4.8 และ $\dim(\mathscr{C}(\boldsymbol{A})) = k$ เมื่อ k คือ จำนวนจุดหมุนในเมตริกซ์ในรูปการเรียงลำดับ จากทฤษฎีบทที่ 4.9 และโดยที่แต่ละแถวในเมตริกซ์ในรูปการเรียงลำดับซึ่งมีบางค่าไม่เท่ากับศูนย์ จะมีจุดหมุนหนึ่งจุดเสมอ ดังนี้ จำนวนแถวในเมตริกซ์ในรูปการเรียงลำดับ ที่มีบางค่าไม่เท่ากับศูนย์ จึงเท่ากับจำนวนจุดหมุนของเมตริกซ์ด้วยเช่นกัน ความสัมพันธ์ในทฤษฎีบทที่ 4.8 และ 4.9 สามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทเดียวกันได้ ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.10 สำหรับทุกเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ขนาด $m \times n$

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \dim(\mathscr{R}(\boldsymbol{A})) = \dim(\mathscr{C}(\boldsymbol{A})) \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 4.31 จากเมตริกซ์

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_r$$

เมตริกซ์ข้างต้น มีคอลัมน์พื้นฐาน 2 คอลัมน์ ได้แก่ คอลัมน์ที่หนึ่งและสอง ซึ่งเท่ากับจำนวนจุดหมุนของเมตริกซ์ ดังนี้ $\dim(\mathscr{C}(\boldsymbol{A})) = 2$ และจากตัวอย่างที่ 4.29 ที่ว่า $\dim(\mathscr{C}(\boldsymbol{A})) = \rho(\boldsymbol{A}) = 2$ ดังนี้ $\rho(\boldsymbol{A}) = \dim(\mathscr{R}(\boldsymbol{A})) = \dim(\mathscr{C}(\boldsymbol{A})) = 2$ ตามทฤษฎีบทที่ 4.10 $\square$

ตัวอย่างที่ 4.32 จากเมตริกซ์

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

แม้การหา $\dim(\mathscr{C}(\boldsymbol{A}))$ ของเมตริกซ์ซึ่งมีสี่คอลัมน์อาจค่อนข้างยุ่งยาก แต่จากการพิจารณาแล้วสามารถเห็นได้โดยง่ายว่า แถวที่หนึ่งและแถวที่สามของ $\boldsymbol{A}$ ไม่เป็นอิสระกัน เนื่องจากแถวที่สามเท่ากับแถวที่หนึ่งของ $\boldsymbol{A}$ คูณด้วยสอง และโดยที่แถวที่หนึ่งและแถวที่สองของ $\boldsymbol{A}$ เป็นอิสระระหว่างกัน ดังนี้ $\dim(\mathscr{R}(\boldsymbol{A})) = 2$ และจากทฤษฎีบทที่ 4.10 จึงได้ว่า $\dim(\mathscr{C}(\boldsymbol{A})) = 2$ เช่นกัน $\square$

4.7 การประยุกต์ในเศรษฐศาสตร์

การตีความแนวคิดต่าง ๆ ทางพีชคณิตเชิงเส้นในเชิงเรขาคณิต มีข้อดีที่สำคัญ คือ สามารถช่วย

ให้เข้าใจเครื่องมือและตัวแบบทางเศรษฐศาสตร์แขนงต่างๆ เช่น เศรษฐมิติ และทฤษฎีเศรษฐ-ศาสตร์จุลภาค ได้อย่างชัดเจน และเห็นภาพมากยิ่งขึ้น โดยในที่นี้จะได้พิจารณาการตีความเรื่องสมการถดถอย และตัวแบบทฤษฎีผู้บริโภคในเศรษฐศาสตร์จุลภาค จากมุมมองในเชิงเรขาคณิต-วิเคราะห์เรื่อง จุดและระนาบบน

4.7.1 สมการถดถอยและเรขาคณิตวิเคราะห์

จากตัวแบบทางเศรษฐมิติ ซึ่งอยู่ในรูประบบสมการเชิงเส้น

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

เมื่อ $\boldsymbol{y}$ คือ ข้อมูลเกี่ยวกับตัวแปรตาม ในรูปเวคเตอร์ขนาด $n \times 1$ $\boldsymbol{X}$ คือ ข้อมูลเกี่ยวกับตัวแปรอธิบาย ในรูปเมตริกซ์ขนาด $n \times k$ [1] $\boldsymbol{\beta}$ คือ เวคเตอร์ของพารามิเตอร์ ซึ่งวัดผลกระทบของตัวแปรอธิบายที่มีต่อตัวแปรตาม ซึ่งอยู่ในรูปเวคเตอร์ขนาด $k \times 1$ และ $\boldsymbol{\epsilon}$ คือ ความคาดเคลื่อนของตัวแบบ ซึ่งอยู่ในรูปเวคเตอร์ขนาด $n \times 1$ ตัวแบบข้างต้นที่อ้างอิงข้อมูลในระดับประชากร มีตัวแบบที่อ้างอิงจากกลุ่มตัวอย่างซึ่งอยู่ในรูป

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\hat{\beta}} + \boldsymbol{\hat{\epsilon}}$$

เมื่อ $\boldsymbol{\hat{\beta}}$ คือ ตัวประมาณการ (estimator) ซึ่งผู้วิจัยคาดหวังให้มีคุณสมบัติตามที่กำหนด และ $\boldsymbol{\hat{\epsilon}}$ คือ ความคลาดเคลื่อนจากการประมาณการ สำหรับตัวประมาณการที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (least squares estimator) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\hat{\beta}} &= \text{argmin } \boldsymbol{\hat{\epsilon}'\hat{\epsilon}} \\ &= (\boldsymbol{X'X})^{-1}(\boldsymbol{X'y})\end{aligned}$$

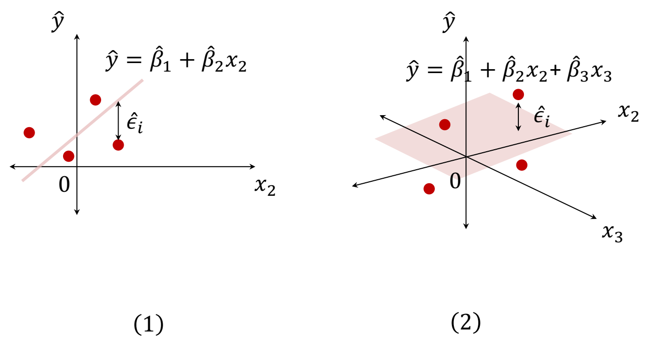
ซึ่งให้ค่าประมาณการของตัวแปรตาม $\boldsymbol{\hat{y}}$ ซึ่งอยู่ในรูป $\boldsymbol{\hat{y}} = \boldsymbol{X\hat{\beta}}$ ทั้งนี้หากให้ตัวแบบมีจุดตัด กล่าวคือ หากให้ทุกค่าใน $\boldsymbol{x}_1$ เท่ากับ 1 สำหรับแต่ละหน่วยข้อมูล[2] จะได้ว่า

$$\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \ldots + \hat{\beta}_k x_k$$

สมการข้างต้นเป็นสมการกำหนดระนาบบน ที่ตัดผ่านไปใน $\mathbb{R}^k$ ซึ่งสามารถพิจารณาเห็นได้ง่าย

[1] โดยในกรณีของตัวแบบที่มีจุดตัด สามารถกำหนดค่าคงที่ เช่น 1 สำหรับตัวแปรตัวแรก

[2] ในที่นี้จะได้ละ $\hat{y}_i, \hat{x}_{2i}, \ldots, \hat{x}_{ki}$ ให้เหลือเพียง $\hat{y}, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_k$ เพื่อความกระชับ



รูปที่ 4.11 สมการถดถอยและระนาบบน (1) สมการถดถอยที่ประกอบด้วยตัวแปรอธิบายเพียงตัวเดียว คือ x_2 ซึ่งอยู่ในรูป $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_2$ เมื่อ $x_2 \in \mathbb{R}$ จะสร้างเส้นตรงที่ตัดไปใน $\mathbb{R}^2$ ซึ่งมีจุดตัดแกนตั้งและความชันเท่ากับ $\hat{\beta}_1$ และ $\hat{\beta}_2$ ตามลำดับ (2) สมการถดถอยที่ประกอบด้วยตัวแปรอธิบายสองตัว คือ x_2 และ x_3 ซึ่งอยู่ในรูป $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3$ เมื่อ $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ จะสร้างระนาบที่ตัดไปใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่งมีจุดตัดแกนตั้งค่าความคลาดเคลื่อน ในทุกกรณี $\hat{\epsilon}_i$ คือ ส่วนต่างระหว่างค่าของตัวแปรตามที่เป็นจริง คือ y_i ที่สังเกตได้จากข้อมูลตัวที่ i และค่าของตัวแปรตามที่คาดการณ์ คือ $\hat{y}_i$

หากจัดเรียงสมการให้อยู่ในรูป

$$\hat{y} - \hat{\beta}_2 x_2 - \ldots - \hat{\beta}_k x_k = \hat{\beta}_1$$

และเปรียบเทียบกับสมการกำหนดระนาบบน ที่อยู่ในรูป

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_k x_k = d$$

ที่ได้พิจารณาก่อนหน้านี้

อนึ่ง ในกรณีที่ $k = 2$ สมการค่าประมาณ $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_2$ เมื่อ $x_2 \in \mathbb{R}$ จะกำหนดเส้นตรงดังรูปที่ 4.11 (1) ซึ่งหากให้ $\hat{y}$ เป็นแกนตั้งและ x_2 เป็นแกนนอน จะเป็นเส้นตรงที่มีจุดตัดแกนนอนและความชันเท่ากับ $\hat{\beta}_1$ และ $\hat{\beta}_2$ ตามลำดับ และ ในกรณีที่ $k = 3$ สมการค่าประมาณการ $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3$ เมื่อ $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ จะกำหนดระนาบดังรูปที่ 4.11 (2) ใน $\mathbb{R}^3$ ดังนี้ $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \ldots + \hat{\beta}_k x_k$ จึงเป็นสมการกำหนดระนาบบนที่ตัดผ่านไปใน $\mathbb{R}^k$ ในกรณีทั่วไป ทั้งนี้ $\hat{\epsilon}_i$ ในทุกกรณี จะเท่ากับ ค่าบวกลบของระยะทาง ระหว่างค่าของตัวแปรตามที่เป็นจริงคือ y_i ที่สังเกตได้ และค่าของตัวแปรตามที่คาดการณ์ คือ $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \ldots + \hat{\beta}_k x_{ik}$ ที่ได้จากการคำนวณ

4.7.2 ทฤษฎีผู้บริโภคและเรขาคณิตวิเคราะห์

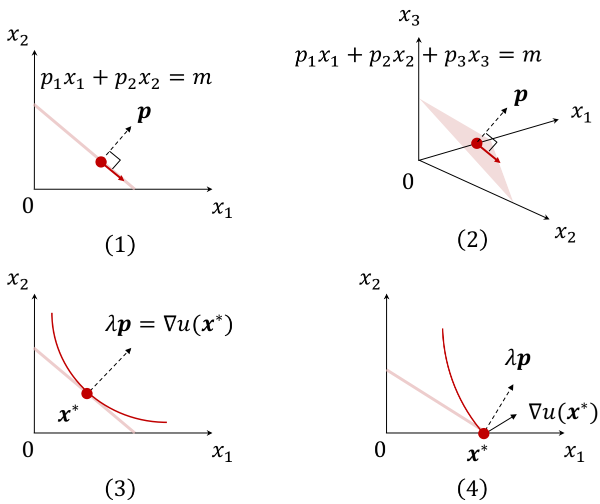
ในทฤษฎีผู้บริโภค หากให้ $\boldsymbol{x}$ คือเวคเตอร์ของสินค้าและบริการ (commodity vector) ขนาด $n \times 1$ ซึ่งมีราคาของสินค้าแต่ละชนิด คือ เวคเตอร์ราคา (price vector) $\boldsymbol{p}$ ขนาด $1 \times n$ และให้รายได้ของผู้บริโภคเท่ากับ m เซตงบประมาณซึ่งกำหนดเงื่อนไขว่า รายจ่ายจากการบริโภคทั้งหมด จะต้องไม่เกินกว่ารายได้ จะอยู่ในรูป

$$\mathscr{X} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \leq m\}$$

ในกรณีที่รายจ่ายรวมของผู้บริโภคใช้จ่ายเท่ากับรายได้ของผู้บริโภค จะได้เงื่อนไขในรูปสมการ คือ

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = m$$

ซึ่งเป็นระนาบบนที่ตัดไปใน $\mathbb{R}^n$ ในกรณีเฉพาะที่ $n = 2$ สมการข้างต้นซึ่งอยู่ในรูป $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$ จะเท่ากับสมการกำหนดเส้นตรงใน $\mathbb{R}^2$ ซึ่งมีจุดตัดแกน x_1 เท่ากับ $\frac{m}{p_1}$ และจุดตัด



รูปที่ 4.12 เส้นงบประมาณ (budget line) และระนาบบนงบประมาณ (budget hyperplane) (1) เส้นงบประมาณจากสมการ $p_1x_1 + p_2x_2 = m$; $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ ที่ตัดผ่านไปใน $\mathbb{R}^2$ และ (2) ระนาบบนงบประมาณจากสมการ $p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3 = m$; $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_+$ ที่ตัดผ่านไปใน $\mathbb{R}^3$ ในทั้งสองกรณี เวคเตอร์ราคา $\boldsymbol{p}$ คือ เวคเตอร์ปกติของระนาบบนงบประมาณ ที่ตั้งฉากกับเวคเตอร์ทุกเส้นบนระนาบบนงบประมาณ (3) ระดับการบริโภค $\boldsymbol{x}^*$ ที่ทำให้อรรถประโยชน์สูงสุด เมื่อ $x_1^*, x_2^* > 0$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข $\nabla u(\boldsymbol{x}^*) = \lambda\boldsymbol{p}$ และ (4) ระดับการบริโภค $\boldsymbol{x}^*$ ที่ทำให้อรรถประโยชน์สูงสุด เมื่อ $x_1^* = 0, x_2^* > 0$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข $\nabla u(\boldsymbol{x}^*) < \lambda\boldsymbol{p}$

แกน x_2 เท่ากับ $\frac{m}{p_2}$ ที่เป็นที่รู้จักกันดีในชื่อว่า เส้นงบประมาณ ดังรูปที่ 4.12 (1)[1] ทั้งนี้ มีข้อสังเกตที่สำคัญจากสมการข้างต้นว่า เวคเตอร์ราคา $\boldsymbol{p}$ คือ เวคเตอร์ปกติ (normal) ของระนาบบนงบประมาณ เนื่องจากหากให้ $\mathring{\boldsymbol{x}}$ คือจุดใดๆ ที่ระนาบบนงบประมาณตัดผ่าน จะได้ว่า $\boldsymbol{p} \cdot \mathring{\boldsymbol{x}} = m$ ดังนี้

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} - m &= 0 \\ \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p} \cdot \mathring{\boldsymbol{x}} &= 0 \\ \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{x} - \mathring{\boldsymbol{x}}) &= 0 \end{aligned}$$

กล่าวคือ เวคเตอร์ราคา $\boldsymbol{p}$ คือ เวคเตอร์ปกติของระนาบบนงบประมาณที่ลากตัดผ่านจุด $\mathring{\boldsymbol{x}}$ ดังรูปที่ 4.12 (2)

ความเข้าใจข้างต้นเป็นพื้นฐานสำคัญในการศึกษาทฤษฎีการเลือกของผู้บริโภค ที่สามารถใช้จำแนกคำตอบที่เป็นคำตอบภายใน (interior solution) และคำตอบที่มุม (corner solution) โดยหากให้ความพอใจของผู้บริโภค สามารถแสดงได้ด้วยฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ $u(\boldsymbol{x})$ ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้อย่างน้อย 2 ลำดับ พฤติกรรมของผู้บริโภคที่มุ่งเลือกสินค้าที่ให้ความพอใจสูงสุดภายใต้ข้อจำกัดของงบประมาณ สามารถแปลงให้อยู่ในรูปของคำถามทางคณิตศาสตร์ คือ การเลือก $\boldsymbol{x}$ ที่ทำให้ฟังก์ชั่นลากรองจ์

$$\mathscr{L} = u(\boldsymbol{x}) - \lambda(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} - m)$$

มีค่าสูงสุด จากเงื่อนไขที่จำเป็นของคูนและทัคเกอร์ (Kuhn-Tucker necessary conditions) ส่วนแรก คือ เงื่อนไขการแตะกัน (tangency condition) จะได้ว่า $\boldsymbol{x}^*$ ที่ทำให้ฟังก์ชั่นลากรองจ์มีค่าสูงสุด จะสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\nabla u(\boldsymbol{x}^*) \leq \lambda \boldsymbol{p} \text{ และ } \boldsymbol{x}^* \odot (\nabla u(\boldsymbol{x}^*) - \lambda \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}$$

ดังนี้ หาก $\boldsymbol{x}^* \gg 0$ กล่าวคือ ผู้บริโภคเลือกบริโภคสินค้าทุกประเภทแล้ว เงื่อนไขในสมการที่สองจะเป็นจริงไ ด้ก็ต่อเมื่อ $\nabla u(\boldsymbol{x}^*) = \lambda \boldsymbol{p}$ เท่านั้น กล่าวคือ เวคเตอร์ปกติของระนาบบนงบประมาณที่คูณกับตัวคูณของลากรองจ์ คือ $\lambda \boldsymbol{p}$ จะต้องทาบกับเวคเตอร์ปกติของระนาบ ที่แตะฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ที่ $\boldsymbol{x}^*$ อันได้แก่ เกรเดียนของอนุพันธ์อันดับแรกของฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ คือ $\nabla u(\boldsymbol{x}^*)$

[1] อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่ $n > 2$ การใช้คำเรียกสมการข้างต้นว่าระนาบบนงบประมาณ (budget hyperplane) ย่อมเป็นคำเรียกที่ถูกต้องกว่าในเชิงเรขาคณิตวิเคราะห์

ดังรูปที่ 4.12 (3) ในอีกกรณีหนึ่งหาก $\exists x_i^* \in \boldsymbol{x}^*, i = 1, \ldots, n$ โดยที่ $x_i^* = 0$ กล่าวคือ ผู้บริโภคเลือกที่จะไม่บริโภคสินค้าบางประเภทแล้ว ซึ่งในกรณีนี้ จากเงื่อนไขในอสมการแรก จะได้ว่า $\nabla u(\boldsymbol{x}^*) < \lambda \boldsymbol{p}$ ดังรูปที่ 4.12 (4)

4.8 เอกสารอ่านประกอบเพิ่มเติม

ตำราพีชคณิตเชิงเส้นสำหรับนักศึกษาภาควิชาคณิตศาสตร์ มักเรียบเรียงเนื้อหาเกี่ยวกับปริภูมิของเวคเตอร์ เอาไว้ในบทแรกๆ อาทิ บทที่สองของ Fraleigh and Beauregard (1990) ซึ่งอธิบายเกี่ยวกับปริภูมิของเวคเตอร์ เรขาคณิตวิเคราะห์ จุด เส้น และฐาน พร้อมตัวอย่างการประยุกต์ที่น่าสนใจในทางฟิสิกส์ บทที่สามของ Kolman and Hill (2014) ซึ่งกล่าวถึงเนื้อหาทั้งหมดในบทนี้ พร้อมหัวข้อทางพีชคณิตระดับสูงอื่นๆ เพิ่มเติม เวคเตอร์คู่อันดับ (coordinate vector) การจัดคู่แบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างปริภูมิ (isomorphism) ตลอดจนปริภูมิสู่ศูนย์ (null space) ตำราบางเล่ม เช่น Nicholson (2013) ได้กระจายเนื้อหาหลายเรื่องในบทนี้ ออกเป็นหลายบทด้วยกัน อาทิ เรขาคณิตวิเคราะห์ของเวคเตอร์ในบทที่สี่ ปริภูมิและปริภูมิย่อยของเวคเตอร์ การสร้างและขยายเซต ตลอดจนความเป็นอิสระกันเชิงเส้น พร้อมตัวอย่างที่น่าสนใจ และการประยุกต์ใช้แนวคิดเรื่องปริภูมิ กับเรื่องกำลังสองน้อยที่สุดในทางสถิติในบทที่ห้า อนึ่ง ผู้สนใจการประยุกต์เรื่องปริภูมิในทางเศรษฐศาสตร์ สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ใน Mas-Colell et al. (1995) สำหรับการประยุกต์ในทฤษฎีผู้บริโภค และ Greene (2000) สำหรับการประยุกต์ในเศรษฐมิติ

ประวัติความเป็นมาของแนวคิดเรื่องปริภูมิ และนักคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก Dorier (1995) และ Kleiner (2007)

4.9 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. สมมติให้ $\boldsymbol{u}_1 = (1,2), \boldsymbol{u}_2 = (1,2,3), \boldsymbol{u}_3 = (1,2,4), \boldsymbol{u}_4 = (3,4)$ จงหาค่าของ $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2, 2(\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3), \|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|$ และ $\|\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3\|$

2. จงเขียนสมการแสดงค่าของเส้นตรงใน $\mathbb{R}^2$ ที่ลากผ่านจุด $(1,0)$ และ $(3,2)$ และแสดงให้เห็นว่าสมการดังกล่าวสอดคล้องกับการแสดงค่าของเส้นตรงในรูป $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}$ เมื่อ $\boldsymbol{x}_0$ คือจุดหนึ่งจุดที่เส้นตรงลากผ่าน และ $\boldsymbol{v}$ คือเวคเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงนี้ จากนั้นให้พิจารณาว่าจุด $(5,4)$ อยู่บนเส้นตรงนี้หรือไม่ และหากต้องการให้จุด $(-1,s)$ อยู่บนเส้นตรงนี้ s จะต้องมีค่าเป็นเท่าใด

3. จงเขียนสมการแสดงค่าของเส้นตรงใน $\mathbb{R}^3$ ที่ลากผ่านจุด $(1,1,2)$ และ $(3,2,1)$ จากนั้นให้พิจารณาว่าหากต้องการให้จุด $(r,0,s)$ อยู่บนเส้นตรงนี้ r และ s จะต้องมีค่าเป็นเท่าใด

4. จากข้อ 2 และข้อ 3 จงเขียนสมการอธิบายเส้นตรงที่เชื่อมต่อระหว่างจุดทั้งสองจุดที่กำหนด พร้อมหาจุดกึ่งกลางบนเส้นตรงดังกล่าว

5. จงเขียนสมการอธิบายเส้นตรงต่อไปนี้ในรูป $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}$: (1) $x_2 = x_1 - 1$; (2) $2x_1 + 3x_2 = 4$

6. จงเขียนสมการอธิบายเส้นตรงต่อไปนี้ในรูป $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$: (1) $\boldsymbol{x}(t) = (4,3) + t(-1,3)$; (2) $\boldsymbol{x}(t) = (0,5) + t(3,0)$ (3) $\boldsymbol{x}(t) = (1,1,2) + t(-1,1,0)$

7. จงพิจารณาว่าเส้นตรงต่อไปนี้ตัดกันหรือไม่ และหากตัดกันจงหาจุดตัดของเส้นตรงทั้งสองเส้น:

(1) $\boldsymbol{x}(s) = (1,2,1) + s(-6,10,2)$ และ $\boldsymbol{x}(t) = (-1,3,1) + t(2,-8,-2)$

(2) $\boldsymbol{x}(s) = (1,2,-1) + s(-2,4,6)$ และ $\boldsymbol{x}(t) = (0,1,3) + t(4,1,0)$

(3) $\boldsymbol{x}(s) = (4,-1,5) + s(2,0,2)$ และ $\boldsymbol{x}(t) = (2,-7,12) + t(0,-4,6)$

8. จงเขียนสมการอธิบายระนาบต่อไปนี้ในรูป $\boldsymbol{x}(s,t) = \boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$: (1) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$; (2) $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -6$

9. จงเขียนสมการอธิบายระนาบต่อไปนี้ในรูป $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$: (1) $\boldsymbol{x}(s,t) = (1,2,1) + s(1,1,1) + t(-1,1,2)$;(2) $\boldsymbol{x}(s,t) = (1,2,1,0) + s(1,1,1,-1) + t(-1,1,2,1)$

10. จงพิจารณาว่าระนาบต่อไปนี้ตัดกันหรือไม่

(1) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$ และ $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4$

(2) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$ และ $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 10$

11. จงหาสมการกำหนดเส้นตรงซึ่งเป็นจุดตัดของระนาบ $x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$ และ $x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$

12. จงหาสมการอธิบายระนาบต่อไปนี้ในรูป $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$:

(1) ระนาบที่ตัดผ่านจุด $\boldsymbol{x}_0 = (1, 2, 1)$ และมีเวคเตอร์ปกติคือ $\boldsymbol{n} = (2, 1, 2)$

(2) ระนาบที่ตัดผ่านจุด $\boldsymbol{x}_0 = (-1, 0, 1)$ และตั้งฉากกับเส้น $\boldsymbol{x}(t) = (-1, 3, 1)+t(1, -1, 1)$

(3) ระนาบที่มีจุดตัดแกนคือ $(\alpha, 0, 0)$,$(0, \beta, 0)$,$(0, 0, \gamma)$

13. ข้อใดต่อไปนี้เป็นปริภูมิย่อยใน $\mathbb{R}^2$: (1) $\{(x, y)|y = 0\}$; (2) $\{(x, y)|x = a, a > 0\}$; (3) $\{(x, y)|x^2 + y^2 = a, a > 0\}$; (4) $\{(x, y)|ax + by = 0; a, b \neq 0\}$;(5) $\{(x, y)|ax + by = c; a, b, c \neq 0\}$

14. จงหาฐานของปริภูมิแถวของเมตริกซ์ต่อไปนี้

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} a & b \\ 2a & c \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

15. จงหาฐานของปริภูมิคอลัมน์ของเมตริกซ์ต่อไปนี้

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b+1 & 2c \end{pmatrix}$

16. จากระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร 3 สมการ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &= b_3 \end{aligned}$$

จงหาค่าของสัมประสิทธิ์ a_{ij} และ b_i เมื่อ $i = 1, 2, 3$ และ $j = 1, 2$ ที่ทำให้

(1) ระบบสมการมีสมการใดสมการหนึ่งที่ไม่อาจแทนด้วยเส้นตรงใดๆ ใน $\mathbb{R}^2$ ได้

(2) ระบบสมการสร้างเส้นตรง 3 เส้นที่ขนานกัน

(3) ระบบสมการสร้างเส้นตรง 3 เส้นที่มีความชันต่างกันแต่ไม่ได้ตัดกันที่จุดเดียวกัน

(4) ระบบสมการสร้างเส้นตรง 3 เส้นที่มีความชันต่างกันและตัดกันที่จุดเดียวกันทั้งหมด

(5) ระบบสมการสร้างเส้นตรง 2 เส้นที่ทาบกัน และตัดกับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งที่มีความชันต่างกับเส้นตรง 2 เส้นนี้

(6) ระบบสมการนี้อาจมีคำตอบนับไม่ถ้วน ซึ่งเกิดขึ้นได้ในกรณีที่เส้นตรงทั้ง 3 เส้น ทาบกันทั้งหมด

17. พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4.9 ให้สมบูรณ์

18. จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ทางเศรษฐศาสตร์ต่อไปนี้ เป็นจุด เส้นตรง ระนาบ หรือระนาบบน

(1) ตะกร้าสินค้าของผู้บริโภคซึ่งประกอบด้วยส้ม 10 ผล

(2) ตะกร้าสินค้าของผู้บริโภคซึ่งประกอบด้วยส้ม 10 ผล กล้วย 2 หวี และเงินที่เหลือจากการซื้อผลไม้ทั้งสองชนิด

(3) ส่วนต่างของจำนวนสินค้าในตะกร้าสินค้าของผู้บริโภคสองราย เมื่อตะกร้าแต่ละใบมีจำนวนสินค้าทั้งสิ้น 5 รายการ

(4) รายจ่ายในการซื้อสินค้าแต่ละรายการ และเงินที่เหลือ จะเท่ากับรายได้ของผู้บริโภคเสมอ

บทที่ 5

R สำหรับพีชคณิตเชิงเส้น

คำถามทางคณิตศาสตร์จำนวนมาก มักอยู่ในรูปของการหาคำตอบว่ามีค่าเท่าใด เช่น ค่าของ x ที่ทำให้สมการ $x + 1 = 0$ โดยหากพิจารณาคำถามต่างๆ ในเนื้อหาที่ผ่านมาของหนังสือเล่มนี้แล้ว จะเห็นได้ว่ามีหลายคำถามในลักษณะนี้ เช่น จำนวนคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเป็นเท่าใด อันดับของระบบสมการเชิงเส้นเท่ากับเท่าใด ตัวกำหนด ค่าเฉพาะ อินเวอร์ส และเทรสของเมตริกซ์เท่ากับเท่าใด เป็นต้น และโดยที่การคำนวณเพื่อหาคำตอบของคำถามเหล่านี้มักมีความซับซ้อน ความรู้เกี่ยวกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ที่จำเป็นในการศึกษาพีชคณิตเชิงเส้น จึงเป็นเครื่องมือสำคัญ ที่สามารถช่วยแบ่งเบาภาระในการคำนวณ[1] ให้กับผู้ศึกษาได้เป็นอย่างมาก ไม่ต่างไปจากการพยายามคูณเลขหรือหารเลขห้าหลัก ที่แม้ความรู้ที่จำเป็นในการคำนวณเช่นนี้ จะอาศัยเพียงความรู้พื้นฐานทางการคำนวณ คือ การคูณและการหาร แต่ก็เป็นเรื่องยุ่งยากซับซ้อน ที่สามารถหลีกเลี่ยงได้ด้วยการใช้เครื่องคิดเลข

ประโยชน์ที่ได้จากการเรียนรู้การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ในการหาคำตอบในทางคณิตศาสตร์ ไม่ได้จำกัดอยู่แต่เพียงความสะดวกสบาย หรือการลดภาระในการคำนวณเพียงเท่านั้น หากยังรวมถึงการหาคำตอบของคำถาม ซึ่งไม่อาจหา**คำตอบในเชิงวิเคราะห์ (analytical solution)** ได้

[1] อนึ่ง ความรู้เกี่ยวกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์อาจไม่เพียงช่วยแบ่งเบาภาระในการคำนวณเท่านั้น แต่ยังนับเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับบางเรื่อง เช่น ในงานศึกษาทางเศรษฐมิติ ที่ตัวประมาณการจากวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ต้องคำนวณจากอินเวอร์สของเมตริกซ์ขนาดใหญ่ ที่อาจกล่าวได้ว่า ไม่สามารถคำนวณได้ หากไม่ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์

อาทิ สำหรับสมการที่ไม่ใช่สมการเชิงเส้น (nonlinear equation) นั้น แม้สมการบางประเภท เช่น สมการฟังก์ชั่นกำลังสองที่อยู่ในรูป $ax^2+bx+c=0$ เมื่อ a,b,c คือค่าคงที่ อาจให้คำตอบในเชิงวิเคราะห์ที่อยู่ในรูป

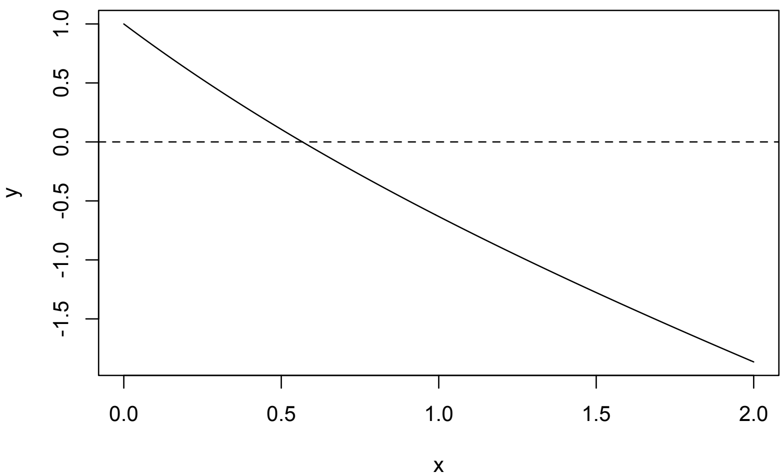
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

แต่สมการบางประเภท เช่น $x = ae^{-x}$ เมื่อ $a \neq 0$ ซึ่งแม้ดูเป็นสมการที่ง่าย ไม่ซับซ้อน กลับเป็นสมการที่ไม่มีคำตอบในเชิงวิเคราะห์ ที่สามารถแสดงคำตอบ คือ x ในรูปของพารามิเตอร์ของสมการ คือ a ได้ การหาคำตอบของสมการในลักษณะนี้ จึงจำเป็นต้องมุ่งหา**คำตอบในเชิงตัวเลข (numerical solution)** ที่ให้ค่า x ที่ทำให้สมการดังกล่าวเป็นจริง สำหรับค่า a ที่ถูกกำหนด เช่น หากให้ $a=1$ และจัดเรียงสมการใหม่ให้อยู่ในรูป $e^{-x}-x=0$ กราฟของฟังก์ชั่น $f(x) = e^{-x}-x$ ในระนาบสองมิติ จะมี จุดตัดแกนนอนของฟังก์ชั่น ซึ่งเป็นคำตอบของสมการ คือ $x \approx 0.6$ ดังรูปที่ 5.1

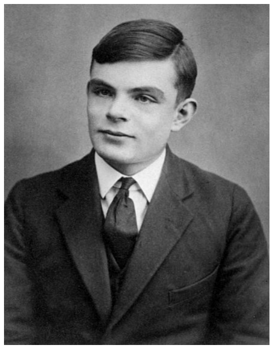
อนึ่ง โดยที่คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของคำตอบในเชิงวิเคราะห์ได้เสมอ แนวทางการหาคำตอบของสมการที่ไม่ใช่สมการเชิงเส้น ด้วยวิธีการเชิงตัวเลขข้างต้น จึงอาจเหมือนเป็นตัวอย่าง ที่ไม่เกี่ยวข้องกับความสำคัญของการเรียนรู้ การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อศึกษาวิชาพีชคณิตเท่าใดนัก ซึ่งในประเด็นนี้ ผู้เขียนใคร่ย้ำว่า การเรียนรู้โปรแกรมคอมพิวเตอร์และการหาคำตอบในเชิงตัวเลข ยังคงมีความสำคัญอย่างยิ่งสำหรับวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ด้วยเหตุผลอย่างน้อยสามประการ คือ ในประการแรก ขอบเขตของวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ไม่ได้จำกัดแต่เพียงการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเท่านั้น หากยังขยายครอบคลุมแนวคิดทางคณิตศาสตร์เรื่องอื่น ที่ผสมผสานแนวคิดแบบเชิงเส้น เข้าด้วยกันกับแนวคิดที่ไม่ใช่เชิงเส้น ซึ่งไม่ได้ถูกกล่าวถึงในหนังสือเล่มนี้ อาทิ การประมาณการฟังก์ชั่นที่ไม่เป็นเชิงเส้น ด้วยการประมาณการแบบเชิงเส้น (linear approximation) ในรูปแบบต่างๆ ดังนี้ ความรู้เกี่ยวกับการหาคำตอบในเชิงตัวเลข จึงเป็นสิ่งจำเป็นในการศึกษาวิชาพีชคณิตชั้นสูง ที่มักผสมผสานแนวคิดแบบเชิงเส้น และไม่ใช่เชิงเส้นเข้าด้วยกัน

ในประการที่สอง แม้กระบวนการหาคำตอบในเชิงวิเคราะห์ มักสร้างความเข้าใจปัญหาที่กำลังพิจารณาอยู่ ได้ดีกว่ากระบวนการหาคำตอบในเชิงตัวเลข แต่บ่อยครั้งการหาคำตอบในเชิงวิเคราะห์อาจใช้เวลาค่อนข้างมากกว่าโดยเปรียบเทียบ ซึ่งหากพิจารณาในแง่นี้ การหาคำตอบในเชิงตัวเลขที่อาจให้คำตอบที่รวดเร็วกว่า ย่อมถือเป็นกระบวนการที่มีประสิทธิภาพ มากกว่าการหาคำตอบในเชิงวิเคราะห์ เช่น หากให้หาคำตอบของสมการ

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = 5$$



รูปที่ 5.1 คำตอบเชิงตัวเลขของ $x = e^{-x}$ สมการ $x = ae^{-x}$ เมื่อ $a \neq 0$ เป็นตัวอย่างสมการที่ไม่ใช่สมการเชิงเส้น ที่ไม่มีคำตอบในเชิงวิเคราะห์ การหาคำตอบของสมการประเภทนี้สำหรับค่า a ที่ถูกกำหนด สามารถหาได้ด้วยวิธีการในเชิงตัวเลขโดยการจัดเรียงสมการใหม่ให้อยู่ในรูป $e^{-x} - x = 0$ และแทนค่า x ที่ระดับต่างๆ ลงไปในสมการ ซึ่งจะให้คำตอบของสมการเท่ากับจุดตัดแกนนอนของฟังก์ชั่น $f(x) = e^{-x} - x$ ในระนาบสองมิติ คือ $x \approx 0.6$



รูปที่ 5.2 อัลลัน ทัวริง (Alan Turing, 1912-1954)* สิ่งที่เรียกกันอย่างคุ้นเคยว่าเครื่องคอมพิวเตอร์นั้น ถูกพัฒนามาจากเครื่องมือที่ชื่อว่า **เครื่องกลของทัวริง (Turing machine)** ตามชื่อ อัลลัน ทัวริง นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ ผู้ให้กำเนิดวิชาวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์และปัญญาประดิษฐ์ ในความคิดของนักคณิตศาสตร์หลายคนนั้น ทัวริงเป็นนักคณิตศาสตร์ที่ยิ่งใหญ่ที่สุดคนหนึ่งของประเทศอังกฤษที่จะเป็นรองก็แต่เพียงนิวตันเท่านั้น ทัวริงได้ล้างภาพของนักคณิตศาสตร์ในความคำนึงของคนทั่วไปที่ว่า ผลงานของนักคณิตศาสตร์ คือ การสร้างทฤษฎีบทและการพิสูจน์ต่างๆ ซึ่งดูเป็นนามธรรม จับต้องไม่ได้เท่านั้น และได้สร้างผลงานในเชิงประยุกต์ออกมาจำนวนมาก เช่น การช่วยรัฐบาลอังกฤษถอดรหัสของกองทัพเยอรมนีในช่วงสงครามโลกครั้งที่ 2 และการพัฒนาเครื่องมือที่เป็นจุดเริ่มต้นของเครื่องคอมพิวเตอร์ในปัจจุบัน ในปี 1952 ซึ่งการรักร่วมเพศยังคงเป็นความผิดทางอาญาในประเทศอังกฤษ ทัวริงซึ่งเป็นผู้รักเพศเดียวกันได้ถูกตัดสินลงโทษด้วยการถูกฉีดสารเคมีเพื่อตอนด้วยสารเคมี (chemical castration) และถูกปลดออกจากโครงการศึกษารหัสต่างๆ ของรัฐบาลอังกฤษที่ตนเป็นผู้ริเริ่ม หลังจากนั้นอีกเพียงสองปี ทัวริงได้ตัดสินใจฆ่าตัวตาย โดยการกินแอปเปิ้ลอาบยาพิษ ซึ่งว่ากันว่าเป็นความตั้งใจของทัวริง ที่จะจากโลกนี้ไปด้วยความทรงจำในเทพนิยายเรื่องสโนไวท์และคนแคระทั้งเจ็ด ที่ทัวริงชื่นชอบตั้งแต่เด็ก ในปี 2014 หกสิบปีภายหลังการฆ่าตัวตายของทัวริง รัฐบาลอังกฤษจึงได้ออกกฎหมายนิรโทษกรรมทัวริงอย่างเป็นทางการ ทัวริงได้รับการยกย่องจากประเทศอังกฤษอีกครั้งให้ปรากฏในธนบัตร 50 ปอนด์ของอังกฤษ และได้รับการยกย่องจากนิตยสารไทมส์ ให้เป็นหนึ่งในร้อยบุคคลที่ทรงอิทธิพลที่สุดของโลกในศตวรรษที่ 20

*https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Alan_Turing_Aged_16.jpg

การหาคำตอบในเชิงวิเคราะห์ อาจทำได้โดยการจัดรูปสมการให้อยู่ในรูป $\sqrt{x+5} = 5 + \sqrt{x}$ จากนั้นหากยกกำลังทั้งสองข้างของสมการ และแก้สมการจะได้ $x = 4$ กระบวนการเช่นนี้ย่อมใช้เวลาพอสมควร ซึ่งหากเปรียบเทียบกับกระบวนการในเชิงตัวเลข ที่ใช้การเดาสุ่มค่าของ $x = 0, 1, \ldots$ ไปเรื่อยๆ ก็จะเห็นได้โดยเร็วว่า คำตอบของสมการ คือ $x = 4$ เนื่องจาก $\sqrt{4}+\sqrt{4+5} = 5$

ในประการสุดท้าย ความรู้เกี่ยวกับวิธีการในเชิงตัวเลขนั้น เป็นเรื่องจำเป็นสำหรับผู้ศึกษาวิชาพีชคณิตเชิงเส้น เนื่องจากเนื้อหาของพีชคณิตเชิงเส้นบางเรื่อง เกี่ยวข้องโดยตรงกับการหาคำตอบของสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น เช่น ในการหาค่าเฉพาะ λ ของเมตริกซ์จัตุรัสที่ $\boldsymbol{X}$ จากการใช้คุณสมบัติของค่าเฉพาะที่ว่า $|\boldsymbol{X} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$ มักต้องอาศัยการแก้สมการพหุนามในรูป $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$ ซึ่งแม้อาจหาคำตอบในเชิงวิเคราะห์ได้ในกรณี $n \leq 4$ แต่กลับไม่อาจหาคำตอบในเชิงวิเคราะห์ได้ในกรณี $n > 5$ [1]

5.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับ R

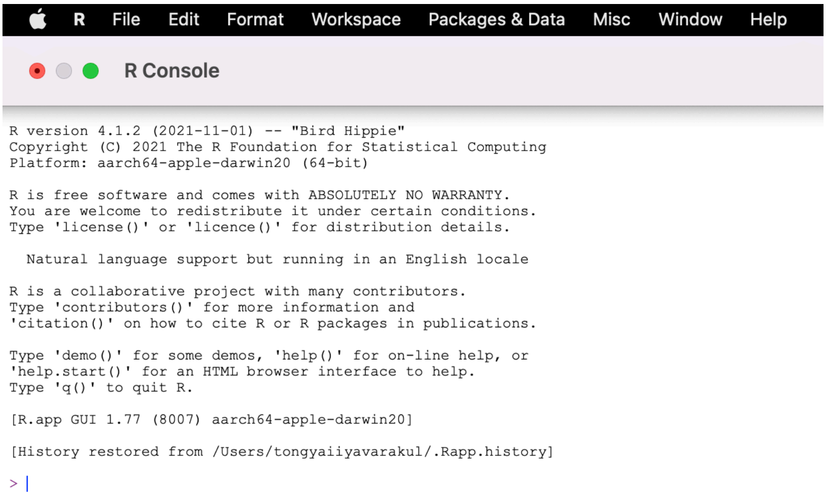
ภาษาคอมพิวเตอร์ที่ผู้เขียนพิจารณาแล้ว เห็นว่าเหมาะสมกับขอบเขตและเนื้อหาของหนังสือเล่มนี้ คือ ภาษา R ด้วยเหตุผลที่ว่า นอกจาก R จะเป็นโปรแกรมเปิด (open-source) ที่สามารถหามาใช้ โดยไม่เสียค่าใช้จ่ายแต่อย่างใดแล้ว ยังเป็นหนึ่งในภาษาคอมพิวเตอร์มีศักยภาพสูง ที่เป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายทั่วโลกในกลุ่มนักสถิติ นักวิทยาศาสตร์ข้อมูล และนักเศรษฐศาสตร์[2] นอกจากนี้ ลักษณะความเป็นโปรแกรมเปิดของ R ยังช่วยให้ R เป็นโปรแกรมที่พัฒนาไปอย่างต่อเนื่อง จากชุดคำสั่ง (package) ที่ผู้รู้ในแต่ละสาขาวิชา ได้เขียนและรวบรวมไว้เป็นหมวดหมู่ (library) โดยผู้สนใจสามารถนำชุดคำสั่งที่ถูกพัฒนา มาใช้ได้โดยไม่เสียค่าใช้จ่าย อีกทั้งในปัจจุบัน R ยัง ได้มีการพัฒนาให้สามารถใช้ได้จากเครื่องมือที่หลากหลายยิ่งขึ้น โดยสามารถใช้ได้กับทุกระบบปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ ตลอดจนอุปกรณ์สื่อสารอิเลคโทรนิกส์ต่างๆ เช่น โทรศัพท์เคลื่อนที่ เป็นต้น อนึ่ง โดยที่ R เป็นโปรแกรมที่มีขอบเขตกว้างขวาง ผู้เขียนจึงไม่ได้มุ่งหวังให้เนื้อหาเกี่ยวกับ R ในหนังสือเล่มนี้ ครอบคลุมทุกหัวข้อเกี่ยวกับ R แต่จะเน้นการกล่าวถึงแนวทางการใช้ R เพื่อเป็นเครื่องมือในการศึกษาแนวคิด และในการคำนวณทางพีชคณิตเชิงเส้นเป็นการเฉพาะ [3]

---

[1] อาทิ จากตัวอย่างใน**ทฤษฎีของกัลวาส์ (Galois theory)** ที่แสดงให้เห็นว่า สมการพหุนามกำลังห้า ซึ่งดูเสมือนว่าไม่ซับซ้อน เช่น $x^5 - x - 1 = 0$ นั้น ไม่อาจหาคำตอบ ด้วยกระบวนการหาคำตอบในเชิงวิเคราะห์ได้

[2] การใช้งาน R ในทางเศรษฐศาสตร์ ครอบคลุมหลากหลายสาขาและหัวข้อ อาทิ การประมาณการตัวแบบต่างๆ ในทางเศรษฐมิติ การศึกษาผลกระทบในเชิงเศรษฐศาสตร์ต่างๆ จากการจำลอง (simulation) การหาดุลยภาพในทฤษฎีเกม ตลอดจนหัวข้อทางคณิตศาสตร์ระดับสูง เช่น สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) และกระบวนการหาจุดที่เหมาะสมที่สุดในเชิงพลวัต (dynamic optimization) เป็นต้น

[3] ผู้สนใจและต้องการศึกษาความรู้เกี่ยวกับ R เพื่อการประยุกต์ใช้ในสาขาอื่น เช่น สถิติและเศรษฐมิติ สามารถศึกษา



รูปที่ 5.3 หน้าต่างของ R ซึ่งเผยแพร่สู่สาธารณะในวันที่ 1 พฤษภาคม 2021 ในชื่อเรียกอย่างลำลองว่า Bird Hippie โดยแถบบนของหน้าต่างจะประกอบด้วยตัวเลือกที่ผู้ใช้โปรแกรมสามารถเลือกได้โดยการคลิก ไม่ต่างจากโปรแกรมในระบบปฏิบัติการของวินโดวส์ทั่วไป ทั้งนี้ มีข้อควรสังเกตที่สำคัญคือ สำหรับโปรแกรม R นั้น คำสั่งทั้งหมดที่เคยถูกใช้ตั้งแต่เริ่มเปิดโปรแกรม และผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้คำสั่งทั้งหมดจะถูกแสดงไว้ในหน้าต่างเดียวกัน

R สามารถดาวน์โหลดมาใช้ได้โดยไม่เสียค่าใช้จ่ายจาก **www.r-project.org** และสามารถใช้ได้กับทุกระบบปฏิบัติการ ทั้งวินโดวส์ แมกซ์ และลีนุกซ์ อย่างไรก็ตาม จากประสบการณ์ของผู้เขียนพบว่า โดยที่ชุดคำสั่งใหม่ๆ หลายชุดคำสั่งมักถูกสร้างบนระบบปฏิบัติการวินโดวส์ การใช้ชุดคำสั่งดังกล่าว บนเครื่องที่ใช้ระบบปฏิบัติอื่นโดยเฉพาะอย่างยิ่งแมกซ์ อาจเกิดปัญหาความไม่สอดคล้องกันบางประการ และอาจส่งผลให้ไม่สามารถใช้บางคำสั่งใช้ได้ การดาวน์โหลดโปรแกรม R ลงบนคอมพิวเตอร์ที่ใช้ระบบปฏิบัติการวินโดวส์ จึงน่าจะเป็นทางเลือกที่ดีที่สุด ทั้งนี้ภายหลังจากที่ดาวน์โหลดและติดตั้งโปรแกรมแล้ว เมื่อเปิดโปรแกรมจะพบหน้าจอที่มีลักษณะดังรูปที่ 5.3

โปรแกรม R ดังที่แสดงในรูป 5.3 เป็น R รุ่นที่ 4.1.2 ซึ่งได้รับการเผยแพร่สู่สาธารณะในวันที่ 1 พฤษภาคม 2021 ในชื่อเรียกอย่างลำลองว่า Bird Hippie R เป็นโปรแกรมที่ทั้งข้อมูลที่ถูกป้อน และผลลัพธ์ที่ถูกประมวล จะถูกแสดงไว้ในหน้าจอเดียวกัน โดยสามารถป้อนคำสั่งหรือข้อมูลได้ โดยการพิมพ์คำสั่งหรือข้อมูลที่ต้องการหลังเครื่องหมาย $>$ ในรูป อาทิ หากพิมพ์เลข 2 และกด enter จะได้ผลลัพธ์คือ

```
> 2
[1] 2
>
```

ในบรรทัดแรกเป็นการแสดงคำสั่งหรือข้อมูลที่ถูกป้อน คือ 2 ในบรรทัดที่สองเป็นผลลัพธ์ที่ได้จากการพิมพ์เลข 2 และกด enter ซึ่งให้ผลลัพธ์ คือ 2 อันได้แก่ข้อมูลที่ถูกป้อนที่แสดงอยู่ในบรรทัดที่ $[1]$ ของผลลัพธ์ทั้งหมด และในบรรทัดที่สาม คือ เครื่องหมาย $>$ ที่แสดงการพร้อมรับคำสั่งต่อไป การใช้คำสั่งสำหรับการคำนวณทั่วไปใน R นั้น สามารถทำได้ไม่ต่างกับการใช้คำสั่งในเครื่องคิดเลขทั่วไป ดังที่ได้รวบรวมไว้ในตารางที่ 5.1

การกำหนดตัวแปรใน R สามารถทำได้โดยการใช้สัญลักษณ์ **<-** เช่น หากต้องการให้ x เป็นตัวแปรที่เท่ากับ 1 สามารถกำหนดได้จากคำสั่ง

```
> x<-1
> x
[1] 1
```

ได้จากตำราที่เป็นที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน อาทิ Venables and Ripley (2002) Racine and Hyndman (2002) และ Kleiber and Zeileis (2008) เป็นต้น

ทั้งนี้ มีข้อควรสังเกตว่า การกำหนดตัวแปรใน R เป็นการกำหนดตัวแปรที่เกิดขึ้นแล้วภายหลังจากที่ได้กด enter โดยโปรแกรมจะไม่ได้แสดงให้เห็นค่าของตัวแปรที่ถูกกำหนดขึ้น เว้นแต่จะได้มีการเรียกดูค่าที่ถูกกำหนดขึ้นเป็นการเฉพาะ โดยการพิมพ์ชื่อตัวแปรที่ถูกกำหนดขึ้นและกด enter อีกครั้ง ลักษณะดังกล่าวมีข้อดี คือ หากตัวแปรที่ถูกกำหนดขึ้นมีจำนวนมาก ค่าของตัวแปรทั้งหมดจะไม่ถูกแสดงขึ้นในหน้าจอโดยทันที หากไม่ได้ถูกเรียกดูเป็นการเฉพาะ ซึ่งช่วยไม่ให้เปลืองพื้นที่หน้าจอโดยไม่จำเป็น อาทิ หากต้องการให้ x เท่ากับกลุ่มตัวเลข ที่ตัวเลขแต่ละตัวเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ โดยแต่ละค่าห่างกัน 0.01 หน่วย จาก 0 จนถึง 10 กล่าวคือ $x = (0, 0.01, 0.02, \ldots, 9.99, 10)$ ซึ่งสามารถกำหนดได้จากคำสั่ง

```
> x<-seq(0,10,0.01)
```

จากคำสั่งข้างต้น x จะถูกสร้างขึ้นทันที หลังจากที่ได้เขียนคำสั่งและกด enter แล้ว โดยไม่แสดงให้เห็นค่าทั้งหมดของ x ซึ่งประกอบด้วยตัวเลขนับพันตัวหากไม่ได้ถูกเรียกดูเป็นการเฉพาะ[1] ทั้งนี้ มีข้อสังเกตที่สำคัญคือ การสร้างตัวแปรใน R จะถือคำสั่งล่าสุดเป็นหลัก และหากตัวแปรใดถูกสร้างในชื่อที่ซ้ำกับชื่อเดิม ตัวแปรดังกล่าวจะถูกสร้างขึ้นโดยคำสั่งใหม่ และแทนที่ตัวแปรที่เคยถูกสร้างขึ้นมาแต่เดิมโดยทันที โดยจากตัวอย่างข้างต้น $x = 1$ ที่ถูกสร้างขึ้นครั้งแรก จะถูกแทนที่โดย $x = 0, 0.01, 0.02, \ldots, 9.99, 10$ ทันที โดยไม่ได้มีการแจ้งเตือนแต่อย่างใด ผู้เขียนโปรแกรมใน R จึงควรระมัดระวัง และตรวจสอบคำสั่งอย่างละเอียดถี่ถ้วน ให้แน่ใจว่าตัวแปรที่ถูกสร้างขึ้นนั้น ถูกกำหนดโดยคำสั่งใด เพื่อป้องกันความผิดพลาดในการใช้ตัวแปรที่แตกต่างไปจากเจตนารมณ์ของผู้เขียน อนึ่ง R เป็นภาษาที่มีความอ่อนไหวกับตัวอักษรที่ใช้ในการตั้งชื่อตัวแปร ว่าเป็นอักษรตัวเล็กหรือตัวใหญ่ ดังนี้ ตัวแปร x ถูกสร้างขึ้นในชื่อ `x` ซึ่งเป็นอักษรตัวเล็ก จึงแตกต่างจากตัวแปรที่ถูกสร้างขึ้นในชื่อ `X` ซึ่งเป็นอักษรตัวใหญ่ โดยหาก `X` ยังไม่ได้ถูกสร้างขึ้น การเรียกดู `X` จะปรากฏข้อความเตือนให้รู้ว่าไม่พบสิ่งที่ถูกสร้างขึ้นในชื่อว่า `X` แต่อย่างใด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

```
> X
Error: object 'X' not found
```

ทั้งนี้ วัตถุที่ถูกสร้างขึ้นในบางกรณี อาทิ ค่าที่ได้จากการสุ่มค่าจากฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นในรูปแบบต่างๆ อาจเปลี่ยนไปเรื่อยๆ ไม่ซ้ำกันก็เป็นได้

---

[1] อีกคำสั่งหนึ่งซึ่งคล้ายคลึงกับคำสั่ง **seq** ได้แก่ คำสั่ง **rep** ซึ่งใช้สร้างตัวเลขที่ซ้ำกัน หรือรูปแบบของตัวเลขที่ซ้ำกัน อาทิ **x<-rep(1,2)** จะสร้าง $x = (1, 1)$ **x<-rep(1:3,2)** จะสร้าง $x = (1, 2, 3, 1, 2, 3)$ และ **x<-rep(1:3,each=2)** จะสร้าง $x = (1, 1, 2, 2, 3, 3)$ เป็นต้น

5.2 การใช้ R สำหรับเมตริกซ์

การสร้างเมตริกซ์ใน R เช่น การสร้าง

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

สามารถทำได้โดยการใช้คำสั่ง `matrix` ซึ่งได้ระบุค่าแต่ละค่าในเมตริกซ์ จำนวนของแถวและคอลัมน์ของเมตริกซ์ และลักษณะการเรียงค่า ที่ได้ระบุว่าจะกำหนดให้เรียงไปทีละแถว หรือทีละคอลัมน์ ดังนี้

```
> X<-matrix(c(1,2,3,4,5,6),nrow=2,ncol=3,byrow=T)
> X
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    2    3
[2,]    4    5    6
```

คำสั่งข้างต้นเป็นการสร้างเมตริกซ์ด้วยคำสั่ง `matrix` โดยระบุแต่ละค่าในเมตริกซ์ด้วยคำสั่งย่อย `c(1,2,3,4,5,6)` และกำหนดให้ค่าที่ระบุ เรียงไปตามแถวด้วยคำสั่งย่อย `byrow=T` ของเมตริกซ์ที่มีสองแถว คือ `nrow=2` และสามคอลัมน์ คือ `ncol=3` โดยหากต้องการระบุให้ค่าที่กำหนด เรียงไปตามคอลัมน์แทน ก็สามารถทำได้โดยคำสั่งย่อย `byrow=F` หรือหากจะไม่ระบุคำสั่งย่อยใดๆ ในส่วนนี้ก็จะได้เมตริกซ์ที่ค่าที่กำหนด ถูกเรียงไปตามคอลัมน์เช่นกัน ในกรณีที่ต้องการนำเข้าข้อมูล ที่มีการบันทึกไว้แล้วในรูปแบบอื่น และแปลงให้ข้อมูลดังกล่าวเป็นเมตริกซ์ สามารถนำเข้าข้อมูลที่มีอยู่แล้วได้โดยทันที ด้วยการใช้คำสั่งนำเข้าข้อมูลต่างๆ ใน R เป็นการเฉพาะ เช่น

```
> library(wooldridge)
> data('wage1')
> dim(wage1)
[1] 526 24
```

คำสั่งข้างต้นเริ่มจากการเรียกใช้ชุดคำสั่งและชุดข้อมูลโดยใช้คำสั่ง `library` ใน R [1]สำหรับใน

[1]คำสั่ง `library` เปรียบได้กับยืมหนังสือจากห้องสมุด หรือการหยิบเอาชุดคำสั่ง (package) ที่ได้ถูกติดตั้งแล้วออก

กรณีนี้ ชุดคำสั่ง `wooldridge` [1] สามารถถูกเรียกมาใช้ได้ด้วยคำสั่ง `library(wooldridge)` หลังจากที่ได้เรียกชุดคำสั่งนี้ขึ้นมาแล้ว จึงจะได้เรียกชุดข้อมูลมีชื่อว่า `wage1` มาใช้ด้วยคำสั่ง `data('wage1')` ทั้งนี้ ชุดข้อมูลดังกล่าว จะถูกจัดเก็บในรูปของกรอบข้อมูล (dataframe) ในชื่อว่า `wage1` ซึ่งมีคุณสมบัติบางส่วนคล้ายคลึงกับเมตริกซ์ อาทิ หากตรวจสอบขนาดของกรอบข้อมูลดังกล่าวด้วยคำสั่ง `dim(wage1)` ก็จะให้ผลลัพธ์ที่แสดงจำนวนแถว และคอลัมน์ของกรอบข้อมูล ซึ่งเทียบได้กับแถวและคอลัมน์ของเมตริกซ์ ที่เท่ากับ 526 แถวและ 24 คอลัมน์ ตามลำดับ โดยทั่วไปแล้ว ข้อมูลที่ถูกจัดเก็บมักจะอยู่ในรูปของตาราง ซึ่งแต่ละแถวของตารางแทนแต่ละหน่วย (observation) ของข้อมูล และแต่ละคอลัมน์แทนตัวแปรในข้อมูล ดังนี้ ค่าที่ถูกบันทุกไว้ในแถวที่ 1 และคอลัมน์ที่ 2 ของเมตริกซ์ จึงหมายถึงค่าของตัวแปรที่ 2 ที่ได้จากหน่วยที่ 1 ของข้อมูล เป็นต้น การเรียกดูข้อมูลเฉพาะในบางแถวหรือคอลัมน์ของเมตริกซ์ สามารถทำได้โดยการระบุตำแหน่งของแถวและคอลัมน์ของเมตริกซ์ไว้ในเครื่องหมาย `[,]` เช่น

```
> wage1[1,1]
[1] 3.1
> wage1[1,1:3]
  wage educ exper
1 3.1   11     2
```

คือ การเรียกดูข้อมูลในแถวที่ 1 และคอลัมน์ที่ 1 ของชุดข้อมูล `wage1` ด้วยคำสั่ง `wage1[1,1]` ซึ่งให้ผลลัพธ์คือ 3.1 อย่างไรก็ตาม การตีความค่าดังกล่าวว่าหมายถึงอะไรนั้น ย่อมต้องอาศัยความเข้าใจว่าชุดข้อมูลดังกล่าว ถูกจัดเก็บจากหน่วยของข้อมูลใด คอลัมน์แต่ละคอลัมน์หมายถึงตัวแปรใด ตลอดจนหน่วยของตัวแปรแต่ละตัวว่าเป็นเช่นไร เช่น หากข้อมูลชุดนี้เป็นข้อมูลจากการสำรวจลูกจ้าง เกี่ยวกับค่าจ้างรายชั่วโมงเฉลี่ยที่ได้รับ เมื่อคำนวณเป็นดอลลาร์สหรัฐอเมริกาในปี 1980 และข้อมูลอื่นๆ เกี่ยวกับลูกจ้าง เช่น จำนวนปีการศึกษา จำนวนปีประสบการณ์ทำงาน เพศ อายุ โดยคอลัมน์แรก คือ ข้อมูลเกี่ยวกับค่าจ้างของลูกจ้างที่สำรวจ จะสามารถตีความได้ว่า ลูกจ้างคนที่ 1 ในแบบสำรวจนี้ ได้รับค่าจ้างรายชั่วโมงเฉลี่ยเท่ากับ 3.1 ดอลลาร์ เป็นต้น การเรียกดูข้อมูลในเมตริกซ์ สามารถระบุเงื่อนไขของจำนวนแถวและคอลัมน์ที่ต้องการได้เช่นกัน เช่น การดูข้อมูลในแถวที่ 1 และคอลัมน์ที่ $1-3$ ของกรอบข้อมูล `wage1` สามารถใช้คำสั่ง `wage1[1,1:3]` คำสั่งดังกล่าวมีข้อดี คือ ผลลัพธ์ที่ได้ จะระบุแต่ละคอลัมน์ของเมตริกซ์ให้ด้วย ว่าหมายถึงตัวแปร

มาใช้ ทั้งนี้ การที่บางชุดคำสั่งใน R ไม่สามารถใช้ได้โดยทันที แต่จะต้องเรียกใช้ด้วยคำสั่ง `library` ก่อนนั้น อันที่จริงแล้วก็นับได้ว่าเป็นการดี เพราะช่วยให้โปรแกรมสามารถทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น เนื่องจากชุดคำสั่งที่ไม่ได้จำเป็นกับการวิเคราะห์ขณะนั้น จะถูกจัดเก็บเอาไว้ในที่เฉพาะ

[1] ชุดคำสั่งนี้ ถูกสร้างเพื่อรวบรวมข้อมูลที่ใช้ประกอบการศึกษาวิชาเศรษฐมิติใน Wooldridge (2009)

ในชื่อใด ซึ่งหากชื่อของตัวแปรมีความชัดเจน และหากผู้วิจัยได้ทราบถึงหน่วยของตัวแปรแล้ว จะสามารถตีความข้อมูลที่ถูกเรียกดู จากเมตริกซ์ได้โดยทันที เช่น จากผลลัพธ์ที่แสดงข้างต้น ลูกจ้างคนที่ 1 ในแบบสำรวจนี้ ได้รับค่าจ้างรายชั่วโมงเฉลี่ยเท่ากับ 3.1 ดอลลาร์ และมีการศึกษา และประสบการณ์ทำงานเท่ากับ 11 ปี และ 2 ปี ตามลำดับ

การใช้ R เพื่อคำนวณเมตริกซ์ในรูปแบบต่างๆ สามารถทำได้โดยใช้คำสั่งดังที่ได้รวบรวมไว้ในตารางที่ 5.2 ทั้งนี้ การใช้คำสั่งเพื่อการคำนวณใน R ให้ได้ผลลัพธ์ออกมานั้น ขนาดของเมตริกซ์ที่ต้องการคำนวณ จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขของการคำนวณแต่ละประเภท อาทิ การบวกหรือลบเมตริกซ์ จะทำได้ก็ต่อเมื่อเมตริกซ์มีขนาดเท่ากัน การคูณเมตริกซ์จะทำได้ ก็ต่อเมื่อจำนวนคอลัมน์ของเมตริกซ์แรก เท่ากับจำนวนแถวของเมตริกซ์หลัง และการหาเทรส ตัวกำหนด หรืออินเวอร์สของเมตริกซ์ จะทำได้ก็ต่อเมื่อเป็นเมตริกซ์จัตุรัสเท่านั้น เป็นต้น ผู้เขียนโปรแกรมจึงควรระมัดระวังและหลีกเลี่ยงความผิดพลาดจากการที่ขนาดของเมตริกซ์ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่จำเป็น

คำสั่งหนึ่งใน R ซึ่งอาจสร้างความสับสนให้กับผู้ใช้ได้ คือ `t(X)` ซึ่งหมายถึง การหาทรานส์โพสของเมตริกซ์ คือ $\boldsymbol{X}'$ ไม่ใช่การหาเทรสของเมตริกซ์ ซึ่งมีสัญลักษณ์ใกล้เคียงกันว่า $\mathrm{tr}(\boldsymbol{X})$ สำหรับการหาเทรสนั้น แม้ R จะไม่ได้มีคำสั่งโดยตรง แต่สามารถหาได้จากการใช้คำสั่ง `diag(X)` ที่สกัดเอาค่าตามแกนของเมตริกซ์จัตุรัส $\boldsymbol{X}$ ออกมาก่อน จากนั้นจึงใช้คำสั่ง `sum` เพื่อรวมเอาค่าทั้งหมดตามแกนของ $\boldsymbol{X}$ อีกขั้นตอนหนึ่ง โดยขั้นตอนทั้งหมดสามารถเขียนรวบไว้ในครั้งเดียวได้ในรูปคำสั่ง `sum(diag(X))`

การหามิติของ $\boldsymbol{X}$ สามารถทำได้โดยการใช้คำสั่ง `dim(X)` ซึ่งจะให้ผลลัพธ์ทั้งสิ้นสองค่า คือจำนวนแถวและคอลัมน์ของ $\boldsymbol{X}$ ตามลำดับ อีกคำสั่งหนึ่งที่ใกล้เคียงกับคำสั่งการหามิติ ได้แก่ คำสั่ง `length(X)` ที่ใช้หาจำนวนค่าทั้งหมดในเมตริกซ์ $\boldsymbol{X}_{m\times n}$ ซึ่งมีอยู่ทั้งสิ้น $m \times n$ ค่า ทั้งนี้ มีข้อควรระมัดระวังที่สำคัญประการหนึ่ง เกี่ยวกับคำสั่งทั้งสองข้อนี้ คือ คำสั่ง `dim(X)` จะใช้ได้ในกรณีที่ `X` ถูกกำหนดให้เป็นเมตริกซ์แล้วเท่านั้น แต่คำสั่ง `length(X)` จะใช้ได้ทั้งกรณีที่ `X` เป็นเมตริกซ์ หรือจะเป็นเพียงกลุ่มตัวเลข ดังนี้

```
> X<-c(1,2,3,4,5,6)
> length(X)
[1] 6
> dim(X)
NULL
```

ค่า	คำสั่ง R	ค่า	คำสั่ง R	ค่า	คำสั่ง R
$1+1$	`1+1`	2^3	`2^3`	e^2	`exp(2)`
$2-1$	`2-1`	$\sqrt{4}$	`sqrt(4)`	$\ln(2)$	`log(2)`
3×2	`3*2`	$2(1+2)$	`2*(1+2)`	$\log_{10}$	`log10(2)`
$10\div 2$	`10/2`	π	`pi`	$3!$	`factorial(3)`

ตารางที่ 5.1 คำสั่งเพื่อการคำนวณพื้นฐานใน R

ค่า	คำสั่ง R	ค่า	คำสั่ง R
$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}$	`X+X`	$\boldsymbol{X}\odot\boldsymbol{X}$	`X*X`
$2\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}$	`2*X-X`	$\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{X}$	`X%x%X`
$\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}'$	`X%*%t(X)`	λ จาก $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$	`eigen(A)` `$values`
$\det(\boldsymbol{X})$	`det(X)`	$\boldsymbol{x}$ จาก $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$	`eigen(A)` `$vectors`
$\mathrm{tr}(\boldsymbol{X})$	`sum(diag(X))`	$x_{11},\ldots,x_{nn}$	`diag(X)`
$\boldsymbol{X}^{-1}$	`solve(X)`	$\mathrm{diag}(x_{11},\ldots,x_{nn})$	`diag(diag(X))`
m,n จาก $\boldsymbol{X}_{m\times n}$	`dim(X)`	$\boldsymbol{X}^{+}$	`library(Mass)` `ginv(X)`
$m\times n$ จาก $\boldsymbol{X}_{m\times n}$	`length(X)`		

ตารางที่ 5.2 คำสั่งเพื่อการคำนวณทางพีชคณิตเชิงเส้นใน R

จากตัวอย่างข้างต้น X เป็นวัตถุใน R ที่ยังคงเป็นเพียงกลุ่มตัวเลข คือ $1, \ldots, 6$ ซึ่งไม่ได้ถูกเรียงในรูปของเมตริกซ์แต่อย่างใด การใช้คำสั่ง `dim(X)` จึงไม่สามารถคำนวณขนาดของเมตริกซ์ได้ ต่างจากการใช้คำสั่ง `length(X)` ที่ให้ผลลัพธ์เท่ากับจำนวนของตัวเลขทั้งหมดในกลุ่มตัวเลขนี้ และภายหลังจากที่ X ได้ถูกจัดเรียงให้เป็นเมตริกซ์ด้วยคำสั่ง `matrix` แล้ว การใช้คำสั่ง `dim(X)` จะให้ผลลัพธ์เท่ากับขนาดของเมตริกซ์ ซึ่งเท่ากับจำนวนแถว และคอลัมน์ของเมตริกซ์ตามลำดับ ดังนี้

```
> X<-matrix(c(1,2,3,4,5,6),nrow=1,ncol=6,byrow=T)
> dim(X)
[1] 1 6
```

ข้อควรระวังที่สำคัญอีกประการหนึ่ง เกี่ยวกับการใช้คำสั่งเพื่อการคำนวณเมตริกซ์ต่างๆ ในตารางที่ 5.2 คือ คำสั่งส่วนใหญ่จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อค่าต่างๆ ที่ใช้คำนวณอยู่ในรูปของเมตริกซ์ ไม่ใช่กรอบข้อมูล เช่น จากกรอบข้อมูลจากชุดข้อมูลของ Wooldridge ข้างต้น หากสกัดเอาข้อมูลจากสามคอลัมน์แรกของ `wage1` เอามาสร้างเป็น z ผลลัพธ์ที่ได้จะยังคงเป็นกรอบข้อมูลที่มีขนาดเล็กลง ไม่ใช่เมตริกซ์ โดยแม้บางคำสั่ง เช่น การหามิติ และการหาทรานส์โพส จะยังใช้ได้กับกรอบข้อมูล แต่บางคำสั่งเกี่ยวกับการคำนวณเมตริกซ์โดยตรง เช่น การคูณเมตริกซ์ จะใช้ได้กับเมตริกซ์เท่านั้น ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

```
> z<-wage1[,1:3]
> dim(z)
[1] 526 3
> dim(t(z))
[1] 3 526
> t(z)%*%z
Error in t(z) %*% z : requires numeric/  complex matrix/  vector
arguments
```

ปัญหาข้างต้นสามารถแก้ได้โดยง่าย โดยเปลี่ยนสถานะของ z จากกรอบข้อมูล ให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ก่อน ด้วยคำสั่ง `as.matrix` อาทิ

```
> z<-as.matrix(z)
```

จากนั้นจึงใช้คำสั่งเพื่อคำนวณเมตริกซ์ตามปกติ

```
> t(z)%*%z
          wage      educ     exper
wage  25446.29  41140.65  55747.03
educ  41140.65  87040.00 106539.00
exper 55747.03 106539.00 249027.00
```

ตัวอย่างที่ 5.1 การประมาณการด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ตัวแบบทางเศรษฐมิติเพื่อประมาณการความสัมพันธ์ ระหว่างการศึกษาและรายได้ เมื่อได้ควบคุมปัจจัยอื่นๆ คือ ประสบการณ์ในการทำงานให้คงที่ สามารถแสดงให้อยู่ในรูป

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 exper + \epsilon,$$

เมื่อ $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ คือ ค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบที่ต้องการประมาณการ และ ϵ คือ ค่าความคลาดเคลื่อน จากชุดข้อมูลชื่อ `wage1` ในฐานข้อมูล `Wooldridge` สามารถแสดงข้อมูลทั้งหมด ด้วยความสัมพันธ์ในรูปเมตริกซ์ได้ เท่ากับ

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}},$$

เมื่อ $\boldsymbol{y}$ คือ เวคเตอร์ขนาด 526×1 ที่บันทึกข้อมูลเกี่ยวกับค่าแรงรายชั่วโมงเฉลี่ยของแรงงานจากการสำรวจ $\boldsymbol{X}$ คือเมตริกซ์ขนาด 526×3 ซึ่งมีคอลัมน์แรกเท่ากับ 1 ทั้งหมด คอลัมน์ที่สองเท่ากับปีการศึกษาของแรงงาน และคอลัมน์ที่สามเท่ากับปีประสบการณ์ทำงานของแรงงาน $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ คือเวคเตอร์ขนาด 3×1 ที่ค่าในเวคเตอร์เท่ากับ $1, \hat{\beta}_1,$ และ $\hat{\beta}_2$ เมื่อ $\hat{\beta}_1$ และ $\hat{\beta}_2$ คือตัวประมาณการค่าพารามิเตอร์ β_1 และ β_2 ตามลำดับ และ $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ คือเวคเตอร์ขนาด 526×1 ที่บรรจุค่าความคลาดเคลื่อน (residuals) ของตัวแบบ ซึ่งเท่ากับ $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ จากความสัมพันธ์ข้างต้น ตัวประมาณการด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดจะเท่ากับ

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}} &= \underset{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{\text{argmin}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า การคำนวณค่าตัวประมาณการ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จากสมการข้างต้นด้วยข้อมูลที่มีนั้น เป็นเรื่องที่ต้องใช้เวลามากเนื่องจากเมตริกซ์ที่ต้องใช้คำนวณมีขนาดใหญ่ การใช้โปรแกรม R เข้าช่วยในการคำนวณจึงสามารถประหยัดเวลาได้อย่างมาก โดยภายหลังจากที่ได้

นำเข้าข้อมูลจากชุดข้อมูลชื่อ `wage1` แล้ว สามารถสร้างเวคเตอร์และเมตริกซ์ที่จำเป็นได้ โดยเริ่มจากการระบุให้ $\boldsymbol{y}$ คือ ค่าแรงรายชั่วโมงเฉลี่ยของแรงงานที่ได้จากการสำรวจ ซึ่งได้จากข้อมูลในคอลัมน์แรกของฐานข้อมูลชื่อ `wage1` จากนั้นจึงสร้างเวคเตอร์รายได้ ซึ่งเท่ากับคอลัมน์แรกของข้อมูล ดังนี้

```
> library(wooldridge)
> data('wage1')
> y<-wage1[,1]
```

ในการสร้างเมตริกซ์ของตัวแปรอธิบายนั้น เนื่องจากฐานข้อมูลไม่ได้บรรจุค่าคงที่ใดๆ ไว้ จึงจำเป็นต้องสร้างคอลัมน์ของค่าคงที่ ซึ่งทุกค่าในคอลัมน์เท่ากับ 1 เป็นการเฉพาะ จากนั้นจึงรวมเอาคอลัมน์ดังกล่าว เข้ากับคอลัมน์ที่สองและสามของฐานข้อมูล ซึ่งเท่ากับจำนวนปีการศึกษา และจำนวนปีประสบการณ์ทำงานตามลำดับ และแปลงข้อมูลทั้งหมด ที่ยังคงมีสถานะเป็นกรอบข้อมูลให้เป็นเมตริกซ์ด้วยคำสั่ง

```
> X<-cbind(1,wage1[,2:3])
> X<-as.matrix(X);y<-as.matrix(y)
```

และในขั้นตอนสุดท้าย การคำนวณค่าตัวประมาณการด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด สามารถทำได้โดยการคำนวณเมตริกซ์และเวคเตอร์จากสูตร กล่าวคือ

```
> beta.hat<-solve(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%y
> beta.hat
            [,1]
1     -3.3905395
educ   0.6442721
exper 0.0700954
```

อนึ่ง ในการคูณเมตริกซ์ $\boldsymbol{X}$ และ $\boldsymbol{y}$ ในลักษณะ $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$ เป็นการเฉพาะนั้น สามารถใช้คำสั่ง `crossprod` ใน R เพื่อคำนวณการคูณไขว้ (cross product) ของเมตริกซ์ซึ่งเป็นคำสั่งที่มีความกระชับกว่า[1] สำหรับการคำนวณดังกล่าวโดยตรง โดยการใช้ `crossprod(X,y)` จะให้ผลลัพธ์

[1] คำสั่ง `crossprod` เป็นไปในลักษณะเดียวกันกับการใช้ $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$ สำหรับการคูณเวคเตอร์ ซึ่งสามารถทำได้

เช่นเดียวกับ `t(X)%*%y` และ `crossprod(X)` จะให้ผลลัพธ์เช่นเดียวกับ `t(X)%*%X`

```
> beta.hat2<-solve(crossprod(X))%*%crossprod(X,y)
> beta.hat2
           [,1]
1     -3.3905395
educ  0.6442721
exper 0.0700954
```

จากผลลัพธ์ของการประมาณการตัวแบบข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า การศึกษาของแรงงานที่เพิ่มขึ้น 1 ปี จะส่งผลให้ค่าจ้างเฉลี่ยรายชั่วโมงของแรงงานเพิ่มขึ้นโดยเฉลี่ยประมาณ 64เซนท์ เมื่อได้ควบคุมปัจจัยอื่นคือจำนวนปีประสบการณ์ทำงานให้คงที่ □

ตัวอย่างที่ 5.2 การเขียนฟังก์ชั่นใน R จุดเด่นสำคัญข้อหนึ่งของ R คือ การที่ผู้ใช้สามารถเขียนฟังก์ชั่น เพื่อใช้กับสิ่งที่ต้องการคำนวณเป็นการเฉพาะด้วยตนเอง โดยไม่จำเป็นต้องใช้ฟังก์ชั่นที่มีอยู่แล้วเท่านั้น อาทิ จากตารางที่ 5.2 แม้ R จะไม่มีคำสั่งเพื่อคำนวณหาเทรสของเมตริกซ์เป็นการเฉพาะ แต่หากผู้ใช้ประสงค์จะสร้างคำสั่งเพื่อใช้หาเทรสของเมตริกซ์โดยตรง ก็อาจทำได้ โดยใช้คำสั่ง `function` ดังนี้

```
> tr<-function(X){trace<-sum(diag(X))
return(trace)
}
```

โดยหลังจากที่คำสั่ง `tr` ได้ถูกสร้างขึ้นแล้ว หากใช้คำสั่งดังกล่าวกับเมตริกซ์จัตุรัสใดๆ จะให้ผลรวมของค่าตามแกนของเมตริกซ์ ดังที่ระบุไว้ในฟังก์ชั่น ตามนิยามของเทรสของเมตริกซ์ ทั้งนี้ ในการสร้างคำสั่งใดๆ ขึ้นใหม่นั้น ควรหลีกเลี่ยงไม่ให้ชื่อของคำสั่งที่ถูกสร้างขึ้นใหม่ ซ้ำกับชื่อของคำสั่งอื่นๆ ที่ถูกบรรจุไว้ใน R อยู่ก่อนแล้ว เช่น หากตั้งชื่อคำสั่งว่า `t` ก็จะเป็นการซ้ำซ้อนกับคำสั่งทรานส์โพส ซึ่งมีอยู่ก่อนแล้ว เป็นต้น

จากตัวอย่างการใช้คำสั่ง `function` ข้างต้น สามารถสร้างคำสั่งในลักษณะเดียวกัน เพื่อใช้ประมาณการค่าพารามิเตอร์ ในตัวแบบสมการถดถอยเชิงเส้นได้ในคราวเดียว เช่น หากมีข้อมูลตัวแปรตามและตัวแปรอธิบายต่างๆ ในรูปของเวคเตอร์แล้ว สามารถสร้างคำสั่ง `linear` เพื่อใช้

ทันที โดยไม่ต้องหาทรานส์โพส เพื่อให้มิติสอดคล้องกับสำหรับการคูณก่อน ดังเช่นการคูณกันของเมตริกซ์

ในการคำนวณ $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y})$ ได้ โดยผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้คำสั่งนี้ จะเท่ากับเวค-เตอร์ของค่าประมาณการพารามิเตอร์ เมื่อค่าแรกเท่ากับประมาณการจุดตัด และค่าอื่นๆ เท่ากับค่าประมาณการผลกระทบของตัวแปรอธิบายแต่ละตัวต่อตัวแปรตาม ตามลำดับ

```
> linear<-function(y,...){
x<-do.call(cbind,list(...))
X<-cbind(1,x)
beta.hat<-solve(crossprod(X))%*%crossprod(X,y)
return(beta.hat)}
```

ทั้งนี้ คำสั่งที่ถูกสร้างขึ้นภายใต้ชื่อ `linear` นี้ เป็นเพียงชื่อสมมติซึ่งสามารถกำหนดให้เป็นชื่ออื่นได้ ในลักษณะเดียวกันกับการกำหนดชื่อของตัวแปร □

ตัวอย่างที่ 5.3 การแสดงคำตอบจาก R ในรูปเศษส่วน โดยทั่วไปแล้ว คำตอบจากการคำนวณใน R จะอยู่ในรูปทศนิยม อย่างไรก็ตาม ในหลายกรณี การแสดงคำตอบที่ต้องการในรูปเศษส่วนอาจมีความกระชับกว่า เช่น ในการหาตัวกำหนดของเมตริกซ์

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

หากต้องการให้คำตอบอยู่ในรูปเศษส่วน สามารถใช้คำสั่ง `fractions` จากชุดคำสั่ง `MASS` ดังนี้

```
> library(MASS)
> X<-matrix(c(-1,2,1/2,0,1,0,1/3,0,1),ncol=3)
> fractions(X)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  -1    0  1/3
[2,]   2    1    0
[3,] 1/2    0    1
> fractions(det(X))
[1] -7/6
```

□

5.3 R และการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

จากที่ได้ทราบกันแล้วว่าการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ให้ได้ว่าระบบสมการดังกล่าวมีคำตอบหรือไม่ และหากมีคำตอบจะเป็นเท่าไรนั้น ขึ้นอยู่กับอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเป็นสำคัญ การหาอันดับของเมตริกซ์ สามารถทำได้โดยใช้ชุดคำสั่ง `Matrix` และใช้คำสั่ง `rankMatrix` ดังตัวอย่างต่อไปนี้

```
> library(Matrix)
> M1<-matrix(c(1,1,1,1),ncol=2)
> rankMatrix(M1)
[1] 1
```

จากข้างต้น จะเห็นได้ว่า

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งเป็นเมตริกซ์ขนาด 2×2 ที่ทั้งสองคอลัมน์มีค่าเท่ากัน มีอันดับเท่ากับ 1 ในอีกตัวอย่างหนึ่ง หากพิจารณาอันดับของ

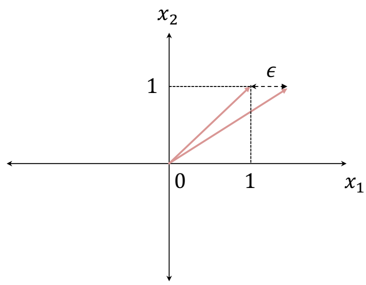
$$M_2 = \begin{pmatrix} 1+\epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+\epsilon & 1 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}$$

เมื่อ $\lim_{\epsilon \to 0^+} 1+\epsilon = 1$ เนื่องจาก $1+\epsilon \neq 1$ คอลัมน์ทั้งสองของ M_2 จึงเป็นอิสระระหว่างกัน อันดับของ M_2 จึงย่อมต้องเท่ากับ 2 อย่างไรก็ตาม หากคำนวณหาอันดับของ M_2 ด้วยคำสั่ง `rankMatrix` เมื่อกำหนดให้ $\epsilon = 10^{-20}$

```
> epsilon<-10^(-20)
> M2<-matrix(c(1+epsilon,1,1,1),ncol=2)
> rankMatrix(M2)
[1] 1
```

จะได้ผลลัพธ์คืออันดับของ M_2 เท่ากับ 1 ซึ่งเป็นคำตอบที่ผิด

ความคลาดเคลื่อนของการหาอันดับของ M_2 ข้างต้นเป็นตัวอย่างที่ดี ที่แสดงให้เห็นกลไกการ



รูปที่ 5.4 ความคลาดเคลื่อนของการหาคำตอบเชิงตัวเลข จากเมตริกซ์

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1+\epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

คอลัมน์ที่หนึ่งและสองของเมตริกซ์ สร้างเส้นตรงจากจุดกำเนิดไปยังจุด $(1+\epsilon, 1)$ และ $(1,1)$ ตามลำดับ และโดยที่เส้นตรงทั้งสองเป็นอิสระระหว่างกัน อันดับของเมตริกซ์จึงเท่ากับ 2 อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่ ϵ มีค่าน้อยมาก การหาอันดับของเมตริกซ์ด้วยวิธีการเชิงตัวเลข อาจให้ข้อสรุปที่ผิดพลาด โดยหากค่าความทน (tolerance) ที่กำหนด ไม่เพียงพอที่จะตรวจพบความแตกต่างระหว่างเส้นตรงทั้งสองเส้นข้างต้น คำตอบจากวิธีการในเชิงตัวเลขอาจเท่ากับ 1 ซึ่งเป็นคำตอบที่คลาดเคลื่อน

หาอันดับของเมตริกซ์ด้วยวิธีการในเชิงตัวเลข ซึ่งต่างจากการหาคำตอบในเชิงวิเคราะห์ ด้วยการจัดเมตริกซ์ให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแถว ดังนี้ หากพิจารณาแต่ละคอลัมน์ของ M_2 ว่าเปรียบได้กับเวคเตอร์จากจุดกำเนิด ซึ่งชี้ไปยังจุดในระนาบสองมิติแล้ว เส้นตรงที่ชี้ไปยังจุด $(1+\epsilon, 1)$ และเส้นตรงที่ชี้ไปยังจุด $(1, 1)$ จึงย่อมเป็นเส้นตรงสองเส้นที่เป็นอิสระระหว่างกัน อย่างไรก็ตาม ในกรณีข้างต้นที่ ϵ มีขนาดเล็กมาก การใช้วิธีการในเชิงตัวเลข อาจไม่พบความแตกต่างเช่นที่ว่า ซึ่งนำไปสู่ข้อสรุปที่ผิดพลาด

การแก้ปัญหาข้างต้นสามารถทำได้ โดยการระบุระดับความแตกต่างที่ใช้ในการหาคำตอบในเชิงตัวเลข ว่าขนาดของความแตกต่าง จะต้องไม่เกินกว่าเท่าไรจึงจะสรุปได้ว่าไม่มีความแตกต่าง ความแตกต่างเช่นที่ว่านี้มีชื่อเรียกใน R ว่า**ความทน (tolerance)** โดยหากกำหนดให้ความทนมีค่าน้อยลงยิ่งขึ้น ก็จะได้ข้อสรุปที่มีความชัดเจนยิ่งขึ้น และสามารถหลีกเลี่ยงการสรุปผลที่ผิดพลาดในกรณีที่ตัวเลขที่ถูกใช้ในการคำนวณ มีความแตกต่างเพียงเล็กน้อยดังตัวอย่างข้างต้น อย่างไรก็ตาม การกำหนดค่าความทนที่น้อยลง มักส่งผลให้ระยะเวลาในการคำนวณนานขึ้น ผู้วิจัยจึงควรคำนึงถึงข้อดีและข้อเสียดังกล่าวควบคู่กันไป และอาจพิจารณาปรับค่าความทนให้น้อยลง เฉพาะในกรณีที่ตัวเลขที่ใช้ในการคำนวณมีความแตกต่างกันน้อยมาก ซึ่งต้องการความละเอียดถี่ถ้วนในการคำนวณเป็นพิเศษเท่านั้น จากข้างต้น เมื่อได้ปรับค่าความทนให้น้อยลงเท่ากับ 10^{-30} ด้วยการใช้คำสั่งย่อย `tol` ใน `rankMatrix` แล้ว

```
> rankMatrix(M2,tol=10^-30)
[1] 2
```

จะได้ผลลัพธ์คืออันดับของ M_2 เท่ากับ 2 ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูก

จากที่ได้ทราบกันดีแล้วว่า การหาอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้น ดังที่ได้กล่าวถึงข้างต้น แม้จะไม่ใช่การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยตรงก็ตาม แต่มีความสำคัญยิ่งในการพิจารณาระบบสมการเชิงเส้น ว่ามีคำตอบหรือไม่ และหากมีคำตอบ จะมีคำตอบเพียงชุดเดียว หรือมากมายไม่จำกัด การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ด้วยวิธีการเชิงตัวเลขด้วยโปรแกรมเช่น R จึงย่อมต้องถูกนำมาใช้ควบคู่ กับความรู้เกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งข้อเท็จจริงเกี่ยวกับคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในรูป $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ เมื่อ $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ ที่ได้รวบรวมไว้ในบทที่หนึ่ง ซึ่งอาจจำแนกเป็นสองกรณี คือ

1. **กรณีที่** $m = n$ การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในกรณีที่ $m = n$ หรือระบบสมการเชิงเส้น ที่มีจำนวนตัวแปรและสมการเท่ากัน สามารถทำได้โดยการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ ใน

กรณีนี้ การหาคำตอบด้วยวิธีในเชิงตัวเลข สามารถทำได้อย่างรวดเร็วและไม่ซับซ้อน โดยจะใช้วิธีการเขียนคำสั่งใน R ให้คำนวณ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ โดยตรงก็ได้ หรือจะใช้คำสั่งสำเร็จรูปคือ `solve` ใน R ให้ได้คำตอบก็ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.4 สำหรับระบบสมการเชิงเส้นซึ่งอยู่ในรูป

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ในกรณีนี้ เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ซึ่งมีขนาด 2×2 เป็นเมตริกซ์ซึ่งสามารถหาอินเวอร์สได้ การใช้คำสั่ง `solve` จะให้คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นหนึ่งชุด คือ $x_1 = x_2 = 0$ จาก

```
> A<-matrix(c(1,1,1,-1),ncol=2); b<-matrix(c(0,0),ncol=1)
> solve(A,b)
     [,1]
[1,]    0
[2,]    0
```

อนึ่ง ในการใช้คำสั่ง `solve` นั้น หากกำหนดคำสั่งในรูป `solve(A,b)` ก็จะให้คำตอบของระบบสมการโดยตรง และหากกำหนดคำสั่งในรูป `solve(A)` ก็จะให้อินเวอร์สของเมตริกซ์ □

อย่างไรก็ตาม หากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ไม่สามารถหาอินเวอร์สได้ เช่น สำหรับระบบสมการเชิงเส้นในรูป

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

การใช้คำสั่ง `solve` เมื่อ $b_1 = b_2 = 0$ จะให้ผลลัพธ์คือ

```
> A<-matrix(c(1,1,1,1),ncol=2); b<-matrix(c(0,0),ncol=1)
> solve(A,b)
Error in solve.default(A, b) :
Lapack routine dgesv: system is exactly singular: U[2,2] = 0
```

ซึ่งแสดงความผิดพลาดจากการใช้คำสั่งดังกล่าว เนื่องจากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์เอก

ฐาน (singular matrix) สำหรับกรณีข้างต้นซึ่งไม่ใช่ระบบสมการเชิงเส้นที่มีคำตอบเพียงชุดเดียวนั้น การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในกรณีนี้ จำเป็นต้องใช้ความรู้พื้นฐานเรื่องระบบสมการเชิงเส้นประกอบ กล่าวคือ หาก $b_1 = b_2$ ระบบสมการนี้จะมีคำตอบมากมายไม่จำกัดที่อยู่ในรูป $x_2 = b_1 - x_1, x_1 \in \mathbb{R}$ และหาก $b_1 \neq b_2$ ระบบสมการนี้จะไม่มีคำตอบ

ทั้งนี้ การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์เอกฐานด้วยวิธีการในเชิงตัวเลขนั้น หากใช้ความรู้เรื่องอันดับประกอบการพิจารณา โดยใช้คำสั่ง `rankMatrix` เพื่อเปรียบเทียบอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ และสัมประสิทธิ์ขยาย อาทิ

```
> A.hat<-cbind(A,b)
> rankMatrix(A)
[1] 1
> rankMatrix(A.hat)
[1] 2
```

จากข้างต้น โดยที่อันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ และเมตริกซ์สัมประสิทธ์ขยายต่างเท่ากับ 1 แต่น้อยกว่าจำนวนคอลัมน์ของเมตริกซ์ซึ่งเท่ากับ 2 ระบบสมการนี้จึงมีคำตอบมากมายไม่จำกัด เป็น-ต้น

2. **กรณีที่** $m \neq n$ ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย m สมการและ n ตัวแปร โดยที่การใช้คำสั่ง `solve` จะใช้ได้กับกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ เป็นเมตริกซ์จัตุรัสที่ไม่ใช่เมตริกซ์เอกฐานเท่านั้น การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในกรณีนี้ จึงจำเป็นต้องอาศัยความรู้ในเชิงวิเคราะห์ เกี่ยวกับข้อเท็จจริงของคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ดังที่ได้กล่าวไว้โดยละเอียดในบทที่ 1 เข้าประกอบกับการใช้คำสั่งด้วยโปรแกรม R และโดยที่เป็นทราบกันดีว่า การจะพิจารณาว่าลักษณะคำตอบของระบบสมการ ที่ประกอบด้วยจำนวนสมการและตัวแปรต่างกันจะเป็นเช่นใดนั้น ขึ้นอยู่กับอันดับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นสำคัญ ดังนี้ กระบวนการหาคำตอบของระบบสมการในกรณีนี้ จึงย่อมต้องเริ่มจากการหาอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ และสัมประสิทธิ์ขยายด้วยคำสั่ง `rankMatrix` ก่อน จากนั้นจึงแยกพิจารณาต่อไปเป็นสามกรณี โดยในกรณีแรกหากอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ และสัมประสิทธิ์ขยายไม่เท่ากัน ระบบสมการจะไม่มีคำตอบในกรณีที่สอง หากอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ และสัมประสิทธิ์ขยายเท่ากัน และเท่ากับจำนวนคอลัมน์ของเมตริกซ์ ระบบสมการจะมีคำตอบหนึ่งชุด และในกรณีที่สาม หากอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ และสัมประสิทธิ์ขยายเท่ากัน แต่น้อยกว่าจำนวนคอลัมน์ของเมตริกซ์ ระบบสมการจะมีคำตอบมากมายไม่จำกัด

อนึ่ง ในกรณีที่ระบบสมการมีคำตอบหนึ่งชุดนั้น คำตอบของระบบสมการจะสามารถหาได้ ด้วยคำสั่ง `solve` ดังที่อธิบายไว้ในกรณี $m = n$ ข้างต้น อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่ระบบสมการไม่มีคำตอบเนื่องจากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์เอกฐาน การหาคำตอบของระบบสมการย่อมต้องอิงกับการพิจารณาอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.5 สำหรับระบบสมการเชิงเส้นซึ่งอยู่ในรูป

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ในกรณีนี้ เมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์ที่ไม่สามารถหาอินเวอร์สได้ การใช้คำสั่ง `solve` จะให้ผลลัพธ์คือ

```
> A<-matrix(c(1,1,1,1),ncol=2); b<-matrix(c(2,1),ncol=1)
> solve(A,b)
Error in solve.default(A, b) :
  Lapack routine dgesv: system is exactly singular: U[2,2] = 0
```

ผลจากการใช้คำสั่ง `solve` แสดงให้เห็นข้อผิดพลาดว่าการหาคำตอบของระบบสมการในรูป $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ด้วยการนำเอาอินเวอร์สของ $\boldsymbol{A}$ คูณทั้งสองข้างของสมการ ซึ่งให้คำตอบคือ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ นี้ จะใช้ได้ ก็ต่อเมื่อเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ สามารถหาอินเวอร์สได้เท่านั้น ระบบสมการข้างต้น ซึ่งเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์เอกฐาน (singular matrix) จึงไม่มีคำตอบ ในการนี้ หากพิจารณาอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์และสัมประสิทธิ์ขยาย จะได้ว่า

```
> A.hat<-cbind(A,b)
> rankMatrix(A)
[1] 1
> rankMatrix(A.hat)
[1] 2
```

ระบบสมการซึ่งอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ น้อยกว่าสัมประสิทธิ์ขยายดังข้างต้น จึงเป็นระบบสมการที่ไม่มีคำตอบ □

5.4 ชุดคำสั่ง matlib

ชุดคำสั่ง **matlib** เป็นที่รวบรวมคำสั่งที่เกี่ยวข้องกับพีชคณิตเชิงเส้นจำนวนมาก ที่ถูกออกแบบให้ติดตั้ง และใช้ได้กับทุกระบบปฏิบัติการ [1]

การใช้ชุดคำสั่ง **matlib** เริ่มจากการติดตั้งชุดคำสั่งด้วยคำสั่ง **install.packages** จากนั้นจึงหยิบชุดคำสั่งที่ได้ติดตั้งแล้วมาใช้ด้วยคำสั่ง **library** ดังข้างต้น

```
> install.packages("matlib")
> library(matlib)
```

ทั้งนี้มีข้อสังเกตที่สำคัญคือการติดตั้งชุดคำสั่งด้วยคำสั่ง **install.packages** นั้นจะต้องใส่ชื่อชุดคำสั่งในวงเล็บไว้ในเครื่องหมายอัญประกาศเสมอ ต่างจากการเรียกชุดคำสั่งมาใช้ด้วยคำสั่ง **library** ซึ่งใส่ชื่อชุดคำสั่งไว้แต่เพียงในวงเล็บเท่านั้น

ต่อไปนี้จะเป็นการศึกษาคำสั่งที่น่าสนใจบางคำสั่งในชุดคำสั่ง **matlib** โดยคำสั่งที่จะได้เลือกมาพิจารณาในที่นี้ จะไล่เรียงไปตามเนื้อหาของหนังสือ กล่าวคือ ในส่วนแรกจะเป็นคำสั่งที่เกี่ยวกับการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ถัดไปจึงเป็นคำสั่งเกี่ยวกับโอเปอเรเตอร์ของเมตริกซ์ ค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะ และเรขาคณิตของพีชคณิตเชิงเส้นไปลำดับสุดท้าย[2]อนึ่ง แม้บางคำสั่งใน **matlib** จะให้ผลลัพธ์เดียวกันกับการใช้คำสั่งในชุดคำสั่งมาตรฐานอื่นๆ เช่น **Matrix** ดังที่ได้พิจารณาไปแล้วก่อนหน้านี้ อาทิ การหาอันดับของเมตริกซ์ **A** นั้น หากต้องการใช้คำสั่งใน **Matrix** ก็จะใช้คำสั่ง แต่หากต้องการใช้คำสั่งใน **matlib** ก็จะเป็น **R(A)** เป็นต้น อย่างไรก็ตาม จากที่ **matlib** เป็นชุดคำสั่งที่ถูกสร้างขึ้นเพื่อศึกษาและใช้ในการคำนวณต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับพีชคณิตเชิงเส้นเป็นการเฉพาะ จึงมีคำสั่งที่หลากหลายกว่าซึ่งอาจไม่ครอบคลุมอยู่ในชุดคำสั่ง **Matrix**

---

[1] อย่างไรก็ตาม จากที่ผู้เขียนได้ทดลองใช้คำสั่งจากห้องสมุด **matlib** นี้ทั้งในระบบปฏิบัติการแบบ Windows และ macOS แล้ว กลับพบว่าแม้ทุกคำสั่งจะใช้การได้ดีในระบบ Windows แต่สำหรับ macOS แล้วนั้น ออกจะมีปัญหาอยู่มาก อีกทั้งลักษณะของปัญหาที่เกิดขึ้นก็ดูจะแตกต่างกันไปในแต่ละเครื่อง แม้กับบางเครื่องอาจเพียงไม่สามารถใช้บางคำสั่งได้ แต่กับบางเครื่องนั้นถึงกับไม่สามารถติดตั้งห้องสมุด **matlib** นี้ได้เลยทีเดียว สำหรับสาเหตุของปัญหานี้หากให้สันนิษฐาน ก็อาจเป็นได้ว่าผู้สร้างห้องสมุดนี้พัฒนาชุดคำสั่งต่างๆ จากระบบปฏิบัติการแบบ Windows เป็นหลัก ซึ่งอาจไม่รองรับการเรียกใช้จากอีกระบบปฏิบัติการหนึ่งก็เป็นได้ ด้วยเหตุผลนี้ ผู้เขียนจึงใคร่แนะนำให้ผู้ประสงค์จะใช้คำสั่งต่างๆ จากห้องสมุดนี้จากระบบปฏิบัติการแบบ Windows เป็นหลัก จนกว่าปัญหาต่างๆ ที่เกิดขึ้นกับการใช้ห้องสมุดในระบบปฏิบัติการแบบ macOS ได้รับการแก้ไข

[2] ทั้งนี้ ผู้สนใจศึกษาเกี่ยวกับชุดคำสั่ง **matlib** โดยละเอียด สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากคู่มืออธิบายชุดคำสั่งซึ่งสามารถดาวน์โหลดได้จาก https://github.com/friendly/matlib

และสมควรแก่การศึกษาอย่างละเอียด

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

ดังที่ได้ทราบกันก่อนหน้านี้แล้วว่า ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ หาก จำนวนสมการและตัวแปรเท่ากัน เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\boldsymbol{A}$ จะเป็นเมตริกซ์จัตุรัส และหากอันดับของระบบสมการเท่ากับจำนวนแถวและคอลัมน์ของ $\boldsymbol{A}$ การหาคำตอบของระบบสมการจะทำได้โดยง่าย โดยการหาอินเวอร์สของ $\boldsymbol{A}$ และนำไปคูณเข้ากับทั้งสองฝั่งของสมการ อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่ระบบสมการมีจำนวนสมการและตัวแปรไม่เท่ากัน ซึ่งมักส่งผลให้ระบบสมการไม่มีคำตอบหรือมีคำตอบมากมายไม่จำกัดนั้น การระบุลักษณะคำตอบของระบบสมการด้วยวิธีเช่นการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์ จำเป็นที่จะต้องลดรูปเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยายให้อยู่ในรูปการจัดเรียงลำดับแถว (row echelon form) เสียก่อน ซึ่งสามารถทำได้โดยใช้คำสั่ง `echelon` ในชุดคำสั่ง `matlib` ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.6 ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

เป็นระบบสมการซึ่งไม่มีคำตอบ เนื่องจากหากได้สลับที่สองขึ้นมาเป็นแถวแรก แถวที่สามขึ้นมาเป็นแถวที่สอง และแถวแรกไปเป็นแถวที่สาม จากนั้นจึงนำเอา -1 คูณแถวแรกและในไปรวมกับแถวที่สอง และนำเอา -2 คูณกับแถวแรกและนำไปรวมกับแถวที่สาม จากนั้นจึงหารแถวที่สองด้วย -2 จะได้เมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยาย ซึ่งได้จัดเรียงให้อยู่ในรูปการจัดเรียงลำดับแถว คือ

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

จากข้างต้น โดยที่อันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ คือ 2 น้อยกว่าอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยาย คือ 3 ระบบสมการนี้จึงไม่มีคำตอบ ทั้งนี้การจัดเรียง $\boldsymbol{A}$ ให้อยู่ในรูปการจัดเรียงลำดับแถวสามารถทำได้โดยคำสั่ง

```
> A<-matrix(c(2,2,1,1,1,-1),3,2, byrow=TRUE); b<-c(1,0,2)
> echelon(A,b,reduced=FALSE,fractions=TRUE)
     [,1] [,2]  [,3]
[1,]    1    1   1/2
[2,]    0    1  -3/4
[3,]    0    0  -1/2
```

จากคำสั่งข้างต้น การใช้คำสั่ง **echelon** จะให้ผลลัพธ์ออกมาเป็นเมตริกซ์ที่ได้ถูกจัดเรียงลำดับแถวแบบลดรูป และค่าในเมตริกซ์ซึ่งเป็นทศนิยม โดยหากต้องการให้ได้ผลลัพธ์ แต่เพียงเมตริกซ์ที่ได้ถูกจัดเรียงลำดับแถว และค่าซึ่งเป็นเศษส่วน สามารถใช้คำสั่งย่อย **reduced=FALSE** ทั้งนี้ มีข้อสังเกตที่สำคัญคือ ผลลัพธ์ที่ได้จากคำสั่ง **echelon** ข้างต้น เป็นเมตริกซ์ที่แม้ไม่ตรงกับผลที่ได้จากการคำนวณข้างต้น[1] แต่จะให้*ข้อสรุป*ที่ตรงกัน กล่าวคือ ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ เนื่องจากอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยายที่จัดเรียงลำดับแล้ว มากกว่าอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ความแตกต่างกันของผลที่ได้จากข้างต้นนี้ ย้ำให้เห็นข้อเท็จจริงที่ได้กล่าวถึงก่อนหน้านี้แล้วว่า การแปลงให้เมตริกซ์อยู่ในรูปจัดเรียงลำดับแถวนั้น ไม่ได้นำไปสู่ผลลัพธ์ที่ตายตัวว่าจะต้องเหมือนกัน แต่จะขึ้นอยู่กับวิธีการและลำดับขั้นตอน ที่เลือกใช้ในการแปลงเป็นสำคัญ โดยสำหรับกระบวนการใน R นั้น จะเริ่มจากการทำให้จุดหมุนในแถวแรกของเมตริกซ์เท่ากับ 1 เสียก่อน จากนั้นจึงใช้ค่าในแถวแรกเป็นหลัก เพื่อแปลงแถวอื่นๆ ให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแถว โดยการนำเอา -1 คูณกับแถวที่หนึ่งและนำไปรวมกับแถวที่สองและสาม จากนั้นจึงสลับแถวที่สองและสาม และนำเอา -2 หารแถวที่สอง ซึ่งให้ผลลัพธ์คือ

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & -0.75 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{array}\right)$$

ซึ่งให้ผลสรุปไม่แตกต่างจากการแปลงเมตริกซ์ให้อยู่รูปการเรียงลำดับแถว ด้วยการคำนวณในครั้งแรก อย่างไรก็ตาม การแปลงเมตริกซ์ด้วยการคำนวณเองนั้น ดูจะให้ผลลัพธ์ที่เรียบง่ายงดงามกว่าการใช้คำสั่งคอมพิวเตอร์ จากกระบวนการที่มีความเป็นศิลปะมากกว่า เช่น ในการคำนวณเองซึ่งได้สลับแถวที่สองขึ้นมาไว้ในแถวแรกก่อนนั้น จะช่วยให้สามารถใช้แถวแรกในเมตริกซ์ใหม่ แปลง

---

[1] ทั้งนี้ แม้เมตริกซ์ทั้งสองจะต่างกัน แต่ถือเป็นเมตริกซ์ที่เทียบเคียงกันได้ (equivalent) ด้วยว่าผลลัพธ์คือเมตริกซ์จากการคำนวณข้างต้น สามารถแปลงให้เท่ากับผลลัพธ์คือเมตริกซ์ที่ได้จากการใช้คำสั่ง **echelon** ได้ โดยหากนำ $1/2$ คูณแถวสุดท้ายและนำไปรวมกับแถวที่หนึ่ง และนำเอา $-1/4$ คูณกับแถวสุดท้ายและนำไปรวมกับแถวที่สอง และนำเอา $-1/2$ คูณกับแถวสุดท้าย จะได้เมตริกซ์จากการใช้คำสั่ง **echelon**

ให้แถวอื่นๆ อยู่ในรูปการเรียงลำดับแถวได้ทันที โดยไม่จำเป็นต้องทิ้งให้บางค่าในเมตริกซ์ อยู่ในรูปจุดทศนิยมดังเช่นการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ □

อนึ่ง คำสั่ง `echelon` ยังมีคำสั่งย่อยที่น่าสนใจอีกมาก อาทิ การกำหนดให้ค่าในเมตริกซ์อยู่ในรูปเศษส่วนไม่ใช่ทศนิยม ก็สามารถทำได้โดยใช้คำสั่งย่อย `fractions=TRUE` หรือหากต้องการเห็นการแปลงเมตริกซ์แต่ละขั้นตอนโดยละเอียด แทนคำตอบซึ่งเป็นผลลัพธ์ท้ายสุดก็สามารถใช้คำสั่งย่อย `verbose=TRUE` เพิ่มเติมได้ ทั้งนี้ ในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์และสัมประสิทธิ์แบบขยายมีค่าเท่ากัน กล่าวคือ เมื่อระบบสมการมีคำตอบเพียงชุดเดียว คำสั่ง `echelon` จะแปลงเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ให้เป็นเมตริกซ์เอกฐาน โดยคำตอบของระบบสมการ จะเท่ากับค่าในคอลัมน์สุดท้ายในเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยาย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.7 ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

มีคำตอบชุดเดียวคือ $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ ซึ่งสามารถหาได้โดยใช้คำสั่ง

```
> A<-matrix(c(1,1,1,-1),2,2, byrow=TRUE); b<-c(1,0)
> echelon(A,b)
     [,1] [,2]  [,3]
[1,]    1    0   0.5
[2,]    0    1   0.5
```

ทั้งนี้ มีข้อสังเกตจากที่ได้กล่าวไว้แล้วข้างต้นคือ สองคอลัมน์แรกของผลลัพธ์ข้างต้น จะประกอบกันเป็นเมตริกซ์เอกฐาน และคอลัมน์สุดท้ายจะเท่ากับคำตอบของระบบสมการ □

อีกคำสั่งหนึ่งในชุดคำสั่ง `matlib` ซึ่งเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการหาคำตอบของระบบสมการ คือ คำสั่ง `Solve` คำสั่งนี้มีลักษณะการสะกดคำ โดยใช้อักษรขึ้นต้นที่เป็นอักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่ ซึ่งต่างจากคำสั่ง `solve` ในชุดคำสั่ง `Matrix` ดังที่ได้พิจารณาก่อนหน้านี้แล้ว นอกจากการสะกดคำที่แตกต่างกันแล้ว การใช้คำสั่งทั้งสองยังมีความแตกต่างกันพอสมควร กล่าวคือ แม้ทั้งสองคำสั่งจะถูกสร้างขึ้น เพื่อหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเช่นเดียวกันก็ตาม แต่คำสั่ง `solve` ดูจะมีข้อจำกัดที่สำคัญ คือ สามารถใช้ได้กับกรณีที่ระบบสมการมีคำตอบเพียงชุดเดียว คือเมื่อเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการ สามารถหาอินเวอร์สได้เท่านั้น ต่างจากคำสั่ง `Solve`

ซึ่งถูกพัฒนาขึ้นในชุดคำสั่ง `matlib` ที่สามารถใช้ได้กับระบบสมการเชิงเส้น ในกรณีที่หลากหลายกว่า ทั้งเมื่อระบบสมการมีคำตอบเพียงชุดเดียว และเมื่อระบบสมการมีคำตอบหลายชุด หรือไม่มีคำตอบ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.8 การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในตัวอย่างที่ 5.6 สามารถทำได้โดย

```
> A<-matrix(c(2,2,1,1,1,-1),3,2, byrow=TRUE); b<-c(1,0,2)
> Solve(A,b)
x1     =  1.25
   x2 = -0.75
    0 = -0.50
```

จากข้างต้น จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์จากคำสั่ง `Solve` นั้น ถูกแสดงออกมาในลักษณะของระบบสมการซึ่งช่วยให้สามารถอ่านคำตอบของระบบสมการทั้งในกรณีที่มีคำตอบชุดเดียว ไม่มีคำตอบ และมีคำตอบมากมายไม่จำกัด ได้อย่างสะดวกรวดเร็วยิ่งขึ้น โดยในตัวอย่างนี้ โดยที่สมการในบรรทัดสุดท้ายคือ $0 = -0.5$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ จึงสามารถสรุปได้โดยทันทีว่า ไม่มีค่า x_1 และ x_2 ใดที่ทำให้สมการสุดท้ายเป็นจริง กล่าวคือ ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ □

ตัวอย่างที่ 5.9 ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

เป็นระบบสมการที่มีคำตอบมากมายไม่จำกัดเท่ากับ (x_1, x_2) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $x_1 = 1-r$ และ $x_2 = r, r \in \mathbb{R}$ ซึ่งจากคำสั่ง `Solve` จะได้ว่า

```
> A<-matrix(c(1,1,2,2),2,2, byrow=TRUE); b<-c(1,2)
> Solve(A,b)
x1 + x2  = 1
      0  = 0
```

จากข้างต้น จะเห็นได้ว่าคำตอบของระบบสมการ คือ (x_1, x_2) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $x_1+x_2 = 1$ ซึ่งตรงกับคำตอบที่ได้จากการคำนวณในส่วนแรก □

พีชคณิตของเมตริกซ์

โดยที่คำสั่งเพื่อการคำนวณพื้นฐานเกี่ยวกับเมตริกซ์ เช่น การบวก ลบ คูณ ตลอดจนการหาอินเวอร์สนั้น ได้ถูกบรรจุไว้เป็นคำสั่งทั่วไปของ R ที่สามารถใช้ได้ทันที โดยไม่ต้องเปิดใช้ชุดคำสั่งใดเป็นการเฉพาะ ดังนี้ ผู้ประสงค์จะคำนวณโอเปอเรเตอร์ของเมตริกซ์ในระดับต้น จึงไม่จำเป็นต้องเรียนรู้ชุดคำสั่งอื่นใดเพิ่มเติมอีก อย่างไรก็ตาม สำหรับโอเปอเรเตอร์ของเมตริกซ์ในระดับที่สูงขึ้นนั้น แม้หลายคำสั่งเพื่อการคำนวณในระดับสูงดังกล่าว จะสามารถเขียนขึ้นได้โดยอาศัยคำสั่งพื้นฐานที่มีอยู่แล้ว แต่ก็มีคำสั่งจำนวนมาก ที่ได้ถูกสร้างขึ้นไว้แล้วในชุดคำสั่ง `matlib` ซึ่งสามารถเรียกมาใช้ได้โดยทันที การเรียนรู้ชุดคำสั่ง `matlib` จึงมีข้อดีที่ช่วยย่นระยะเวลา ที่ไม่จำเป็นต้องเสียไปในการเขียนคำสั่งใหม่ อีกทั้งยังเป็นประโยชน์อย่างยิ่ง สำหรับผู้ศึกษาวิชาพีชคณิตเชิงเส้น เพราะช่วยให้ผู้สนใจสามารถศึกษารายละเอียดของการคำนวณโอเปอเรเตอร์ต่างๆ อย่างเป็นขั้นตอน ใช่เพียงการได้รู้ผลลัพธ์ท้ายสุดจากการคำนวณเท่านั้น อาทิ การหาอินเวอร์สนั้น หากใช้คำสั่ง `solve` ซึ่งเป็นคำสั่งพื้นฐานของ R ก็จะได้ทราบแต่เพียงผลลัพธ์ คือ อินเวอร์สเท่านั้น แต่หากต้องการฝึกความเข้าใจในแต่ละขั้นตอน ที่จะต้องคำนวณเพื่อให้ได้ผลลัพธ์สุดท้าย คือ การหาค่ากำหนด ไมเนอร์ ปัจจัยร่วม และเมตริกซ์ผูกพัน ซึ่งนำไปสู่การหาอินเวอร์สในท้ายสุดนั้น จะเห็นได้ว่าชุดคำสั่ง `matlib` มีความสมบูรณ์กว่ามาก ด้วยว่าได้บรรจุคำสั่ง เพื่อการคำนวณทุกขั้นตอนของการหาอินเวอร์สไว้อย่างครบถ้วน ผิดกับคำสั่งพื้นฐานใน R ที่มีแต่เพียงคำสั่งเพื่อการหาตัวกำหนด ซึ่งเป็นจุดตั้งต้นของการหาอินเวอร์ส และคำสั่งเพื่อการหาอินเวอร์สซึ่งจะให้ผลลัพธ์ที่จุดปลายเท่านั้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.10 สำหรับเมตริกซ์

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

หากใช้คำสั่ง `solve` ซึ่งเป็นคำสั่งพื้นฐานใน R จะได้

```
> A<-matrix(c(1,2,2,1,2,3,1,3,2),3,3, byrow=TRUE); solve(A)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    5   -2   -2
[2,]   -1    0    1
[3,]   -1    1    0
```

โดยมีผลลัพธ์คือ $\boldsymbol{A}^{-1}$ ซึ่งเป็นผลลัพธ์สุดท้าย ดังนี้ การใช้คำสั่ง แม้จะเป็นประโยชน์ทั้งในการคำนวณให้ได้คำตอบคือ $\boldsymbol{A}^{-1}$ ที่ต้องการ อีกทั้งยังช่วยตรวจทานความถูกต้องของคำตอบ สำหรับผู้ที่ต้องการฝึกหาคำตอบด้วยการคำนวณด้วยตนเองได้ แต่หากคำตอบที่ได้จากการคำนวณด้วยตนเอง ไม่ตรงกันกับคำตอบที่ถูกต้องแล้ว ผู้คำนวณย่อมไม่อาจทราบได้ว่า ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นนั้น อยู่ในกระบวนการใดของการหาคำตอบ โดยจากข้างต้น การหา $\boldsymbol{A}^{-1}$ ซึ่งเป็นไปตามกระบวน-การดังที่ได้อธิบายโดยละเอียดในบทที่สอง นั้น ย่อมจะเริ่มจากการหาค่ากำหนดของเมตริกซ์เป็นขั้นตอนแรก จากนั้นจึงพิจารณาค่ากำหนดว่าหากเท่ากับศูนย์ เมตริกซ์จะไม่มีอินเวอร์ส และหากไม่เท่ากับศูนย์ จึงพิจารณาหาไมเนอร์ ปัจจัยร่วม เมตริกซ์ผูกพัน และอินเวอร์ส ตามลำดับ ซึ่งสามารถคำนวณได้ด้วยคำสั่งต่าง ๆ ในชุดคำสั่ง `matlib` ดังนี้

```
> library(matlib)
> Det(A); minor(A,1,2); cofactor(A,1,2); adjoint(A)
[1] -1
[1] -1
[1] 1
     [,1] [,2] [,3]
[1,]   -5    2    2
[2,]    1    0   -1
[3,]    1   -1    0
```

ผลลัพธ์ข้างต้นแสดงค่ากำหนดของ $\boldsymbol{A}$ จากคำสั่ง `Det(A)` ซึ่งจากการคำนวณจะได้ว่า

$$|\boldsymbol{A}| = 4 + 6 + 6 - 4 - 9 - 4 = -1$$

ไมเนอร์ของ $\boldsymbol{A}$ ที่แถวที่หนึ่งและคอลัมน์ที่สองหรือค่ากำหนดของ $\boldsymbol{A}$ ที่ตัดแถวที่หนึ่ง และคอลัมน์ที่สองออกจากคำสั่ง `minor(A,1,2)` ซึ่งเท่ากับ $M_{12} = 2 - 3 = -1$ ปัจจัยร่วมของ $\boldsymbol{A}$ ที่แถวที่หนึ่ง และคอลัมน์ที่สองจากคำสั่ง `cofactor(A,1,2)` ซึ่งเท่ากับ $C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = 1$ และเมตริกซ์ผูกพันซึ่งได้จากการหาปัจจัยร่วมจนครบทุกตำแหน่ง จากนั้นจึงสร้างเมตริกซ์ปัจจัยร่วม $\mathscr{A}$ แล้วหาทรานส์โพสจากคำสั่ง `adjoint(A)` ทั้งนี้ สามารถสังเกตได้ว่า C_{12} ที่หาได้ข้างต้น จะอยู่ที่ตำแหน่งที่ $\mathscr{A}_{21}$ ทั้งนี้ คำสั่งเพื่อการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์โดยตรงในชุดคำสั่ง `matlib` คือ คำสั่ง `Inverse` ที่หากไม่ได้ระบุคำสั่งย่อยใด ๆ จะให้ผลลัพธ์เช่นเดียวกับคำสั่ง `solve` แต่หากได้ระบุคำสั่งย่อย `verbose=TRUE` จะแสดงกระบวนการคำนวณหาอินเวอร์สโดยละเอียดด้วยวิธีของเกาส์ ซึ่งเริ่มต้นจากการแปลงเมตริกซ์ตั้งต้นให้เป็นเมตริกซ์เอกฐาน □

อนึ่ง คำสั่งใน `matlib` ยังครอบคลุมการคำนวณโอเปอเรเตอร์ทางพีชคณิตระดับสูงต่างๆ อีกจำนวนมาก ที่แม้จะอยู่เกินขอบเขตของเนื้อหาในบทที่สองของหนังสือเล่มนี้ แต่จะได้ถูกรวบรวมไว้เพื่อความเป็นหมวดหมู่ไว้ในตารางที่ 5.3 ซึ่งผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากตำราทางพีช-คณิตเชิงเส้นระดับสูงขึ้นต่อไป ทั้งนี้ มีข้อควรสังเกตที่สำคัญ คือ คำสั่งบางคำสั่งใน `matlib` ซึ่งใช้คำนวณโอเปอเรเตอร์เดียวกันกับบางคำสั่งพื้นฐานใน R ที่มีอยู่แล้วนั้น แม้จะมีชื่อเดียวกัน แต่มักแยกความแตกต่างออกจากกัน โดยใช้ตัวอักษรขึ้นหน้าคำเป็นตัวใหญ่ อาทิ คำสั่ง `Det(A)` ใน `matlib` และคำสั่ง `det(A)` ซึ่งเป็นคำสั่งพื้นฐานนั้น แม้จะใช้คำนวณตัวกำหนดของเมตริกซ์เช่นเดียวกัน แต่จะใช้ตัวอักษรขึ้นหน้าคำเป็นอักษรตัวใหญ่และเล็กต่างกันเพื่อหลีกเลี่ยงความสับสน

ค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะ

คำสั่ง `Eigen` ซึ่งอยู่ในชุดคำสั่ง `matlib` และคำสั่ง `eigen` ซึ่งเป็นคำสั่งมาตรฐานเพื่อหาค่าเฉพาะ และเวคเตอร์เฉพาะของเมตริกซ์นั้น มีความแตกต่างกันพอสมควร โดย `Eigen(X)`จะคำนวณค่าเฉพาะของเมตริกซ์ที่สมมาตรเท่านั้น แต่ `eigen(X)` จะเป็นคำสั่งที่ใช้ได้ในกรณีที่หลากหลายกว่า โดยจะคำนวณค่าเฉพาะของเมตริกซ์จตุรัสใดๆ ทั้งนี้ มีข้อควรพิจารณาที่สำคัญคือ โดยที่การหาค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะด้วยทั้งสองคำสั่งนั้นต่างใช้การคำนวณเชิงตัวเลข ผลลัพธ์ที่แสดงจึงอาจไม่อยู่ในรูปที่กระชับและสวยงาม ดังเช่นคำตอบในเชิงวิเคราะห์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.11 จากเมตริกซ์

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{A}$ คือ λ ซึ่งทำให้ $|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}| = 0$ กล่าวคือ $-(1-\lambda)(1+\lambda)-1 = \lambda^2-2 = 0$ ซึ่งมีคำตอบเท่ากับค่าเฉพาะคือ $\lambda_1 = \sqrt{2}$ และ $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ จาก $\lambda_1 = \sqrt{2}$ จะได้เวคเตอร์เฉพาะคือ $\boldsymbol{z}_1$ ที่สอดคล้องกับ $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{0}$ ซึ่งเป็นระบบสมการเชิงเส้นที่มีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยาย คือ

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -1-\sqrt{2} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ซึ่งมีคำตอบคือ $\boldsymbol{z}_1$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $z_{11} = (1+\sqrt{2})z_{12}$ หรือ

$$\boldsymbol{z}_1 = s \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

คำสั่ง	
`adjoint(X)`	adj($\boldsymbol{X}$)
`angle(x,y)`	มุมระหว่าง $\boldsymbol{x}$ และ $\boldsymbol{y}$
`cholesky(X)`	รากที่สองแบบ Cholesky ของ $\boldsymbol{X}$
`cofactor(X,i,j)`	ปัจจัยร่วมแถวที่ i คอลัมน์ที่ j ของ $\boldsymbol{X}$
`Det(A)`	det($\boldsymbol{A}$)
`echelon(X)`	การแปลง $\boldsymbol{X}$ ให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแถวแบบลดรูป
`Eigen(X)`	ค่าเฉพาะของ $\boldsymbol{X}$ ซึ่งเป็นเมตริกซ์สมมาตร
`GramSchmidt(X)`	การแปลงเมตริกซ์แบบ Gram-Schmidt ให้คอลัมน์ตั้งฉากกัน
`Inverse(X)`	$\boldsymbol{X}^{-1}$
`LU(X)`	การแยกองค์ประกอบ $\boldsymbol{X}$ ให้อยู่ในรูป $\boldsymbol{PX} = \boldsymbol{LU}$ เมื่อ $\boldsymbol{L}$ และ $\boldsymbol{U}$ คือเมตริกซ์สามเหลี่ยมล่างและบนตามลำดับ
`minor(X,i,j)`	ไมเนอร์แถวที่ i คอลัมน์ที่ j ของ $\boldsymbol{X}$
`MoorePenrose(X)`	อินเวอร์สแบบมอร์และเพนโรสของ $\boldsymbol{X}$
`plotEqn(A,b)`	การแสดง $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ในรูประบบสมการเชิงเส้น
`Solve(A,b)`	การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$
`vec(X)`	การทำให้ $\boldsymbol{X}$ เป็นเวคเตอร์ด้วยการนำคอลัมน์มาเรียงต่อกัน

ตารางที่ 5.3 คำสั่งเพื่อการคำนวณทางพีชคณิตเชิงเส้นในชุดคำสั่ง `matlib`

ในลักษณะเดียวกัน จาก $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ จะได้เวคเตอร์เฉพาะ คือ $\boldsymbol{z}_2$ ที่สอดคล้องกับ $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{0}$ ซึ่งเป็นระบบสมการเชิงเส้นที่มีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยาย คือ

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -1+\sqrt{2} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -(1-\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ซึ่งมีคำตอบคือ $\boldsymbol{z}_2$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $z_{21} = (1-\sqrt{2})z_{22}$ หรือ

$$\boldsymbol{z}_2 = s\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

สำหรับการหาค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะของตัวอย่างข้างต้นด้วย R นั้น โดยที่ $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์สมมาตร จึงเป็นกรณีที่จะใช้คำสั่ง `eigen` หรือ `Eigen` ก็ย่อมได้ โดยหากใช้คำสั่ง `eigen` จะได้ผลลัพธ์คือ

```
> A<-matrix(c(1,1,1,-1),2,2)
> eigen(A)
eigen() decomposition
$values
[1] 1.414214 -1.414214
$vectors
           [,1]       [,2]
[1,] -0.9238795  0.3826834
[2,] -0.3826834 -0.9238795
```

หากเปรียบเทียบคำตอบในเชิงวิเคราะห์และคำตอบในเชิงตัวเลข แม้คำตอบทั้งสองประเภทจะเท่ากัน แต่การแสดงคำตอบในเชิงวิเคราะห์ซึ่งอยู่ในรูป $\lambda = \pm\sqrt{2}$ นั้น ดูจะเรียบง่ายและงดงามกว่าคำตอบในเชิงตัวเลขซึ่งอยู่ในรูปทศนิยม คือ $\lambda = \pm 1.4142\ldots$ และเมื่อพิจารณาคำตอบอีกส่วนคือ เวคเตอร์เฉพาะด้วยแล้วนั้น คำตอบในเชิงตัวเลขดูจะซับซ้อนกว่ามาก เมื่อเปรียบกับคำตอบในเชิงวิเคราะห์ ทั้งนี้ การเปรียบเทียบให้เห็นว่า คำตอบที่ได้จากทั้งสองวิธีนั้นเท่ากัน อาจทำได้โดยการเปรียบเทียบสัดส่วนของทั้งสองค่าในเวคเตอร์ ซึ่งจะต้องเท่ากัน อาทิ หลังจากที่ได้คำนวณสัดส่วนของทั้งสองค่าใน $\boldsymbol{z}_1$ แล้ว จะได้ว่า

$$1+\sqrt{2} = \frac{0.9238795}{0.3826834} = 2.414214$$

และหากคำนวณสัดส่วนของทั้งสองค่าใน $\boldsymbol{z}_2$ จะได้ว่า

$$1-\sqrt{2}=-\frac{0.3826834}{0.9238795}=-0.414214$$

ซึ่งยืนยันว่าคำตอบจากทั้งสองวิธีเท่ากัน $\square$

เนื้อหาต่อไปที่จะได้พิจารณา เป็นการใช้ R เพื่อหาคำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้น ทั้งนี้ แม้ R จะมีชุดคำสั่ง เช่น `deSolve` ที่ได้ถูกพัฒนาขึ้นเพื่อศึกษาเรื่องในเชิงพลวัต ทั้งระบบสมการผลต่างเชิงเส้น (linear difference equations) และระบบสมการอนุพันธ์เชิงเส้น (linear differential equations) เป็นการเฉพาะ แต่โดยที่คำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้น ดังที่ได้พิจารณากันแล้วนั้น สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะได้ การหาคำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้นด้วย R จึงย่อมสามารถทำได้ โดยอาศัยแต่เพียงคำสั่งเพื่อคำนวณหาค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะ ซึ่งล้วนเป็นคำสั่งมาตรฐาน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.12 สมมติให้ระบบสมการผลต่าง $\boldsymbol{x}_{n+1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n$ มีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

ซึ่งเท่ากับเมตริกซ์ในตัวอย่างที่ 5.11 ดังนี้ จะได้ว่าคำตอบของระบบสมการผลต่างนี้ คือ

$$\boldsymbol{x}_n=c_1 2^{\frac{n}{2}}\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}+c_2 2^{-\frac{n}{2}}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

หากให้จุดตั้งต้น คือ $\boldsymbol{x}_0=(1\ 1)'$ จะสามารถระบุได้ว่าค่าคงที่ คือ $c_1=c_2=\frac{1}{2}$ ซึ่งเมื่อนำไปแทนค่าในสมการข้างต้น จะได้คำตอบของระบบสมการผลต่าง คือ

$$\boldsymbol{x}_n=2^{\frac{n}{2}-1}\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}+2^{-\frac{n}{2}-1}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

คำตอบข้างต้นมีข้อสังเกตที่น่าสนใจ คือ หากให้ $n\to\infty$ แล้ว ค่าในส่วนหลังของ $\boldsymbol{x}_n$ จะลดลงจนเข้าหาศูนย์ ค่าของ $\boldsymbol{x}_n$ เมื่อ $n\to\infty$ จึงถูกกำหนดโดยส่วนแรกเป็นหลัก และโดยที่ $1+\sqrt{2}$ มีค่าเป็นประมาณ 2.5 เท่าของ 1 จึงได้ผลลัพธ์ว่าเมื่อ $n\to\infty$ แล้ว x_1 จะมีค่าเป็นประมาณ 2.5 เท่าของ x_2 ด้วยเช่นกัน $\square$

เรขาคณิตของเวคเตอร์

อีกคำสั่งหนึ่งที่น่าสนใจในชุดคำสั่ง `matlib` คือ คำสั่งเพื่อวาดเวคเตอร์ หรือวาดกราฟต่างๆ จากระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งเป็นประโยชน์อย่างยิ่ง ในการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับแนวคิดทางพีชคณิตเชิงเส้นต่างๆ ทั้งเมตริกซ์ เวคเตอร์ เส้น ระนาบ ตลอดจนคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ทั้งนี้ แม้ R จะเป็นโปรแกรมที่มีคำสั่งเพื่อสร้างกราฟฟิค ที่ทั้งสามารถใช้ประยุกต์ได้ในหลากหลายสาขาวิชา และสวยงามเป็นจำนวนมาก แต่ในที่นี้จะได้กล่าวถึงแต่เพียงคำสั่งเพื่อสร้างกราฟฟิค ที่อยู่ในชุดคำสั่ง `matlib` เท่านั้น ด้วยเหตุผลที่ว่า คำสั่งที่อยู่ใน `matlib` นั้น ถูกเขียนขึ้นเพื่อสร้างกราฟต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดต่างๆ ทางพีชคณิตเชิงเส้นเป็นการเฉพาะ จึงมีความสะดวก กระชับ และสามารถเรียนรู้ได้ง่าย โดยไม่ต้องพะวงกับการเรียนรู้คำสั่งปลีกย่อยต่างๆ เพื่อการสร้างกราฟทั่วไป อนึ่ง แม้คำสั่งทางกราฟฟิคในชุดคำสั่ง `matlib` จะมีอยู่เป็นจำนวนมาก แต่ที่จะได้ยกมากล่าวถึงเป็นการละเอียดต่อไปนี้ จะมีแต่เพียงไม่กี่คำสั่งที่พิจารณาแล้ว ว่าเกี่ยวข้องกับเนื้อหาที่ได้ครอบคลุมอยู่ในหนังสือเล่มนี้อย่างแท้จริง โดยผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับคำสั่งอื่นๆ ได้จากคู่มือประกอบ ชุดคำสั่ง `matlib` ต่อไป

การคำนวณมุมระหว่างเวคเตอร์

คำสั่ง `angle` เป็นคำสั่งที่สามารถใช้คำนวณมุมที่เกิดจากเวคเตอร์ที่มีขนาดเท่ากันสองเส้น โดยคำสั่ง `angle(u,v)` จะให้ผลลัพธ์คือ θ ซึ่งเป็นมุมที่อยู่ระหว่างเวคเตอร์ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ซึ่งคำนวณได้จากสูตร

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \| \boldsymbol{u} \| \| \boldsymbol{v} \| \cos \theta$$

ดังนี้ จะได้ว่า

$$\theta = \arccos \left(\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\| \boldsymbol{u} \| \| \boldsymbol{v} \|} \right)$$

ตัวอย่างที่ 5.13 สมมติให้ $\boldsymbol{u} = (2, 2, 1)$ และ $\boldsymbol{v} = (2, 0, 0)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= 2(2) + 2(0) + 1(0) = 4 \\ \| \boldsymbol{u} \| &= \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3 \\ \| \boldsymbol{v} \| &= \sqrt{2^2} = 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\theta = \arccos \left(\frac{4}{6} \right) \approx 48.19$$

จากข้างต้น หากคำนวณโดย R จะได้ว่า

```
> u<-c(2,2,1)
> v<-c(2,0,0)
> angle(u,v)
         [,1]
[1,] 48.18969
```

ซึ่งเป็นคำตอบที่ตรงกัน □

การวาดเวคเตอร์

คำสั่งหนึ่งที่น่าสนใจในชุดคำสั่ง `matlib` ที่สามารถใช้วาดเวคเตอร์ ทั้งที่มีขนาด 2 และ 3 มิติ ได้แก่ คำสั่ง `vectors` และ `vectors3D` ตามลำดับ โดยในที่นี้ จะแสดงการใช้คำสั่ง เพื่อวาดเวคเตอร์ขนาด 3 มิติ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.13 เวคเตอร์ $\boldsymbol{u} = (1, 1, 1)$ และ $\boldsymbol{v} = (2, \frac{1}{2}, 2)$ ที่ลากจากจุดกำเนิดสามารถแสดงอยู่ในกราฟ ที่ประกอบด้วยแกน 3 แกนคือ X, Y, Z ด้วยคำสั่ง `vectors3D` ทั้งนี้ โดยที่การใช้คำสั่ง `vectors3D` เพื่อวาดแต่เพียงเวคเตอร์ทั้งสองเส้น คือ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ จะให้ผลลัพธ์คือเส้น 2 เส้นที่ถูกวาดขึ้นบนหน้าจอ ซึ่งแม้จะเป็นเวคเตอร์ใน 3 มิติก็อาจดูไม่เห็นแตกต่างจากเวคเตอร์ใน 2 มิติเท่าใดนัก ในที่นี้จึงจะได้สร้างแกนทั้ง 3 แกนคือ X, Y, Z ขึ้นเสียก่อน จากนั้นจึงวาดเวคเตอร์ทั้งสองเส้นคือ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ เพิ่มลงไป เพื่อเปรียบเทียบให้เห็นตำแหน่งของเวคเตอร์แต่ละเส้นเมื่อเทียบกับทั้ง 3 แกน ซึ่งช่วยให้เห็นภาพเวคเตอร์ทั้งสองเส้นใน 3 มิติได้ตามสมควร ดังคำสั่งต่อไปนี้

```
> u<-c(1,1,1)
> v<-c(2,0.5,2)
> vec <- rbind(2*diag(3),u,v)
```

คำสั่งข้างต้นสร้างเวคเตอร์ $\boldsymbol{u} = (1, 1, 1)$ และ $\boldsymbol{v} = (2, \frac{1}{2}, 2)$ และนำเอาเวคเตอร์ทั้งสอง เข้ารวมกับเวคเตอร์มูลฐานอีก 3 เส้น ซึ่งถูกสร้างขึ้นเป็นแกน X, Y, Z ตามลำดับ ทั้งนี้ แม้เวคเตอร์มูลฐานโดยทั่วไปนั้นมักอยู่ในรูป $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$,$\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$, และ $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ แต่หากวาดเวคเตอร์มูลฐานทั้งสาม ร่วมกับ $\boldsymbol{v}$ ซึ่งค่อนข้างยาวแล้ว ก็อาจได้รูปที่ไม่สวยงามเท่าไรนัก ในที่นี้จึงจะได้ขยายเวคเตอร์มูลฐานทั้งสามเส้นให้มีความยาวเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่าโดยการนำเอา 2 คูณ

เข้ากับเมตริกซ์เอกฐานที่มีขนาด 3×3 ด้วยคำสั่ง จากนั้นจึงนำทั้งหมดรวมเข้ากับ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ และใช้ชื่อเมตริกซ์นี้ว่า `vec` กล่าวคือ

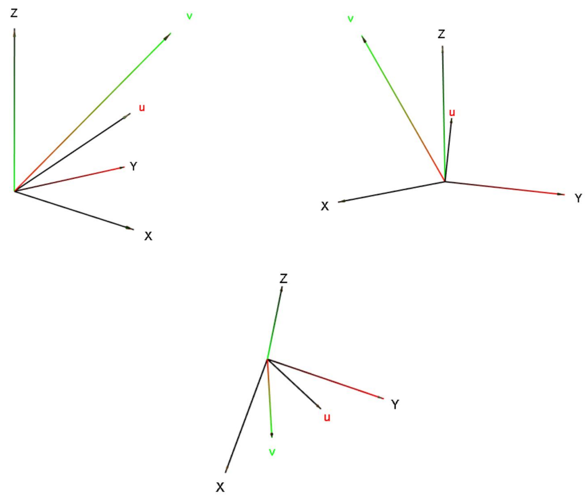
$$\texttt{vec} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

เมื่อได้ข้อมูลทั้งหมดข้างต้นแล้ว หากจะนำคำสั่ง `vectors3d` ไปใช้กับเมตริกซ์ทันที ก็จะได้ผลลัพธ์คือ เส้น 5 เส้นที่ชี้ไปในทิศทางที่ถูกกำหนดโดยแต่ละแถวของเมตริกซ์ อย่างไรก็ตาม เพื่อให้สามารถจำแนกเส้นแต่ละเส้นได้โดยง่าย จึงจะได้กำหนดชื่อของแต่ละแถวของเมตริกซ์เสียก่อน โดยใช้คำสั่ง `rownames` จากนั้นเรียกชุดคำสั่ง `rgl` ขึ้นมาใช้ประกอบเพื่อให้สามารถใช้คำสั่ง `open3d` เพื่อการวาดกราฟแบบสามมิติได้ และสุดท้ายจึงเป็นการใช้คำสั่ง `vectors3d` เพื่อวาดเวคเตอร์ทั้ง 5 เส้นโดยให้ X, Y, Z คือแกนเป็นสีดำ และเวคเตอร์ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ เป็นสีเขียวและแดงตามลำดับ โดยคำสั่งต่อไปนี้

```
> rownames(vec) <- c("X", "Y","Z","u","v")
> library(rgl)
> open3d()
> vectors3d(vec, color=c(rep("black",3), "red", "green"), lwd=2)
```

ผลลัพธ์ที่ได้จากการสร้างกราฟฟิคด้วยคำสั่ง `vectors3d` จะเป็นไปดังแสดงในรูปที่ 5.5 ทั้งนี้กราฟฟิคที่ถูกสร้างขึ้นด้วยคำสั่ง `vectors3d` นั้น มีคุณสมบัติพิเศษ ที่สามารถปรับเปลี่ยนมุมของกราฟฟิคที่ถูกสร้างขึ้น ให้เป็นไปในมุมหรือทิศทางใดก็ได้ตลอด $360°$ โดยการกดให้เคอเซอร์ค้างไว้ที่กราฟฟิค และหมุนไปยังมุมหรือทิศทางที่ต้องการ

ในภาพแรกจะเป็นการพิจารณาเวคเตอร์ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ จากมุมด้านข้าง โดยหากให้แกน X และ Y อยู่ในระนาบแนวนอนและให้แกน Z อยู่ในระนาบตั้งฉากแบบแนวตั้งแล้ว จะเห็นได้ว่าเวคเตอร์ $\boldsymbol{v}$ อยู่เหนือ $\boldsymbol{u}$ ซึ่งสอดคล้องกับพิกัดในแกน Z ของ $\boldsymbol{v}$ ที่เท่ากับ 2 ซึ่งอยู่เหนือพิกัดในแกน Z ของ $\boldsymbol{u}$ ที่เท่ากับ 1 จากภาพที่สองเมื่อได้ปรับมุมจากภาพแรก ให้หมุนไปทางขวา จะเห็นได้ว่าเวคเตอร์ $\boldsymbol{v}$ มีความยาวมากกว่า $\boldsymbol{u}$ อย่างชัดเจน และจากภาพสุดท้าย ซึ่งเป็นการมองจากมุมบน จะเห็นได้ว่าเวคเตอร์ $\boldsymbol{v}$ อยู่ทางซ้ายของ $\boldsymbol{u}$ โดย $\boldsymbol{v}$ จะมีพิกัดในแกน X ที่มากกว่า $\boldsymbol{u}$ แต่มีพิกัดในแกน Y



รูปที่ 5.5 เวคเตอร์ที่ถูกสร้างขึ้นโดยคำสั่ง `vectors3d` เมื่อ $\boldsymbol{u} = (1, 1, 1)$ และ $\boldsymbol{v} = (2, \frac{1}{2}, 2)$ กราฟฟิคที่ได้สร้างขึ้นมีคุณสมบัติสำคัญ คือ สามารถปรับเปลี่ยนมุมได้ $360°$ ทั้งในแนวนอน แนวตั้ง และแนวทแยง โดยการลากให้เคอเซอร์ ขยับไปตามมุมที่ต้องการ จากรูปเป็นภาพตัดของเวคเตอร์จาก 3 มุมมอง คือ ในภาพแรกเป็นมุมด้านข้างจากการให้แกน X และ Y อยู่ในระนาบแนวนอนและให้แกน Z อยู่ในระนาบตั้งฉากแบบแนวตั้ง ซึ่งให้ภาพเวคเตอร์ $\boldsymbol{v}$ ที่อยู่เหนือ $\boldsymbol{u}$ ในภาพที่สองเป็นการปรับมุมจากภาพแรกให้มุมไปทางขวา ซึ่งฉายให้เห็นเวคเตอร์ $\boldsymbol{v}$ ที่มีความยาวกว่า $\boldsymbol{u}$ และในภาพสุดท้ายเป็นการมองจากมุมบน ซึ่งแสดงให้เห็นเวคเตอร์ $\boldsymbol{v}$ ที่อยู่ทางซ้ายของ $\boldsymbol{u}$

ที่น้อยกว่า และในทางกลับกัน $\boldsymbol{v}$ จะมีพิกัดในแกน Y ที่น้อยกว่า $\boldsymbol{u}$ แต่มีพิกัดในแกน X ที่มากกว่า อนึ่ง เป็นที่น่าสังเกตว่า การพิจารณาเวคเตอร์ในสามมิตินั้น ควรได้พิจารณาจากหลายมุมมอง เพราะการพิจารณาแต่เพียงจากมุมมองเดียว อาจให้ความเข้าใจที่คาดเคลื่อนจากความเป็นจริงได้ ดังเช่นจากข้างต้นที่ภาพจากเฉพาะมุมมองด้านบน อาจให้ข้อสรุปที่ผิดพลาดว่าเวคเตอร์ $\boldsymbol{v}$ มีความยาวมากกว่า $\boldsymbol{u}$ เนื่องจากตั้งอยู่ในระดับที่ชันกว่า $\square$

กราฟจากระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร

โดยที่เป็นที่ทราบกันดีแล้วว่า สมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย 2 ตัวแปร สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของเส้นตรงในระนาบ 2 มิติได้ ระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย 2 ตัวแปรและ m สมการ จึงเปรียบได้กับเส้นตรง m เส้นซึ่งวาดอยู่ในระนาบ 2 มิติ โดยมีคำตอบของระบบสมการได้แก่จุดที่เส้นตรงทุกเส้นตัดกัน ดังนี้ การพิจารณาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วย 2 ตัวแปร จึงสามารถทำได้ง่าย โดยพิจารณาหาจุดตัดกันของเส้นตรงทั้งหมด เช่น ระบบสมการ 2 ตัวแปรที่มีเพียงสมการเดียว เปรียบได้กับเส้นตรงเพียงเส้นเดียวในระนาบ 2 มิติ ที่ทุกจุดบนเส้นตรง คือคำตอบของระบบสมการนี้ ระบบสมการนี้จึงมีคำตอบมากมายไม่จำกัด หรือในกรณีระบบสมการ 2 ตัวแปรที่มีสองสมการนั้น ระบบสมการนี้ อาจมีคำตอบที่เป็นไปได้ในสามลักษณะ กล่าวคือ หากเป็นระบบสมการที่สร้างเส้นตรงสองเส้นที่ทับกัน ก็จะให้คำตอบมากมายไม่จำกัด หากเป็นระบบสมการที่สร้างเส้นตรงสองเส้น ที่ความชันต่างกันซึ่งจะต้องตัดกันเพียงหนึ่งจุด ก็จะให้คำตอบหนึ่งชุด และหากเป็นระบบสมการที่สร้างเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน ก็จะเป็นระบบสมการที่ไม่มีคำตอบ เป็นต้น

การสร้างกราฟจากสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย 2 ตัวแปร สามารถทำได้โดยใช้คำสั่ง `plotEqn` ในชุดคำสั่ง `matlib` โดยดังตัวอย่างที่ XXX ต่อไปนี้จะเป็นการแสดงให้เห็นการใช้คำสั่ง เพื่อสร้างกราฟจากระบบสมการเชิงเส้น ทั้งในกรณีที่มีไม่มีคำตอบ มีคำตอบหนึ่งชุด และมีคำตอบมากมายไม่จำกัด

ตัวอย่างที่ 5.14 ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

มีอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ซึ่งเท่ากับ 1 น้อยกว่าอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยายซึ่งเท่ากับ 2 จึงเป็นระบบสมการที่ไม่มีคำตอบ กราฟจากระบบสมการข้างต้น สามารถสร้างได้ด้วยคำสั่ง

```
> A<-matrix(c(1,1,2,2),2,2,byrow=TRUE)
> b<-c(2,2)
> plotEqn(A,b)
   x[1] +   x[2] = 2
 2*x[1] + 2*x[2] = 2
```

คำสั่ง `plotEqn` จะให้ผลลัพธ์สองประการ คือ โดยในประการแรก จะสร้างระบบสมการเชิงเส้น ที่สอดคล้องกับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่ได้ป้อนค่าไว้ข้างต้น และเวคเตอร์ของค่าด้านขวามือของระบบสมการ ซึ่งให้ผลลัพธ์คือเส้นตรงสองเส้นซึ่งขนานกัน และในประการที่สองจะสร้างกราฟเส้นตรงในระนาบสองมิติ โดยมีกราฟแต่ละเส้น ที่ถูกสร้างขึ้นจากแต่ละสมการในระบบสมการ ดังรูปที่ 5.6 (1) จากรูป กราฟทั้งสองเส้นจะมีลักษณะขนานกัน จึงเป็นกราฟที่ไม่มีจุดตัด ซึ่งสอดคล้องกับการที่ระบบสมการเชิงเส้นนี้ไม่มีคำตอบ

จากตัวอย่างข้างต้น หากปรับสมการแรกให้ได้ระบบสมการเชิงเส้นใหม่ คือ

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &= 2 \\
2x_1 + 2x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

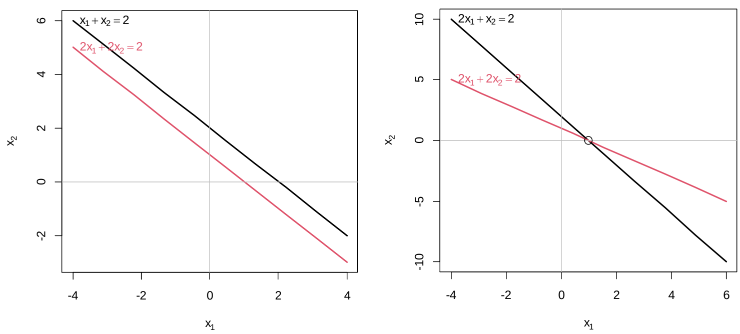
ระบบสมการใหม่นี้มีคำตอบหนึ่งชุด คือ $x_1 = 1$ และ $x_2 = 0$ ซึ่งจากกราฟที่สร้างด้วยคำสั่ง `plotEqn` จะได้

```
> A<-matrix(c(2,1,2,2),2,2,byrow=TRUE)
> b<-c(2,2)
> plotEqn(A,b)
 2*x[1] +   x[2] = 2
 2*x[1] + 2*x[2] = 2
```

และกราฟเส้นตรงสองเส้นดังรูปที่ 5.6 (2) ซึ่งให้จุดตัดที่ $x_1 = 1$ และ $x_2 = 0$ ซึ่งเป็นคำตอบของระบบสมการนี้ $\square$

กราฟจากระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร

การใช้คำสั่ง `plotEqn` เพื่อสร้างกราฟเส้นตรง จากระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปรในระนาบ 2 มิติข้างต้น แม้จะทำได้โดยสะดวก แต่การสร้างกราฟในระนาบ 2 มิติด้วยคอมพิวเตอร์นั้น จะ



(1) (2)

รูปที่ 5.6 การใช้คำสั่ง `plotEqn` เพื่อสร้างกราฟเส้นตรงจากระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร (1) ระบบสมการเชิงเส้นสร้างเส้นตรง 2 เส้นที่ไม่ตัดกัน ซึ่งสอดคล้องกับการที่ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ และ (2) ระบบสมการเชิงเส้นสร้างเส้นตรง 2 เส้นที่ตัดกันหนึ่งจุด ซึ่งสอดคล้องกับการที่ระบบสมการนี้มีคำตอบหนึ่งชุด คือ $x_1 = 1$ และ $x_2 = 0$

อย่างไรแล้วถือว่าไม่ใช่เรื่องยากในปัจจุบัน และสามารถทำได้ โดยใช้โปรแกรมพื้นฐานทั่วไป เช่น Excel ดังนี้ หากตัดประเด็นเรื่องความสะดวกออกไปแล้ว การเรียนรู้ที่จะใช้โปรแกรม R ก็ดูจะไม่มีคุณประโยชน์อันใด เพิ่มเติมไปกว่าโปรแกรมพื้นฐานต่างๆ ที่เป็นที่รู้จักกันดีอยู่แล้ว เพราะต่างให้ผลลัพธ์ที่ไม่ต่างกัน อย่างไรก็ตาม สำหรับกรณีระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรนั้น การใช้คำสั่ง **`plotEqn3d`** ในชุดคำสั่ง **`matlib`** เพื่อสร้างกราฟในปริภูมิ 3 มิติ ดูจะมีประโยชน์กว่าการสร้างกราฟด้วยโปรแกรมพื้นฐานต่างๆ อย่างเห็นได้ชัด ด้วยว่าเป็นชุดคำสั่งที่ถูกเขียนขึ้น เพื่อจุดประสงค์ดังกล่าวเป็นการเฉพาะ ซึ่งช่วยให้ผู้ใช้สามารถสร้างกราฟจากระบบสมการเชิงเส้นใน 3 มิติได้ ด้วยคำสั่งที่เรียบง่าย และได้ผลลัพธ์ที่สวยงาม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.15 ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + x_3 &= 2\\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1\\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1\end{aligned}$$

เป็นระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร ซึ่งมีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ข้างต้นที่สามารถแปลงให้อยู่ในรูปการจัดแถวแบบเรียงลำดับ คือ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

โดยจากการแทนค่าไล่เรียงขึ้นไปเรื่อยๆ จะได้คำตอบของระบบสมการ คือ $x_1 = 1, x_2 = -1$ และ $x_3 = 1$ ซึ่งสอดคล้องกับคำตอบที่ได้จากการใช้คำสั่ง `Solve` คือ

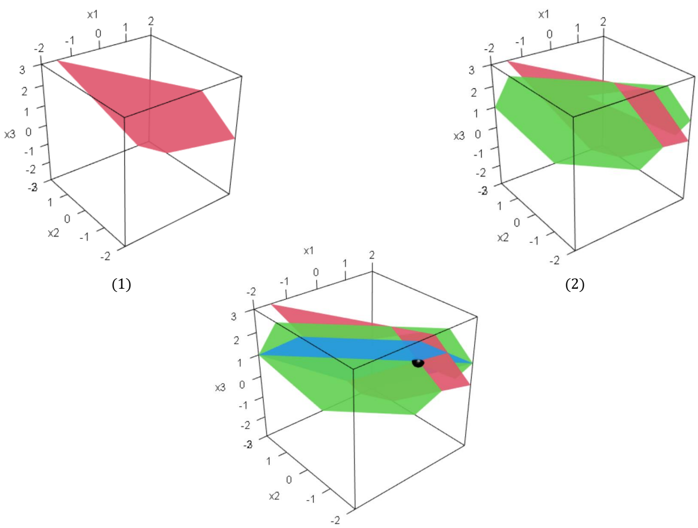
```
> A<-matrix(c(2,1,1,2,2,1,1,1,1),3,3,byrow=TRUE)
> b<-c(1,2,1)
> Solve(A,b)
x1      =  1
  x2    = -1
    x3 =  1
```

ในกรณีระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรนั้น สมการแต่ละสมการในระบบ จะสร้างระนาบที่ตัดไปใน

ปริภูมิ 3 มิติ ในลักษณะที่เปรียบได้กับสมการแต่ละสมการในระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปรซึ่งสร้างเส้นตรงที่ตัดไปในระนาบ 2 มิติ โดยหากระบบสมการมีคำตอบหนึ่งชุดดังเช่นในกรณีนี้นั้น ระบบสมการซึ่งประกอบด้วย 3 สมการจะสร้างระนาบ 3 แผ่นที่ตัดกัน 1 จุดที่จุด $x_1 = 1, x_2 = -1$ และ $x_3 = 1$ ซึ่งจากการใช้คำสั่ง `plotEqn3d(A,b)` กับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ `A` และเวคเตอร์ของค่าทางฝั่งขวาของระบบสมการ `b` ซึ่งได้กำหนดขึ้นดังข้างต้นแล้วนั้น จะได้ผลลัพธ์คือกราฟในกล่องซึ่งประกอบด้วยแกน 3 แกน ดังรูปที่ 5.7 (3) ทั้งนี้ แม้ผลลัพธ์ที่ได้จากคำสั่ง `plotEqn3d` จะไม่ได้แสดงระบบสมการเชิงเส้น ออกมาดังเช่นผลลัพธ์จากคำสั่ง `plotEqn` ในกรณีระบบสมการ 2 ตัวแปร แต่กราฟซึ่งเป็นผลลัพธ์จากคำสั่ง `plotEqn3d` นั้นมีคุณสมบัติสำคัญ คือ สามารถใช้เคอร์เซอร์ปรับให้หมุนได้จากทุกทิศทาง ซึ่งเป็นคุณสมบัติเดียวกันกับกราฟของเวคเตอร์ในสามมิติที่ได้จากคำสั่ง `vectors3d`

สำหรับตัวอย่างนี้ หากได้พิจารณาสมการแต่ละสมการไปทีละขั้นก็ดูจะได้ประโยชน์ ต่อไปนี้จึงจะได้ลองพิจารณาสมการแรกของระบบสมการนี้ คือ $2x_1 + x_2 + x_3 = 2$ ก่อน ซึ่งสร้างระนาบสีแดงในรูป 5.7 (1) ในกรณีนี้ หากเป็นระบบสมการ 3 ตัวแปรที่ประกอบด้วยสมการเพียงสมการเดียวแล้ว จะเป็นระบบสมการที่มีคำตอบมากมายไม่สิ้นสุด ด้วยว่าทุกจุดบนระนาบนี้ ล้วนเป็นคำตอบของสมการทั้งสิ้น ต่อมา หากได้เพิ่มสมการที่สองเข้าไปในระบบสมการนี้ คือ $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$ สมการอีกสมการนี้จะสร้างระนาบอีกแผ่น คือระนาบสีเขียวในรูป 5.7 (2) โดยมีจุดตัดของทั้งสองระนาบคือคำตอบของระบบสมการนี้ อย่างไรก็ตาม โดยที่ระนาบที่ตัดกันสองระนาบนั้นยังคงให้จุดตัดซึ่งประกอบกันขึ้นเป็นเส้นตรงดังรูป ระบบสมการ 3 ตัวแปรที่ประกอบด้วยสองสมการในกรณีนี้ จึงยังคงมีคำตอบมากมายไม่สิ้นสุดไม่ต่างกับในกรณีแรก ด้วยแม้คำตอบในกรณีแรกจะเท่ากับทุกจุดบนระนาบ และคำตอบในกรณีที่สองจะเท่ากับทุกจุดบนเส้นที่เกิดจากการตัดกันของระนาบสองระนาบ แต่คำตอบในทั้งสองกรณีก็ต่างมีมากมายไม่จำกัดด้วยกันทั้งนั้น ในกรณีสุดท้าย สมการสุดท้ายของระบบสมการคือ $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ได้สร้างระนาบอีกแผ่นที่ตัดไปยังเส้นตรงที่ถูกสร้างขึ้นจากการตัดกันของระนาบสองเส้นแรก จุดตัดของระนาบทั้งสามแผ่นในกรณีนี้จึงมีเพียงจุดเดียว ซึ่งเป็นคำตอบของระบบสมการนี้

อนึ่ง ผลสรุปอีกข้อหนึ่ง ซึ่งสามารถอนุมานได้ในลักษณะเดียวกันกับผลสรุปที่ได้จากตัวอย่างที่ 5.14 ในกรณีระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร คือ คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรนั้นสามารถเป็นไปได้ในทั้งสามลักษณะ ดังที่ได้พิจารณาแล้วในตัวอย่างก่อนหน้านี้ กล่าวคือ ระบบสมการอาจไม่มีคำตอบ ซึ่งเกิดขึ้นได้ในกรณีที่ระนาบแต่ละระนาบไม่มีจุดตัดใดร่วมกัน หรืออาจมีคำตอบมากมายไม่สิ้นสุด หากระนาบทุกแผ่นทับกัน โดยทุกจุดบนระนาบต่างคือคำตอบของระบบสมการ หรือหากระนาบทุกระนาบมีจุดตัดร่วมกันแบบเป็นเส้น โดยทุกจุดบนเส้นต่างคือคำตอบของระบบสมการ หรือในกรณีสุดท้ายที่ทุกระนาบมีจุดตัดร่วมกันเพียงจุดเดียว ซึ่งตรงกับกรณีที่



(1) (2) (3)

รูปที่ 5.7 การใช้คำสั่ง `plotEqn3d` เพื่อสร้างกราฟระนาบจากระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร (1) ระนาบที่สร้างได้จากสมการ $2x_1+x_2+x_3=2$ (2) ระบบสมการเชิงเส้นซึ่งประกอบด้วยสมการ $2x_1+x_2+x_3=2$ ซึ่งสร้างระนาบสีแดงและสมการ $2x_1+2x_2+x_3=1$ ซึ่งสร้างระนาบสีเขียว โดยจุดตัดของระนาบทั้งสองเส้นตัดจะประกอบกันเป็นเส้นตรงดังรูป ในกรณีที่ระบบสมการนี้มีเพียงสองสมการ คำตอบของระบบสมการจะเท่ากับทุกจุดที่อยู่บนเส้นตรงนี้ (3) ระบบสมการเชิงเส้นที่ได้เพิ่มเติมสมการสุดท้าย คือ $x_1+x_2+x_3=1$ ซึ่งสร้างระนาบอีกแผ่น คือ ระนาบสีฟ้าซึ่งตัดไปยังเส้นตรงที่ถูกสร้างขึ้นจากการตัดกันของระนาบสองเส้นแรก จุดตัดของระนาบทั้งสามแผ่นในกรณีนี้มีเพียงจุดเดียว ซึ่งเป็นคำตอบของระบบสมการนี้

ระบบสมการมีคำตอบหนึ่งชุด □

5.5 เอกสารอ่านประกอบเพิ่มเติม

Venebles and Ripley (2013) เป็นหนังสือที่เหมาะสำหรับผู้เริ่มเรียนรู้โปรแกรม R ที่ประสงค์จะทำความเข้าใจการใช้ฟังก์ชั่นทั่วไปใน R เช่น การอ่านข้อมูล การสร้างกราฟ และการใช้ R ควบคู่กับเครื่องมือทางสถิติต่างๆ สำหรับผู้ประสงค์จะเรียนรู้ R เพื่อการใช้งานในทางเศรษฐมิติ นั้น สามารถศึกษาได้จาก Kleiber and Zeileis (2008) Hanck et al. (2018) และ Racine and Hyndman (2002) ทั้งนี้ ผู้สนใจเรียนรู้การใช้ชุดคำสั่ง `matlib` เป็นการเฉพาะ สามารถศึกษารายละเอียดเพิ่มเติมได้ จากคู่มือของชุดคำสั่ง ซึ่งสามารถดาวน์โหลดได้โดยไม่เสียค่าใช้จ่าย จาก

`https://cran.r-project.org/web/packages/matlib/matlib.pdf`

อนึ่ง ปัจจุบันการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ต่างๆ ในการศึกษาวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ได้เริ่มเป็นที่นิยมมากยิ่งขึ้น ดังจะเห็นได้จากตำราพีชคณิตเชิงเส้นรุ่นใหม่ๆ อาทิ Kolman and Hill (2014) ซึ่งได้เริ่มสอดแทรกแนวทางการใช้โปรแกรม เช่น MATLAB ไว้ในเนื้อหาบางส่วนของหนังสือ ทั้งนี้ ผู้เขียนเห็นว่าโปรแกรม R ซึ่งผู้เขียนเลือกใช้ในหนังสือเล่มนี้นั้น สามารถใช้ประกอบการเรียนรู้วิชาพีชคณิตเชิงเส้นได้ไม่น้อยไปกว่าโปรแกรม เช่น MATLAB ด้วยเหตุผลบางประการ สำหรับเหตุผลในประการแรกนั้น เป็นเรื่องในเชิงประสิทธิภาพโดยเปรียบเทียบของทั้งสองโปรแกรม ด้วยว่า R นั้นเป็นโปรแกรมเปิดที่สามารถใช้ได้โดยไม่เสียค่าใช้จ่าย ต่างจาก ที่มีราคาสูงมาก ดังนี้ จึงกล่าวได้ว่า R นั้นย่อมมีประสิทธิภาพในเชิงการประหยัดต้นทุนมากกว่า เหตุผลอีกประการหนึ่งนั้น ได้แก่ การที่ชุดคำสั่งใหม่ๆ เช่น `matlib` ใน R ที่เพิ่งถูกเขียนขึ้นไม่นานนั้น ได้พัฒนาให้ R เป็นเครื่องมือที่มีศักยภาพสูงมาก ในการเรียนการสอนแนวคิดต่างๆ ทางพีชคณิตเชิงเส้น อาทิ คำสั่งการสร้างกราฟจากระบบสมการเชิงเส้นในปริภูมิสามมิติ ที่ช่วยอธิบายคำตอบของระบบสมการในรูปการตัดกันของระนาบสามระนาบ ซึ่งเป็นคำสั่งเฉพาะใน R ที่ไม่สามารถพบได้ในโปรแกรมอื่น เป็นต้น

ภาคผนวก ก
: คณิตศาสตร์เบื้องต้น

เนื้อหาเกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์เบื้องต้นในภาคผนวกนี้ เป็นเพียงการรวบรวมและทบทวนหัวข้อทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นในการศึกษาวิชาพีชคณิตเชิงเส้นและเศรษฐศาสตร์สำหรับผู้ที่มีพื้นฐานในเรื่องนั้นๆ บ้างแล้ว มากกว่าที่จะเป็นการอธิบายความรู้ในแต่ละหัวข้อแต่ต้น ซึ่งผู้อ่านที่มีพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ในหัวข้อต่างๆ เช่น เซต การพิสูจน์ แคลคูลัสเบื้องต้น ตรีโกณมิติ และจำนวนจินตภาพหรือจำนวนเชิงซ้อนบ้างแล้ว สามารถศึกษาเกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้นในหนังสือเล่มนี้ได้ทันที โดยไม่จำเป็นต้องอ่านเนื้อหาในภาคผนวกนี้แต่อย่างใด หรือหากจะลองทำแบบฝึกหัดในหัวข้อต่างๆ เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของตนเกี่ยวกับเนื้อหาในแต่ละหัวข้อก่อนก็จะเป็นการดี ทั้งนี้ ภาคผนวกของหนังสือเล่มนี้แม้จะได้รวบรวมความรู้พื้นฐานต่างๆ ที่จำเป็นในการศึกษาพีชคณิตเชิงเส้น แต่ก็ไม่ได้รวบรวมความรู้ทุกด้านทางคณิตศาสตร์เอาไว้เสียทีเดียว และตั้งอยู่บนข้อสมมติที่ว่า ผู้อ่านพอมีพื้นฐานเกี่ยวกับคณิตศาสตร์เบื้องต้น เช่น คุณสมบัติต่างๆ ของตัวเลข และฟังก์ชั่น ตามสมควร

ก1 เซต

เซต (set) คือการจัดกลุ่มของสิ่งของหรือจำนวน เซตเป็นเครื่องมือที่สำคัญทางคณิตศาสตร์ ที่จะช่วยให้สามารถกำหนดขอบเขตที่ชัดเจนเ กี่ยวกับสิ่งที่กำลังพูดถึงหรือวิเคราะห์อยู่ได้ สิ่งที่อยู่ในเซตมีชื่อเรียกว่าสมาชิกของเซต การเขียนเซตหรือระบุเซต สามารถทำได้โดยการใช้เครื่องหมายปีกกา และระบุสมาชิกแต่ละตัวลงไปในเซตโดยมีเครื่องหมายลูกน้ำคั่น เช่น หากให้ S คือ เซตของสีในธงชาติไทย จะได้ว่า

$$S = \{r, w, b\}$$

เมื่อ $r, w,$ และ b แทนสีแดง ขาว และน้ำเงิน ตามลำดับ ทั้งนี้ มีข้อควรสังเกตว่า แม้จำนวนแถบในธงชาติจะมีทั้งหมด 5 แถบด้วยกัน ซึ่งประกอบด้วยแดง ขาว น้ำเงิน ขาว และแดง แต่การกล่าวถึงเซตของสีในธงชาติ ซึ่งประกอบด้วยสีทั้งหมดเพียง 3 สีนั้น แม้แถบสีจะต่างกันแต่หากเป็นสีเดียวกัน ก็ไม่จำเป็นต้องนับซ้ำ ข้อควรสังเกตที่สำคัญอีกข้อหนึ่ง คือ สมาชิกที่ถูกระบุไว้ในเซตจะสลับตำแหน่งกันก็ได้ ขอเพียงระบุสีให้ครบก็เพียงพอ

การระบุว่าวัตถุหรือสิ่งหนึ่งเป็นสมาชิกของเซตหนึ่ง นิยมใช้สัญลักษณ์ $\in$ ส่วนการระบุว่าวัตถุหรือสิ่งหนึ่งไม่เป็นสมาชิกของเซตหนึ่ง นิยมใช้สัญลักษณ์ $\notin$ เช่น จากตัวอย่างข้างต้น r เป็นสมาชิกของเซต S สามารถเขียนแทนด้วย $r \in S$ แต่ g ไม่เป็นสมาชิกของเซต S ดังนั้น $g \notin S$ เป็นต้น

การเขียนเซตบางประเภทอาจไม่จำเป็นต้องระบุสมาชิกทั้งหมดให้ครบ แต่อาจใช้วิธีระบุสมาชิกบางส่วนให้พอเห็นรูปแบบก็ได้ อาทิ

$$I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

คือ เซตของจำนวนเต็ม โดยสัญลักษณ์ $\ldots$ นั้น นิยมใช้เพื่อหมายถึงการละสมาชิกอื่นๆ ของเซตเอาไว้ เมื่อต่างเข้าใจตรงกันแล้วว่า สมาชิกอื่นๆ หมายถึงอะไร จากการคาดเดารูปแบบของสมาชิกที่ถูกระบุเอาไว้ในเซต เช่น จากสมาชิกที่ถูกระบุในเซต I ซึ่งเป็นจำนวนเต็มที่เริ่มจาก -3 ไปจนถึง 3 ดังนี้ จึงอาจคาดเดาได้ว่า $\ldots$ ในส่วนแรกของ I หมายถึง $-4, -5, -6$ ไปเรื่อยๆ และในส่วนที่สองของ I หมายถึง $4, 5, 6$ ไปเรื่อยๆ เช่นกัน อนึ่ง การใช้สัญลักษณ์ $\ldots$ แทนสมาชิกอื่นๆ ในเซต ที่ละไว้ในฐานที่เข้าใจนั้น หากระบุสมาชิกในเซตมากเกินไปก็อาจเกิดความเยิ่นเย้อ แต่หากน้อยเกินไป ก็อาจก่อให้เกิดการตีความที่สับสนได้ อาทิ

$$O = \{1, 3, 5, \ldots\}$$

คือ เซตของจำนวนนับที่เป็นเลขคี่ แต่หากระบุเพียง $O = \{1, \ldots\}$ ก็อาจสร้างความสับสนได้ ว่าอาจหมายถึงเซตของจำนวนนับทั้งที่เป็นเลขคี่ และเลขคู่ก็เป็นได้ เป็นต้น

การเขียนเซตอีกวิธีหนึ่ง คือ การระบุคุณสมบัติของสมาชิกในเซต โดยไม่จำเป็นต้องระบุสมาชิกในเซตแต่ละตัว เช่น

$$X = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 1 = 0\}$$

หมายถึงเซตของจำนวนจริง ที่หากยกกำลังสองแล้ว มีค่าเท่ากับ 1 ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกสองตัว คือ 1 และ -1

แนวคิดที่สำคัญอีกสองเรื่องเกี่ยวกับเซต ได้แก่ **เซตย่อย (subset)** และ **ซูปเปอร์เซต (superset)** โดยหาก A เป็นเซตย่อยของ B สมาชิกทุกตัวใน A จะต้องอยู่ใน B การเป็นเซตย่อยสามารถใช้สัญลักษณ์ $\subset$ เช่น หาก A เป็นเซตย่อยของ B สามารถเขียนแทนด้วย $A \subset B$ จากการใช้สัญลักษณ์นี้ $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $x \in B$ สำหรับทุก $x \in A$ ในกรณีนี้ เราสามารถมองกลับกันได้ว่า หาก A เป็นเซตย่อยของ B แล้ว จะกล่าวว่า B เป็นซูปเปอร์เซตของ A ก็ได้ ซึ่งสามารถเขียนแทนด้วย $B \supset A$

อนึ่ง เซตที่มีลักษณะพิเศษประเภทหนึ่งคือ **เซตว่าง (null set)** ซึ่งนิยมใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ $\{\}$ หรือ $\emptyset$ ซึ่งหมายเซตที่ไม่มีสมาชิกใดๆ จากคำนิยามนี้ $\emptyset \subset A$ เมื่อ A คือเซตใดๆ เสมอ

ตัวอย่างที่ ก1 สมมติให้ S_1 คือเซตของสีบนธงชาติไทย และ S_2 คือเซตของสีบนธงชาติไทยที่ปรากฏบนแถบมากกว่า 1 แถบ จะได้ว่า $S_2 \subset S_1$ เนื่องจาก $S_1 = \{r, w, b\}$, $S_2 = \{r, w\}$ และ r, w ซึ่งเป็นสมาชิกทั้งหมดของ S_2 ต่างก็เป็นสมาชิกของ S_1 และโดยที่ $S_2 \subset S_1$ ดังนั้น $S_1 \supset S_2$ อนึ่ง มีข้อสังเกตสำคัญคือ การเรียงลำดับสมาชิก หรือสีบนธงชาติไทยในตัวอย่างนี้ จะเรียงอย่างไรก็ได้ กล่าวคือ $S_1 = \{r, w, b\} = \{w, r, b\} = ...$ □

ตัวอย่างที่ ก2 สมมติให้ $S_1 = \{\emptyset\}$ และ $S_2 = \{x \in \mathbb{R}\}$ ดังนั้น $\emptyset \in S_1$ แต่ $\emptyset \notin S_2$ เนื่องจาก S_1 มีสมาชิกหนึ่งตัวคือ $\emptyset$ แต่ S_2 ไม่มี $\emptyset$ เป็นสมาชิก อย่างไรก็ตาม $\emptyset \subset S_1, S_2$ เนื่องจากเซตว่างเป็นเซตย่อยของทุกเซตเสมอ □

ตัวอย่างที่ ก3 ในเกมเป่ายิงฉุบ เซตของผู้เล่นในเกมคือ $N = \{n_1, n_2\}$ เมื่อ n_1 และ n_2 คือผู้เล่นที่ 1 และ 2 ตามลำดับ เซตของการกระทำที่ผู้เล่นแต่ละคนสามารถเลือกได้ คือ $A_1 = A_2 = \{r, s, p\}$ เมื่อ r, s, p หมายถึงการที่ผู้เล่นแต่ละคนเลือกออกค้อน กรรไกร และกระดาษตามลำดับ □

โอเปอเรเตอร์ของเซต

โอเปอเรเตอร์ของเซต (set operator)[1] คือ การจัดการต่างๆ เกี่ยวกับเซต ซึ่งเทียบได้กับการจัดการต่างๆ เกี่ยวกับตัวเลข เช่น การบวกลบคูณหาร ที่คุ้นเคยกัน โดยสำหรับเซต A และ B ใดๆ

1. การยูเนียน (union) คือ การรวมเอาสมาชิกของทุกเซตเข้าไว้ด้วยกัน กล่าวคือ

$$A \cup B = \{x|x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$$

2. การอินเทอร์เซ็ค (intersect) คือ การเลือกเอาสมาชิกที่แต่ละเซตมีร่วมกัน กล่าวคือ

$$A \cap B = \{x|x \in A \text{ และ } x \in B\}$$

3. การลบ (minus) คือ การเลือกเอาสมาชิกที่เซตหนึ่งมี แต่อีกเซตหนึ่งไม่มี กล่าวคือ

$$A - B = \{x|x \in A \text{ และ } x \notin B\}$$

4. การคอมพลิเมนท์ (compliment) คือ การเลือกเอาสมาชิกที่เซตหนึ่งไม่มี กล่าวคือ

$$A^c = \{x|x \notin A\}$$

5. การคูณแบบคาร์ทีเซียน (Cartesian product) คือ การจับคู่สมาชิกในเซตหนึ่งกับสมาชิกในอีกเซตหนึ่ง กล่าวคือ

$$A \times B = \{(x,y)|x \in A \text{ และ } y \in B\}$$

ตัวอย่างที่ ก4 สมมติให้ $S_1 = \{x|x \in \mathbb{R}_+\}$ คือ เซตของจำนวนจริงบวกซึ่งรวม 0 อยู่ด้วย และ $S_2 = \{x|x \in \mathbb{R}_-\}$ คือ เซตของจำนวนจริงลบซึ่งรวม 0 อยู่ด้วย จะได้ว่า $S_1 \cup S_2 = \{x|x \in \mathbb{R}\}$ คือ เซตของจำนวนจริง $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ และ $S_1 - S_2 = \{x \in \mathbb{R}|x > 0\}$ อย่างไรก็ตาม หาก

[1] แนวคิดเรื่องโอเปอเรเตอร์ของเซตแม้จะเทียบเคียงกันได้กับโอเปอเรเตอร์ของการคำนวณตัวเลข (arithmetic operator) เช่น การบวก ลบ คูณ และหาร ตัวเลข ซึ่งเป็นที่รู้จักกันดี แต่อาจมีความซับซ้อนกว่าบ้างในบางประเด็น โดยเฉพาะอย่างยิ่งในประเด็นที่เกี่ยวข้องกับสถานะของโอเปอเรเตอร์ของเซตว่าจัดเป็นฟังก์ชั่นรูปแบบหนึ่งหรือไม่ ต่างจากโอเปอเรเตอร์ของการคำนวณตัวเลข ซึ่งสามารถเห็นได้ชัดเจนว่าเป็นฟังก์ชั่น อาทิ การบวก และลบ เป็นฟังก์ชั่นแบบทวิภาค (binary function) ที่อยู่ในรูป $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ เป็นต้น

ให้ $S_3 = \{x|x \in \mathbb{R}_{++}\}$ คือ เซตของจำนวนจริงบวกซึ่งไม่รวม 0 และ $S_4 = \{x|x \in \mathbb{R}_{--}\}$ คือเซตของจำนวนจริงลบซึ่งไม่รวม 0 จะได้ว่า $S_3 \cap S_4 = \emptyset$ และ $S_3 - S_4 = S_3$ $\square$

ตัวอย่างที่ ก5 จากตัวอย่างที่ ก3 เซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ของเกมเป่ายิงฉุบ คือ ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตของการกระทำ ของผู้เล่นที่หนึ่งและผู้เล่นที่สอง ที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$O = \{(x, y)|x \in A_1, y \in A_2\}$$

ซึ่งประกอบด้วยสมาชิก 9 ตัว กล่าวคือ

$$O = \{(r, r), (r, s), (r, p), (s, r), (s, s), (s, p), (p, r), (p, s), (p, p)\}$$

เช่น สมาชิกตัวที่สอง $(r, s) \in O$ หมายถึง ผลลัพธ์ที่เกมจบลงด้วยการที่ผู้เล่นที่ 1 และ 2 ออกค้อนและกรรไกร ตามลำดับ $\square$

ตัวอย่างที่ ก6 หากให้ $\ell_1 = \{x|x \in \mathbb{R}\}$ และ $\ell_2 = \{y|y \in \mathbb{R}\}$ ซึ่งเป็นเซตของจำนวนจริง ที่ประกอบกันเป็นเส้นตรง 2 เส้น ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตทั้งสอง คือ

$$\ell_1 \times \ell_2 = \{(x, y)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

จะประกอบขึ้นเป็นระนาบสองมิติ $\square$

ก2 การพิสูจน์

การพิสูจน์เป็นหัวใจของคณิตศาสตร์ที่สร้างให้คณิตศาสตร์มีสถานะเป็นวิทยาศาสตร์ที่บริสุทธิ์ที่สุดสาขาหนึ่ง การพิสูจน์เป็นการสนับสนุนให้รู้ว่า สิ่งที่กล่าวอ้างเป็นจริงอย่างไร[1] แนวคิดเรื่องการพิสูจน์ มีความสัมพันธ์อย่างลึกซึ้งกับความรู้ทางตรรกศาสตร์ เช่น หากต้องการพิสูจน์ว่า “คนไทย*ทุกคน*เป็นผู้ชาย” นั้น สามารถเห็นได้อย่างชัดเจนว่า การจะหาหลักฐานที่ว่ามีคนไทยหนึ่งคนเป็นผู้ชาย ย่อมไม่เพียงพอที่จะพิสูจน์ว่าข้อความ “คนไทยทุกคนเป็นผู้ชาย” เป็นจริงได้ แม้สามารถจะพิสูจน์ได้ว่าข้อความ “คนไทย*บางคน*เป็นผู้ชาย” เป็นจริงก็ตาม อย่างไรก็ตาม หากต้องการพิสูจน์ว่า “คนไทยทุกคนเป็นผู้ชาย” ไม่เป็นจริง เพียงแต่หาคนไทยบางคนที่ไม่ใช่ผู้ชายมาให้ได้ ก็เพียงพอแล้วที่จะพิสูจน์ว่าข้อความดังกล่าวไม่เป็นจริง และโดยที่ทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์และเศรษฐ-

[1] ทั้งนี้ อาจกล่าวได้ว่าทฤษฎีบทใดๆ ที่ผ่านการพิสูจน์อย่างถูกต้องแล้ว จะต้องถูกต้องเสมอ แม้อาจไม่สมจริงก็ตาม

ศาสตร์ส่วนมาก มักอยู่ในรูปของข้อความที่แฝงความเป็นทั่วไป เช่น สูตรที่ว่า

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

หมายรวมถึงทุกค่า n ที่เป็นจำนวนนับ ไม่ใช่เฉพาะบางค่าของ n การจะพิสูจน์สูตรข้างต้นโดยการยกตัวอย่างสนับสนุนว่า หากให้ $n = 2$ แล้ว $1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2}$ เป็นจริง ย่อมไม่เพียงพอ

ในหนังสือเล่มนี้ จะได้พิจารณาวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นที่นิยมสี่วิธี ดังนี้

การพิสูจน์ทางตรง

การพิสูจน์ทางตรง (direct proof) คือการพิสูจน์ที่เริ่มต้นจากข้อเท็จจริงเรื่องหนึ่ง จากนั้นจึงเชื่อมโยงไปยังข้อเท็จจริงอีกเรื่องหนึ่ง ต่อเนื่องไปเรื่อยๆ จนกระทั่งถึงเป้าหมายที่เป็นข้อสรุปของสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ เช่น หากต้องการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่อยู่ในรูปของ $P \to Q$ การพิสูจน์ทางตรงอาจอยู่ในรูปของ $P \to P_1 \to \ldots \to P_k \to Q$ เมื่อ $P_1, \ldots, P_k$ คือข้อเท็จจริงต่างๆ ที่สามารถใช้เชื่อมโยงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ที่ว่า $P \to Q$ เป็นจริงได้ อนึ่ง ข้อเท็จจริงที่ใช้ในกระบวนการพิสูจน์นั้น อาจเป็นข้อสรุปที่ได้จากทฤษฎีบทอื่นๆ ที่ถูกพิสูจน์มาแล้ว หรืออาจเป็นข้อเท็จจริงที่อยู่ในรูปของ**คำนิยาม (definition)** ซึ่งเป็นจริงโดยไม่ต้องการการพิสูจน์ใดๆ เนื่องจากเป็นสิ่งที่ถูกกำหนดขึ้นก็ได้

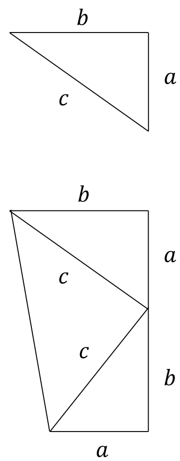
ตัวอย่างที่ ก7 ทฤษฎีบทของปิทาโกรัสที่ว่าสำหรับสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ นั้น ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากยกกำลังสอง จะเท่ากับผลรวมของความยาวของแต่ละด้านที่เหลือยกกำลังสองเสมอ เป็นทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ที่เป็นที่รู้จักกันดีที่สุดบทหนึ่ง ในที่นี้เราจะพิจารณาการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ด้วยการพิสูจน์ทางตรงโดย เจมส์ การ์ฟีลด์ (James Garfield, 1831-1881) [1] ดังสามารถแสดงได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

(P) สมมติให้สามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ มีด้านตรงข้ามมุมฉากที่เท่ากับ c และอีกสองด้านที่เหลือที่เท่ากับ a และ b

(P_1) จากสามเหลี่ยมมุมฉากข้างต้น หากสร้างสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีลักษณะเหมือนกัน และ

---

[1] เจมส์ การ์ฟีลด์ (James Garfield, 1831-1881) อดีตประธานาธิบดีของประเทศสหรัฐอเมริกา ผู้มีพื้นฐานมาจากด้านกฎหมาย อนึ่ง การ์ฟีลด์ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ เมื่อขณะเป็นสมาชิกสภาผู้แทนราษฎรของสหรัฐอเมริกา ในลักษณะคำถามลับสมองที่แลกเปลี่ยนพูดคุยกันระหว่างกลุ่มเพื่อนสมาชิกสภา



รูปที่ ก1 การพิสูจน์ทฤษฎีบทของปิทาโกรัสด้วยการพิสูจน์ทางตรง จากสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ ที่มีด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับ c และด้านที่เหลือเท่ากับ a และ b การนำสามเหลี่ยมมุมฉากเดิมมาประกบกันจะสร้างสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูป ซึ่งหากหาพื้นที่โดยการนำพื้นที่ของสามเหลี่ยมเล็กสามรูปมารวมกัน จะได้พื้นที่เท่ากับ $ab + \frac{1}{2}c^2$ แต่หากหาพื้นที่โดยใช้สูตรของสี่เหลี่ยมคางหมูโดยตรง จะได้พื้นที่เท่ากับ $ab + \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$ ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า $a^2 + b^2 = c^2$

นำไปประกบเข้ากับสามเหลี่ยมมุมฉากเดิมดังรูปที่ ก1 จะได้สี่เหลี่ยมคางหมูที่มีลักษณะดังรูป ซึ่งมีฐานเท่ากับ $a+b$ และด้านคู่ขนานแต่ละด้านเท่ากับ a และ b ตามลำดับ

(P_2) สมมติให้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมูในรูปเท่ากับ A จากรูป พื้นที่ดังกล่าวจะเท่ากับพื้นที่สามเหลี่ยมมุมฉากสามรูปรวมกัน ซึ่งเท่ากับ

$$A = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 = ab + \frac{1}{2}c^2$$

(P_3) เช่นเดียวกัน หากหาพื้นที่ดังกล่าวโดยใช้สูตรของสี่เหลี่ยมคางหมู จะได้

$$A = \frac{(a+b)^2}{2} = ab + \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$$

(Q) จาก P_2 และ P_3 จะได้ว่า

$$a^2 + b^2 = c^2$$

จะเห็นได้ว่า การพิสูจน์ขั้นต้น ใช้กระบวนการพิสูจน์แบบทางตรง ที่เริ่มจากจุดตั้งต้นคือการพิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ ที่ด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับ c และด้านที่เหลือเท่ากับ a และ b อันเป็นเงื่อนไขในทฤษฎีบท จากนั้นจึงพิสูจน์โดยใช้ข้อเท็จจริงๆ ต่าง ไล่เรียงมาเรื่อยๆ จนได้ข้อสรุปในทฤษฎีบทที่ว่า $a^2+b^2=c^2$ ทั้งนี้ หากพิจารณาโดยละเอียด ก็จะเห็นได้ว่า ข้อเท็จจริงแต่ละเรื่องในการพิสูจน์ข้างต้น คือ ข้อเท็จจริงที่ว่าหากนำสามเหลี่ยมมุมฉากมาจัดเรียงกันในลักษณะดังเช่นในรูป ก6 นั้นจะได้สี่เหลี่ยมคางหมู (P_1) ข้อเท็จจริงเกี่ยวกับการหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม (P_2) และการหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู (P_3) นั้น ต่างเป็นข้อเท็จจริงที่ถูกพิสูจน์ไว้แล้วในทฤษฎีบทอื่นๆ ซึ่งถูกหยิบมาใช้ในกระบวนการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ทั้งสิ้น อย่างไรก็ตาม โดยที่ข้อเท็จจริงทั้ง 3 เรื่องข้างต้น ต่างถือเป็นข้อเท็จจริงที่เป็นที่รู้กันโดยทั่วไปแล้ว จึงอาจนำมาใช้ได้โดยไม่ต้องพิสูจน์เพิ่มเติมอีก แต่หากเป็นเรื่องเฉพาะที่ไม่ได้เป็นที่ทราบกันดีอย่างแพร่หลายแล้ว การพิสูจน์ที่สมบูรณ์ ย่อมควรต้องพิสูจน์ข้อเท็จจริงแต่ละเรื่อง ก่อนที่ข้อเท็จจริงดังกล่าว จะถูกนำมาใช้ในแต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์ $\square$

ตัวอย่างที่ ก8 การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ว่า ผลคูณของจำนวนนับที่เป็นเลขคู่ กับจำนวนนับใดๆ จะเท่ากับจำนวนนับที่เป็นเลขคู่เสมอ สามารถเริ่มจากนิยามของจำนวนนับที่เป็นเลขคู่ ซึ่งเท่ากับ 2 คูณด้วยจำนวนนับใดๆ ดังนั้น หากให้ a เป็นจำนวนนับที่เป็นเลขคู่ จะได้ว่า $a = 2c$ เมื่อ c เป็นจำนวนนับใดๆ สมมติให้ d เป็นจำนวนนับใดๆ ดังนั้น $ad = 2cd = 2e$ เมื่อ $e = cd$ ซึ่ง จาก

นิยามของจำนวนนับที่เป็นเลขคู่ข้างต้น จึงสรุปได้ว่า ผลคูณของจำนวนนับที่เป็นเลขคู่ กับจำนวนนับใดๆ จะเท่ากับจำนวนนับที่เป็นเลขคู่เสมอ

ทั้งนี้ การพิสูจน์ข้างต้นขึ้นอยู่กับข้อเท็จจริงที่ว่าผลคูณของจำนวนนับใดๆ จะเป็นจำนวนนับเช่นกัน ซึ่งในกรณีนี้ ข้อเท็จจริงข้างต้นถือเป็นคุณสมบัติพื้นฐานของจำนวนนับที่เรียกว่าคุณสมบัติปิดของการคูณ (closure property of multiplication) ที่ไม่จำเป็นต้องพิสูจน์ □

การพิสูจน์ด้วยวิธีแย้งสลับที่

การพิสูจน์ด้วยวิธีแย้งสลับที่ (proof by contrapositive) คือ การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \to Q$ โดยการพิสูจน์ข้อความเหมือนกันในเชิงตรรกศาสตร์ คือ $\sim Q \to \sim P$ แทน โดยทั่วไปแล้ว การพิสูจน์ข้อความด้วยการพิสูจน์ทางตรง มักทำคู่กับการพิสูจน์ด้วยวิธีแย้งสลับที่ได้เสมอ แต่การจะเลือกใช้การพิสูจน์ด้วยวิธีใดนั้น ย่อมขึ้นอยู่กับว่า วิธีใดสามารถพิสูจน์ข้อความดังกล่าวได้สะดวกและกระชับกว่ากัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ ก9 ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ว่า สำหรับทุกค่า $x \in \mathbb{I}$ หาก x^2 เป็นเลขคี่ x ย่อมเป็นเลขคี่เช่นกัน ในกรณีนี้ ข้อความแบบแย้งสลับที่ ที่เหมือนกับข้อความดังกล่าวได้แก่ สำหรับทุกค่า $x \in \mathbb{I}$ หาก x เป็นเลขคู่ x^2 ย่อมเป็นเลขคู่เช่นกัน ซึ่งหากสามารถพิสูจน์ข้อความแบบแย้งสลับที่ว่าเป็นจริงได้ ก็นับเป็นการพิสูจน์ข้อความดั้งเดิม ว่าเป็นจริงได้เช่นกัน สำหรับในกรณีนี้ การพิสูจน์แบบแย้งสลับที่ดูจะเป็นการง่ายกว่า เพราะข้อความตั้งต้น ซึ่งเป็นจุดเริ่มของการพิสูจน์ที่ว่า หากให้ $x \in \mathbb{I}$ เป็นเลขคู่ สามารถเริ่มได้ จากนิยามของจำนวนนับที่เป็นเลขคู่ ดังที่ได้พิจารณากันไปแล้วในตัวอย่างที่ ก7 กล่าวคือ $x = 2y$ เมื่อ $y \in \mathbb{I}$ ดังนั้น $x^2 = 4y^2 = 2(2 \cdot y \cdot y)$ จึงเป็นจำนวนนับที่เป็นเลขคู่เช่นกัน จากคุณสมบัติปิดของการคูณของจำนวนนับ ที่ได้กล่าวถึงในตัวอย่างที่ ก7 ซึ่งเป็นอันเสร็จสิ้นการพิสูจน์ข้อความแบบแย้งสลับที่ □

ตัวอย่างที่ ก10 ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ว่า สำหรับทุกค่า $x \in \mathbb{I}$ หาก x^2 เป็นเลขคู่ x ย่อมเป็นเลขคู่เช่นกัน ในกรณีนี้ การพิสูจน์ข้อความแบบแย้งสลับที่ที่ว่า สำหรับทุกค่า $x \in \mathbb{I}$ หาก x เป็นเลขคี่ x^2 ย่อมเป็นเลขคี่เช่นกัน สามารถทำได้ง่ายกว่า เนื่องจากเป็นการเริ่มต้นจากนิยาม โดยจากนิยามของจำนวนนับที่เป็นเลขคี่ คือ $x = 2y + 1$ เมื่อ y คือจำนวนนับที่เป็นเลขคู่ ดังนั้น

$$x^2 = (2y+1)^2 = 4y^2 + 4y + 1 = 2\left(2 \cdot y(y+1)\right) + 1$$

โดยที่ $2 \cdot y(y+1)$ เป็นจำนวนนับ จากคุณสมบัติปิดของการคูณของจำนวนนับ $2\left(2 \cdot y(y+1)\right)$ จึงเป็นจำนวนนับ ที่เป็นเลขคู่จากนิยามของจำนวนนับที่เป็นเลขคู่ และ $2\left(2 \cdot y(y+1)\right) + 1$ จึง

เป็นจำนวนนับ ที่เป็นเลขคี่จากนิยามของจำนวนนับที่เป็นเลขคี่ ซึ่งเป็นอันเสร็จสิ้นการพิสูจน์ข้อความแบบแย้งสลับที่ $\square$

การพิสูจน์ด้วยการย้อนแย้ง

การพิสูจน์ด้วยการย้อนแย้ง (proof by contradiction หรือ reductio ad adsurdum) คือ การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \to Q$ โดยการแสดงให้เห็นว่า $P \to \sim Q$ นั้นไม่มีทางเป็นไปได้ เนื่องจากจะย้อนแย้งกับข้อเท็จจริงบางอย่าง ซึ่งอาจเป็นข้อเท็จจริงที่ขัดกันเองแต่แรก เช่น หาก $P \to \sim Q$ จะนำไปสู่ $\sim P$ แล้ว สิ่งนี้ไม่อาจเกิดขึ้นได้เนื่องจากข้อสรุปคือ $\sim P$ นั้นขัดแย้งกับข้อความตั้งต้นคือ P ที่ถูกสมมติขึ้นว่าเกิดขึ้นหรือเป็นจริงแต่แรก หรืออาจย้อนแย้งกับข้อเท็จจริงอื่นๆ ที่เป็นที่ทราบดีหรือเป็นข้อสรุปจากทฤษฎีบทอื่นๆ ก็เป็นได้ ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ ก11 ในการพิสูจน์ว่า ไม่มีจำนวนตรรกยะใดที่มากกว่าที่ 0 ที่มีค่าน้อยที่สุด อาจเริ่มจากการสมมติให้ข้อสรุปดังกล่าวไม่เป็นจริง กล่าวคือ สมมติให้มีจำนวนตรรกยะ x ที่มากกว่า 0 ที่มีค่าน้อยที่สุด อย่างไรก็ตาม จากนิยามของจำนวนตรรกยะ $\frac{x}{2}$ ย่อมเป็นจำนวนตรรกยะ และโดยที่ $0 < x$ ดังนั้น $0 < \frac{x}{2} < x$ ซึ่งเป็นการย้อนแย้งกับข้อความตั้งต้นที่ว่า x เป็นจำนวนตรรกยะที่มากกว่า 0 ที่มีค่าน้อยที่สุด ดังนี้ จึงสรุปได้ว่า ไม่มีจำนวนตรรกยะใดที่มากกว่าที่ 0 ที่มีค่าน้อยที่สุด $\square$

ตัวอย่างที่ ก12 ในการพิสูจน์ว่าสำหรับสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากจะน้อยกว่าผลรวมของอีกสองด้านที่เหลือเสมอ หากพิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉากดังแสดงในรูป ก1 ซึ่งด้านตรงข้ามมุมฉากคือ c และด้านที่เหลือคือ a และ b เมื่อ $a, b, c > 0$ การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ เริ่มได้โดยพิสูจน์ให้เห็นว่า การที่ข้อความนี้ไม่จริงนั้นเป็นไปไม่ได้ กล่าวคือ หากสมมติให้ $c \geq a + b$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$\begin{aligned} c^2 &\geq (a+b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \end{aligned}$$

จากทฤษฎีบทของพิทาโกรัสที่ได้พิสูจน์ไว้ในตัวอย่างที่ ก6 จะได้ว่า $c^2 = a^2 + b^2$ ซึ่งเมื่อแทนค่าในอสมการจะได้

$$0 \geq 2ab$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้หาก $a, b > 0$ ตามเงื่อนไขแรกเริ่ม $\square$

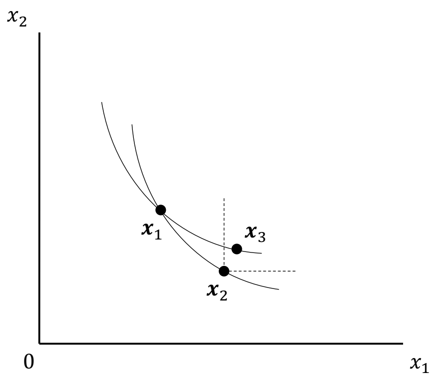
ตัวอย่างที่ ก13 ในทฤษฎีผู้บริโภค หากให้เวคเตอร์ $\boldsymbol{x}_{n\times 1}$ แทนตะกร้าสินค้าซึ่งประกอบด้วยสินค้าหรือบริการ n ชนิด และให้ความพอใจของผู้บริโภค มีลักษณะยิ่งมากยิ่งดีอย่างยิ่ง (strictly monotonic preference) กล่าวคือ หากให้ $\boldsymbol{x}_1 > \boldsymbol{x}_2$ จะได้ว่า $\boldsymbol{x}_1 \succ \boldsymbol{x}_2$ เมื่อ $\boldsymbol{x}_i > \boldsymbol{x}_j$ หมายถึงการที่สินค้าและบริการใดๆ อย่างน้อยตัวหนึ่งในตะกร้า $\boldsymbol{x}_i$ มากกว่าในตะกร้า $\boldsymbol{x}_j$ และ $\boldsymbol{x}_i \succ \boldsymbol{x}_j$ หมายถึงการที่ผู้บริโภคพอใจในตะกร้า $\boldsymbol{x}_i$ มากกว่าตะกร้า $\boldsymbol{x}_j$ และหากนิยามให้ เส้นความพอใจเท่ากัน (indifference curve) คือ กลุ่มสินค้าที่ผู้บริโภคมีความพอใจเท่าๆ กันแล้ว จะสามารถพิสูจน์ด้วยการย้อนแย้งได้ว่า หากความพอใจของผู้บริโภคมีลักษณะยิ่งมากยิ่งดีอย่างยิ่งแล้ว เส้นความพอใจเท่ากันจะตัดกันไม่ได้

ในการพิสูจน์ข้อเท็จจริงนี้ อาจสมมติให้เห็นภาพได้โดยง่ายโดยพิจารณา $\boldsymbol{x}_{2\times 1}$ ดังรูปที่ ก2 สมมติให้ความพอใจของผู้บริโภคมีลักษณะยิ่งมากยิ่งดีอย่างยิ่ง หากเส้นความพอใจเท่ากันสามารถตัดกันได้ ผู้บริโภคจะพอใจ $\boldsymbol{x}_1$ เท่ากับ $\boldsymbol{x}_2$ เนื่องจาก $\boldsymbol{x}_1$ เท่ากับ $\boldsymbol{x}_2$ อยู่บนเส้นความพอใจเท่ากันเดียวกัน และผู้บริโภคจะพอใจ $\boldsymbol{x}_1$ เท่ากับ $\boldsymbol{x}_3$ เนื่องจาก $\boldsymbol{x}_1$ เท่ากับ $\boldsymbol{x}_3$ อยู่บนเส้นความพอใจเท่ากันเดียวกัน จากคุณสมบัติความเปลี่ยนผ่าน (transitivity) ของความพอใจของผู้บริโภค จะได้ว่า ผู้บริโภคย่อมพอใจ $\boldsymbol{x}_2$ เท่ากับ $\boldsymbol{x}_3$ ด้วย อย่างไรก็ตาม โดยที่ $\boldsymbol{x}_3 > \boldsymbol{x}_2$ จากคุณสมบัติความพอใจของผู้บริโภคที่มีลักษณะยิ่งมากยิ่งดีอย่างยิ่ง จึงสรุปได้ว่า ผู้บริโภคย่อมพอใจ $\boldsymbol{x}_3$ มากกว่า $\boldsymbol{x}_3$ ซึ่งย้อนแย้งกับข้อสรุปข้างต้นที่ว่า ผู้บริโภคย่อมพอใจ $\boldsymbol{x}_2$ เท่ากับ $\boldsymbol{x}_3$ ดังนี้ เส้นความพอใจเท่ากันย่อมไม่อาจตัดกันได้[1] $\square$

ก3 ฟังก์ชั่น

ฟังก์ชั่น (function) คือความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบหนึ่ง ที่จับคู่สมาชิกในเซตหนึ่ง เช่น เซต A ไปยังสมาชิกในอีกเซตหนึ่ง เช่น เซต B โดยการจับคู่ดังกล่าวมีเงื่อนไขสำคัญว่า สมาชิกในเซต A จะถูกจับคู่ไปยังสมาชิกเพียงหนึ่งเดียวในเซต B เท่านั้น การเขียนฟังก์ชั่นที่อธิบายความสัมพันธ์แบบจับคู่จากสมาชิกในเซต A ไปยังสมาชิกในเซต B เขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $f : A \to B$ เช่น ในกรณีที่เซต A คือ เซตของจำนวนจริงในมิติ n และเซต B คือเซตของจำนวนจริงในมิติ m การจับคู่สมาชิกระหว่างเซตทั้งสองด้วยฟังก์ชั่นสามารถเขียนแทนได้ด้วย $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นต้น สำหรับฟังก์ชั่น $f : A \to B$ เราเรียก A ว่า**โดเมน (domain)** ของฟังก์ชั่น f และ B

[1]อนึ่ง มีข้อสังเกตสำคัญที่ว่า คุณสมบัติการเปลี่ยนผ่านของความพอใจของผู้บริโภคนั้น เป็นอีกข้อเท็จจริงสำคัญประการหนึ่งที่ใช้ในการพิสูจน์เรื่องนี้ ซึ่งถูกนำมาใช้ในที่นี้โดยไม่ได้พิสูจน์ ซึ่งผู้อ่านที่สนใจศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับข้อเท็จจริงนี้ สามารถค้นคว้าได้จากตำราทฤษฎีเศรษฐศาสตร์จุลภาค เช่น Mas-Collel et al. (1995)



รูปที่ ก2 การพิสูจน์ว่าเส้นความพอใจเท่ากันตัดกันไม่ได้ ด้วยวิธีการพิสูจน์ด้วยการย้อนแย้ง สมมติให้ความพอใจของผู้บริโภคมีลักษณะยิ่งมากยิ่งดีอย่างยิ่ง หากเส้นความพอใจเท่ากันสามารถตัดกันได้ ผู้บริโภคจะพอใจ $\boldsymbol{x}_1$ เท่ากับ $\boldsymbol{x}_2$ เนื่องจาก $\boldsymbol{x}_1$ เท่ากับ $\boldsymbol{x}_2$ อยู่บนเส้นความพอใจเท่ากันเดียวกัน และผู้บริโภคจะพอใจ $\boldsymbol{x}_1$ เท่ากับ $\boldsymbol{x}_3$ เนื่องจาก $\boldsymbol{x}_1$ เท่ากับ $\boldsymbol{x}_3$ อยู่บนเส้นความพอใจเท่ากันเดียวกัน จากคุณสมบัติความเปลี่ยนผ่าน (transitivity) ของความพอใจของผู้บริโภค จะได้ว่า ผู้บริโภคย่อมพอใจ $\boldsymbol{x}_2$ เท่ากับ $\boldsymbol{x}_3$ ด้วย อย่างไรก็ตาม โดยที่ $\boldsymbol{x}_3 > \boldsymbol{x}_2$ จากคุณสมบัติความพอใจของผู้บริโภค ที่มีลักษณะยิ่งมากยิ่งดีอย่างยิ่ง จึงสามารถสรุปได้ว่า ผู้บริโภคย่อมพอใจ $\boldsymbol{x}_3$ มากกว่า $\boldsymbol{x}_3$ ซึ่งย้อนแย้งกับข้อสรุปข้างต้นที่ว่า ผู้บริโภคย่อมพอใจ $\boldsymbol{x}_2$ เท่ากับ $\boldsymbol{x}_3$ ดังนั้น เส้นความพอใจเท่ากันจะไม่สามารถตัดกันได้

ว่า**เรนจ์ (range)** ของฟังก์ชั่น f

ตัวอย่างที่ ก14 ความสัมพันธ์ $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชั่นที่จับคู่สมาชิก ในเซตของจำนวนจริงที่มิติเท่ากับ 1 ไปสู่สมาชิกในเซตของจำนวนจริงบวก ที่มิติเท่ากับ 1 ซึ่งแสดงได้ในรูป $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ความสัมพันธ์ $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$ เป็นฟังก์ชั่นที่จับคู่สมาชิก ในเซตของจำนวนจริงที่มิติเท่ากับ 2 ไปสู่สมาชิกในเซตของจำนวนจริงบวก ที่มิติเท่ากับ 1 ซึ่งแสดงได้ในรูป $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ อย่างไรก็ตาม ความสัมพันธ์ $x_1^2 + x_2^2 = 1$ ไม่ใช่ฟังก์ชั่น เนื่องจากไม่ใช่ความสัมพันธ์ตามเงื่อนไขที่ว่า x_1 จะถูกจับคู่ไปยังค่า x_2 เพียงตัวเดียวเท่านั้น เช่น หากให้ $x_1 = 0$ แล้ว ค่าของ x_2 ที่ทำให้ความสัมพันธ์ข้างต้นเป็นจริงอาจเป็นทั้ง -1 หรือ 1 ก็ได้ $\square$

ตัวอย่างที่ ก15 ความสัมพันธ์ $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot x_2, x_2 \cdot x_3)$ เป็นฟังก์ชั่น $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ โดยแม้การจับคู่ตามเงื่อนไขของความสัมพันธ์นี้ จะเป็นการจับคู่จากเซตจำนวนจริงบวกใน 3 มิติไปสู่เซตจำนวนจริงบวกใน 2 มิติ แต่เนื่องจากสำหรับทุกค่า (x_1, x_2, x_3) จะนำไปสู่ $x_1 \cdot x_2$และ $x_2 \cdot x_3$ได้เพียงชุดเดียวเท่านั้น จึงถือเป็นการจับคู่ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชั่น $\square$

ในกรณีฟังก์ชั่นที่อยู่ในรูป $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ หรือที่เป็นที่นิยมเรียกกันว่า ฟังก์ชั่นหนึ่งตัวแปร (single-variable function) นั้น มีฟังก์ชั่นเฉพาะหลายประเภท ที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการศึกษาวิชาเศรษฐศาสตร์ อันได้แก่

1. **ฟังก์ชั่นพหุนาม (polynomial function)** คือ ฟังก์ชั่นซึ่งอยู่ในรูป

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ ฟังก์ชั่นพหุนามในลักษณะข้างต้น เป็นฟังก์ชั่นพหุนามในกรณีทั่วไป ซึ่งในกรณีเฉพาะที่ $n = 1$ จะได้ฟังก์ชั่นเส้นตรงหรือฟังก์ชั่นเชิงเส้น (linear function) ซึ่งอยู่ในรูป $f(x) = a_1 x + a_0$ และในกรณีที่ $n = 2$ จะได้ฟังก์ชั่นกำลังสอง (quadratic) ซึ่งอยู่ในรูป $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ในทางเศรษฐศาสตร์ สามารถใช้ฟังก์ชั่นพหุนามอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร ทั้งในกรณีที่เป็นความสัมพันธ์แบบเส้นตรงและไม่เป็นเส้นตรงได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้[1]

---

[1]อนึ่ง การหาคำตอบของฟังก์ชั่นพหุนาม คือ ค่า x ที่ทำให้สมการ

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

เป็นจริง หรือการหาราก (root) ของสมการพหุนาม เป็นคำถามสำคัญทางคณิตศาสตร์ซึ่งจะได้กล่าวต่อไปโดยละเอียดใน

รูปที่ ก3 เลออนฮาร์ท ออยเลอร์ (Leonhard Euler, 1707-1783) ออยเลอร์เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวสวิสที่เป็นหนึ่งในนักคณิตศาสตร์ที่ยิ่งใหญ่ที่สุดของโลกตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน ผลงานของออยเลอร์ครอบคลุมคณิตศาสตร์ทุกสาขา และมีอิทธิพลตกทอดมาเป็นความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่รู้จักกันในปัจจุบัน เช่น ค่า e อัตลักษณ์ของออยเลอร์ ความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์แบบฟังก์ชั่นที่รู้จักกันแพร่หลายในปัจจุบันในรูปของ $f(x)$ ตลอดจนสัญลักษณ์ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ เช่น การใช้ i แทนจำนวนจินตภาพ $\sum$ แทนการรวมกันทางคณิตศาสตร์ หรือแม้แต่การใช้อักษรกรีก π แทนสัดส่วนของเส้นรอบวงต่อเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม ออยเลอร์เป็นนักคณิตศาสตร์ที่มีผลงานมากที่สุดในบรรดานักคณิตศาสตร์ทั้งหมด จนแม้เวลานี้ออยเลอร์จะเสียชีวิตไปแล้วเกือบสามร้อยปี แต่ผลงานบางส่วนของออยเลอร์ที่เพิ่งถูกค้นพบ ก็ยังถูกตีพิมพ์ออกมาเรื่อยๆ แม้ออยเลอร์จะกลายเป็นคนตาบอดในชีวิตบั้นปลาย จนต้องอาศัยผู้ช่วยช่วยเขียนงานให้ตามคำบอกกล่าว แต่ผลงานของออยเลอร์กลับมีมากกว่าสมัยก่อนตาบอดเสียอีก ด้วยว่าไม่ต้องเสียเวลาเขียนงานด้วยตนเอง ออยเลอร์เป็นชาวสวิสที่ได้รับการยกย่องมากที่สุดผู้หนึ่ง โดยมีรูปปรากฏบนธนบัตร 10 สวิสฟรังก์ รุ่นปี 1976

ตัวอย่างที่ ก16 ธนาคารแห่งหนึ่งให้ดอกเบี้ยเงินฝากในอัตราร้อยละ a ต่อปี โดยจะคิดดอกเบี้ยทุกปี ในกรณีนี้ หากให้เงินต้นเท่ากับ x จะสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างเงินฝากที่ได้รับ ภายหลังจากที่ได้ฝากครบกำหนดหนึ่งปี และเงินต้นในรูปฟังก์ชั่นได้ คือ $f(x) = x + ax = (1+a)x$ ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นเส้นตรง และในลักษณะเดียวกันนี้ ความสัมพันธ์ระหว่างเงินฝากที่ได้รับ ภายหลังจากที่ได้ฝากครบกำหนด n ปี และเงินต้น จะอยู่ในรูปฟังก์ชั่น คือ $f(x) = (1+a)^n x$ ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นเส้นตรง □

ตัวอย่างที่ ก17 ต้นทุนการผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง ประกอบด้วยต้นทุนคงที่ c และต้นทุนผันแปรซึ่งเท่ากับ $ax^2 + bx$ เมื่อ $x > 0$ คือ ปริมาณสินค้าที่ผลิต และ $a, b > 0$ ดังนี้ ต้นทุนทั้งหมดในการผลิตสินค้าชนิดนี้ จึงเท่ากับ $f(x) = ax^2 + bx + c$ ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นกำลังสอง โดยมีต้นทุนผันแปรเฉลี่ย คือ $g(x) = ax + b$ ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นเส้นตรง □

2. ฟังก์ชั่นเอกซ์โปเนนเชียล (exponential function) คือ ฟังก์ชั่นซึ่งอยู่ในรูป

$$f(x) = e^x,$$

e^x หรือที่สามารถเขียนได้อีกรูปหนึ่งคือ $\exp(x)$ อ่านว่าเอกซ์โปเนนท์ x โดย e คือค่าคงที่ซึ่งมีนิยามคือ

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\ldots$$

จากฟังก์ชั่นข้างต้น สามารถเห็นได้โดยง่ายว่า ฟังก์ชั่นเอกซ์โปเนนเชียลจะอยู่ในรูป $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{++}$ เสมอ กล่าวคือ โดเมนของฟังก์ชั่น คือ เซตของจำนวนจริงใดๆ ส่วนเรนจ์ของฟังก์ชั่น คือ เซตของจำนวนจริงบวกที่มีค่ามากกว่า 0 เสมอ[1] ที่มาของ e นั้นเกี่ยวข้องกับเศรษฐศาสตร์โดยตรง โดยจากตัวอย่างที่ ก16 ซึ่งได้พิจารณาไปแล้วข้างต้น หากแปลงคำถามให้ธนาคารจ่ายดอกเบี้ยให้แก่ผู้ฝากปีละ 2 ครั้ง โดยคำนวณดอกเบี้ยทุกครึ่งปี ในกรณีนี้ หากผู้ฝากฝากเงินไว้ x จะได้เงินทั้งสิ้นเมื่อสิ้นปีเท่ากับ $x\left(1 + \frac{a}{2}\right)^2$ และหากให้ธนาคารจ่ายดอกเบี้ยแบบต่อเนื่องตลอดเวลา เงินที่ฝากไว้ x จะเท่ากับเงินทั้งสิ้น

$$\lim_{n\to\infty} x\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = xe^a$$

ตอนท้ายของภาคผนวกนี้

[1] ค่า $e \in \mathbb{Q}$ เป็นจำนวนอตรรกยะหนึ่งซึ่งมีความสำคัญมากในทางคณิตศาสตร์ซึ่งถูกค้นพบโดยนักคณิตศาสตร์ชาวสวิสชื่อ เลออนฮาร์ท ออยเลอร์ (Leonhard Euler, 1707-1783) โดยการใช้อักษร e แทนจำนวนอตรรกยะนี้ก็ด้วยเหตุผลที่ว่าเป็นอักษรนำหน้าชื่อของ Euler ซึ่งเป็นผู้ค้นพบจำนวนนี้เป็นคนแรก จนนักคณิตศาสตร์กล่าวไว้ว่า e นั้นย่อมาจากคำว่า ค่าคงที่ของออยเลอร์ (Euler's constant)

ค่า e เป็นเครื่องมือสำคัญที่สุดชิ้นหนึ่งที่จำเป็นในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์และเศรษฐศาสตร์หลายสาขา อาทิ การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงพลวัต การศึกษาเรื่องการเติบโตทางเศรษฐกิจ ความน่าจะเป็น เป็นต้น

ตัวอย่างที่ ก18 สมมติให้ประชากรในพื้นที่แห่งหนึ่งในเวลาตั้งต้นมีจำนวนเท่ากับ x สมมติให้อัตราการขยายตัวของประชากรเท่ากับ n ดังนั้น จำนวนประชากรในเวลา t จะเท่ากับ $L(t) = xe^{nt}$ ทั้งนี้ จากฟังก์ชั่นดังกล่าวในเวลาตั้งต้นคือ $t = 0$ จะได้ $L(0) = x$ ซึ่งสอดคล้องกับค่าตั้งต้นของประชากรที่กำหนดขึ้น $\square$

ตัวอย่างที่ ก19 จากตัวอย่างที่ ก18 สมมติให้รายได้ประชาชาติของพื้นที่ดังกล่าวในเวลาตั้งต้นเท่ากับ y และมีอัตราการขยายตัวเท่ากับ g ดังนั้น รายได้ต่อประชากรในพื้นที่ดังกล่าวจึงเท่ากับ

$$\frac{ye^{gt}}{xe^{nt}} = \left(\frac{y}{x}\right) e^{(g-n)t}$$

จากผลลัพธ์ข้างต้น สามารถสรุปได้ว่ารายได้ต่อประชากรในพื้นที่ดังกล่าวจะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ก็ต่อเมื่อ $g > n$ $\square$

ตัวอย่างที่ ก20 ฟังก์ชั่นความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (probability density function) ของตัวแปรสุ่ม x ซึ่งมีการกระจายแบบปกติ (normal distribution) คือ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

เมื่อ $-\infty < x < \infty$ สำหรับทุกค่าคงที่ $-\infty < \mu < \infty$ และ $\sigma^2 > 0$ ดังนั้นจากคุณสมบัติฟังก์ชั่นเอกซ์โปเนนเชียลข้างต้นจึงสรุปได้ว่า $f(x) > 0$ เสมอ ทั้งนี้ ฟังก์ชั่นความหนาแน่นร่วมของความน่าจะเป็น (joint probability density function) ของตัวแปรสุ่ม $x_1, \ldots, x_n$ ทั้งสิ้น n ตัวโดยทั้งหมดมีการกระจายแบบปกติ (normal distribution) และเป็นอิสระระหว่างกัน (independent) คือ

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2} = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

ฟังก์ชั่นข้างต้นมีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งในทางทฤษฎีความน่าจะเป็นว่าฟังก์ชั่นภาวะน่าจะเป็น (likelihood function) □

3. ฟังก์ชั่นล็อกการิธึม (logarithmic function) คือ ฟังก์ชั่นซึ่งอยู่ในรูป

$$f(x) = \log_a x$$

โดยที่ $a^{\log_a x} = x$ และในกรณีที่ $a = e$ นิยมเขียน $\log_a(x)$ ด้วย $\ln\ x$[1] ฟังก์ชั่นล็อกการิธึมเปรียบได้กับฟังก์ชั่นที่ตรงข้ามกับยกกำลัง กล่าวคือ $e^{\ln x} = x$ จากนิยามดังกล่าว ฟังก์ชั่นล็อกการิธึมจึงอยู่ในรูป $f : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ เสมอ โดยมีโดเมนของฟังก์ชั่น คือ เซตของจำนวนจริงใดๆ ที่มีค่ามากกว่า 0 ส่วนเรนจ์ของฟังก์ชั่น คือ เซตของจำนวนจริงใดๆ ที่ $\log_a x < 0$ เมื่อ $x < 1$ และ $\log_a x = 0$ เมื่อ $x = 1$ และ $\log_a x > 0$ เมื่อ $x > 1$ เสมอ

คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชั่นล็อกการิธึม ได้แก่

1. $\ln(xy) = \ln\ x + \ln\ y$; $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\ x - \ln\ y$

2. $\ln\ x^n = n\ln\ x$

3. $\log_a x = \frac{\ln\ x}{\ln\ a}$; $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

4. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$; $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_\mathrm{a} y$

5. $\log_a x^n = n\log_a x$

ตัวอย่างที่ ก21 การพิสูจน์คุณสมบัติข้อที่ 3 ของฟังก์ชั่นล็อกการิธึม สามารถทำได้จากนิยามของฟังก์ชั่น $\log_a x$ ซึ่งเท่ากับ

$$a^{\log_a x} = x$$

[1] สัญลักษณ์ $\log_a x$ อ่านว่า ล็อกฐาน a ของ x และสัญลักษณ์ $\ln\ x$ อ่านว่า ลอน x ย่อมาจากคำในภาษาลาตินว่า logarithmus naturalis ซึ่งแปลว่าล็อกการิธึมฐานธรรมชาติ (natural logarithm) ทั้งนี้ แม้แนวคิดเรื่องล็อกการิธึมจะมีความเป็นมาอย่างยาวนาน ซึ่งสามารถย้อนไปได้นับพันปีตั้งแต่สมัยกรีกโบราณ แต่ผู้ที่ได้ศึกษาเรื่องล็อกการิธึมอย่างเป็นระบบ และบัญญัติศัพท์ว่าล็อกการิธึมที่รู้จักกันในปัจจุบันนั้น คือ จอห์น เนเปียร์ (John Napier, 1550-1617) นักคณิตศาสตร์และนักดาราศาสตร์จากตระกูลขุนนางชาวสก็อต โดยคำว่า logarithm นั้น ผูกมาจากคำในภาษากรีก คือ logos ซึ่งแปลว่าสัดส่วน และ arithmos ซึ่งแปลว่าตัวเลข ซึ่งตรงกับคุณสมบัติของฟังก์ชั่นล็อกการิธึมที่แปลงผลคูณ ให้อยู่ในรูปของผลบวก และแปลงเศษส่วน ให้อยู่ในรูปของผลต่างของจำนวนได้ อนึ่ง ฟังก์ชั่นล็อกการิธึมมีคุณสมบัติพิเศษ ที่ช่วยแปลงจำนวนที่มีค่ามาก ให้ลดลงอยู่ในขอบเขตที่จัดการได้ง่ายขึ้น ซึ่งสามารถใช้ประยุกต์ในทางดาราศาสตร์ เพื่อศึกษาเรื่องระยะทางและการเคลื่อนที่ของดวงดาว อันเป็นที่สนใจของนักวิทยาศาสตร์ในสมัยนั้นได้

ซึ่งหากแปลงทั้งสองข้างสมการด้วยฟังก์ชั่น ln จะได้

$$\log_a x \cdot \ln\ a = \ln\ x$$

กล่าวคือ

$$\log_a x = \frac{\ln\ x}{\ln\ a}$$

และจากคุณสมบัติข้างต้น จะได้ว่า

$$\log_a b \cdot \log_b a = \frac{\ln\ b}{\ln\ a} \cdot \frac{\ln\ a}{\ln\ b} = 1$$

ทั้งนี้ คุณสมบัติดังกล่าวมีข้อกำหนดที่ชัดเจน คือ ฐานของฟังก์ชั่นล็อกการิธึม เช่น a จะต้องเป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่า 0 เสมอ □

ตัวอย่างที่ ก22 จากตัวอย่างที่ ก20 ฟังก์ชั่นภาวะน่าจะเป็น (likelihood function) ของตัวแปรสุ่ม $x_1, \ldots, x_n$ ที่ทั้งหมดมีการกระจายแบบปกติ และเป็นอิสระระหว่างกัน มีฟังก์ชั่นภาวะน่าจะเป็น (likelihood function) เท่ากับ

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

และมีฟังก์ชั่นล็อกการิธึมภาวะน่าจะเป็น (log-likelihood function) คือ

$$\ln f(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{n}{2}\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

การหาตัวประมาณการด้วยการหาค่าพารามิเตอร์ ที่ให้ค่าฟังก์ชั่นภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood estimation) เป็นวิธีการทางสถิติที่สำคัญมากวิธีหนึ่ง ดังจะได้กล่าวอธิบายบางส่วนต่อไปในหนังสือเล่มนี้ □

ก4 แคลคูลัสเบื้องต้น

แคลคูลัสเป็นแขนงหนึ่งทางคณิตศาสตร์ ที่เป็นหัวใจของทั้งวิชาคณิตศาสตร์และเศรษฐศาสตร์ จนอาจกล่าวได้ว่า เมื่อครั้งที่นิวตันและไลบ์นิทซ์ได้ค้นพบแคลคูลัสในช่วงศตวรรษที่ 17 นั้น ความรู้ทางคณิตศาสตร์ของมนุษยชาติ ก็เหมือนจะฟื้นจากความถดถอยในยุคกลางนับพันปี และกลับ

มาเฟื่องฟูไม่ต่างจากยุคกรีก อีกทั้งยังจุดประกายให้คณิตศาสตร์ ถูกพัฒนาสู่ยุคทองในศตวรรษที่ 19 ทั้งนี้ แม้แคลคูลัสจะมีต้นกำเนิดจากดาราศาสตร์และฟิสิกส์ แต่ความรู้เรื่องแคลคูลัส ซึ่งเป็นเครื่องมือที่ขาดไม่ได้ในการหาจุดหรือต่ำสุดนั้น กลับกลายเป็นจิตวิญญาณของวิชาเศรษฐศาสตร์ ซึ่งเกี่ยวข้องกับการแสวงหาทางเลือกที่ดีที่สุดโดยตรง จนคงไม่เกินเลยที่จะกล่าวว่า แคลคูลัสคือภาษาของนักเศรษฐศาสตร์ อนึ่ง แม้ในปัจจุบันการศึกษาเรื่องแคลคูลัสและพีชคณิตเชิงเส้นมักนิยมแยกออกจากกัน ผู้ศึกษาพีชคณิตเชิงเส้นที่มีความรู้เกี่ยวกับแคลคูลัสเบื้องต้นอยู่บ้าง ย่อมสามารถนำเอาความรู้เกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้น ไปใช้ได้อย่างหลากหลายนอกเหนือจากการหาคำตอบของสมการเชิงเส้น อาทิ การหาจุดที่ดีที่สุดของฟังก์ชั่น ที่มีตัวแปรต้นมากกว่าหนึ่งตัว (multivariate optimization) ด้วยเครื่องมือและเงื่อนไขที่อยู่ในรูปเมตริกซ์ ตลอดจนคณิตศาสตร์ชั้นสูง เช่น สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) เป็นต้น โดยในที่นี้จะได้พิจารณาแนวคิดสำคัญเกี่ยวกับแคลคูลัส ที่จำเป็นในการศึกษาเนื้อหาหลักของตำราพีชคณิตเชิงเส้นเล่มนี้ อันประกอบด้วย ลิมิต อนุพันธ์ของฟังก์ชั่น จุดสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชั่น และการหาจุดที่ดีที่สุดของฟังก์ชั่นทั้งในกรณีที่ไม่มีและมีข้อจำกัด

ลิมิต

โดยที่อนุพันธ์ของฟังก์ชั่น ซึ่งถือเป็นหัวข้อที่สำคัญที่สุดในเรื่องแคลคูลัสนั้น ถูกนิยามในรูป**ลิมิต (limit)** จึงต้องทำความเข้าใจก่อนว่า ลิมิตของฟังก์ชั่นคืออะไร โดยหากให้ $f(x)$ คือ ฟังก์ชั่นของตัวแปร x ที่สามารถหาค่าได้สำหรับทุกค่าของ x ที่เข้าใกล้ a แม้ว่า x อาจไม่สามารถมีค่าเท่ากับ a ได้ หาก x เข้าใกล้ a เท่าใดก็ส่งผลให้ $f(x)$ เข้าใกล้ A ยิ่งขึ้นเท่านั้น ในกรณีนี้สามารถกล่าวได้ว่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a เท่ากับ A ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

หากพิจารณาโดยละเอียดแล้ว การที่ x เข้าใกล้ a นั้น สามารถเป็นไปได้สองกรณี คือ ในกรณีแรกเป็นการที่ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้ายของ a คือ จากค่าที่น้อยกว่า a ที่เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จนเข้าใกล้ a หรือในกรณีที่สอง เป็นการที่ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวาของ a คือ จากค่าที่มากกว่า a ที่ลดลงเรื่อยๆ จนเข้าใกล้ a ทั้งสองกรณีดังกล่าว มีชื่อเรียกว่าลิมิตด้านเดียว (one-sided limit) ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป $\lim_{x\to a^-} f(x)$ และ $\lim_{x\to a^+} f(x)$ตามลำดับ โดยการที่ลิมิตของฟังก์ชั่นใดจะมีอยู่นั้น ลิมิตด้านเดียวจากทั้งสองด้านจะต้องเข้าสู่ค่าเดียวกัน กล่าวคือ

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = A \wedge \lim_{x\to a^+} f(x) = A$$

อนึ่ง หากลิมิตของฟังก์ชั่นใดเข้าสู่ค่าอนันต์ที่ค่าหนึ่งของ x ให้ถือว่าไม่มีลิมิตที่ค่านั้นของ x กล่าวคือ หาก $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ ให้ถือว่าฟังก์ชั่นนี้ไม่มีลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้ a

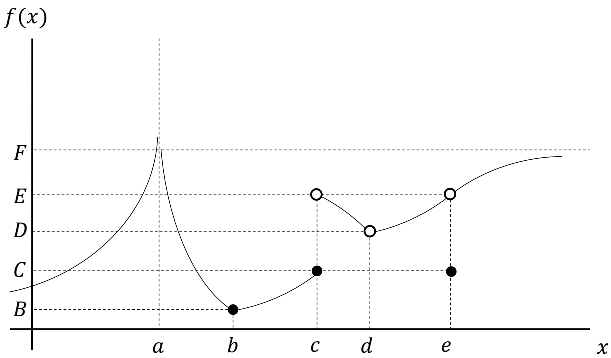
ตัวอย่างที่ ก23 จากรูปที่ ก3 ในกรณีที่หนึ่ง แม้ $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ และ $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ กล่าวคือ $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ อย่างไรก็ตาม ในกรณีให้ถือว่าไม่มีลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าสู่ a ในกรณีที่สอง $\lim_{x \to b^-} f(x) = B$ และ $\lim_{x \to b^+} f(x) = B$ กล่าวคือ $\lim_{x \to b} f(x) = B$ ในกรณีที่สาม $\lim_{x \to c^-} f(x) = C = f(c)$ แต่ $\lim_{x \to c^+} f(x) = E \neq C$ จึงไม่มีลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าสู่ c แม้ $f(c)$ จะมีค่าก็ตาม ในกรณีที่สี่ $\lim_{x \to d^-} f(x) = D$ และ $\lim_{x \to d^+} f(x) = D$ กล่าวคือ $\lim_{x \to d} f(x) = D$ แม้ $f(d)$ จะไม่มีค่าก็ตาม ในกรณีที่ห้า $\lim_{x \to e^-} f(x) = E$ และ $\lim_{x \to e^+} f(x) = E$ ดังนั้น $\lim_{x \to e} f(x) = E$ แม้ $f(x|x = e) = C$ ก็ตาม ในกรณีสุดท้าย $\lim_{x \to \infty} f(x) = F$ ซึ่งมี $f(x) = F$ เป็นเส้นกำกับแนวนอนเมื่อ $x \to \infty$ ทั้งนี้ สำหรับการหาค่าของลิมิตในกรณีที่ $x \to \infty$ หรือ $x \to -\infty$ แม้การกล่าวถึง $x \to \infty^+$ จะดูไม่สอดคล้องกับแนวคิดเรื่อง $x \to \infty$ ที่พิจารณา $f(x)$ หากให้ x อยู่เหนือ ∞ และลดสู่ ∞ และการกล่าวถึง $x \to \infty^-$ จะดูไม่สอดคล้องกับแนวคิดเรื่อง $x \to -\infty$ ที่พิจารณา $f(x)$ หากให้ x อยู่ต่ำกว่า $-\infty$ และเพิ่มสู่ $-\infty$ ในทั้งสองกรณีนี้เราสามารถใช้ ลิมิตด้านใดด้านหนึ่งเพื่อหาค่าลิมิตเมื่อ $x \to \infty$ หรือ $x \to -\infty$ โดยอนุโลมได้ $\square$

จากตัวอย่างข้างต้น แม้การพิจารณากราฟของฟังก์ชั่นจะเป็นวิธีการที่ชัดเจนวิธีการหนึ่ง ในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชั่น แต่ในกรณีที่ฟังก์ชั่นมีความซับซ้อน การวาดกราฟของฟังก์ชั่นอาจทำได้ยากหากไม่ใช้คอมพิวเตอร์เข้าช่วย อย่างไรก็ตาม แนวทางการหาลิมิตของฟังก์ชั่นนั้น ไม่จำเป็นต้องพิจารณากราฟของฟังก์ชั่นไปทุกกรณีเสียทีเดียว แต่สามารถหาได้ด้วยวิธีในเชิงวิเคราะห์ต่างๆ ดังสรุปได้พอสังเขปดังนี้

1. การแทนค่า วิธีการหาลิมิตของฟังก์ชั่นที่ตรงไปตรงมาวิธีหนึ่ง คือการแทนค่า $x = a$ ลงไปในฟังก์ชั่นโดยตรง กล่าวคือ

$$\lim_{x \to a} f(x) = A = f(a)$$

การหาลิมิตด้วยวิธีการแทนค่าโดยตรงในฟังก์ชั่น สามารถใช้ได้กับฟังก์ชั่นที่มีความต่อเนื่อง (continuous) ที่ค่าที่ต้องการหาลิมิต ดังกรณีที่สองในรูป ก3 ที่ $\lim_{x \to b} f(x) = B = f(b)$ อย่างไรก็ตามวิธีนี้จะใช้ไม่ได้ผลในกรณีที่ฟังก์ชั่นไม่ต่อเนื่อง ที่จุดที่ต้องการหาลิมิต เช่น ในกรณีที่สามในรูป ก3 ที่ฟังก์ชั่นขาดตอน ทำให้ไม่สามารถหาลิมิตได้ เนื่องจากลิมิตจากด้านซ้ายและด้านขวาของค่าที่ต้องการหาลิมิตไม่เท่ากัน หรือในกรณีที่ห้าในรูป ก3 ที่ฟังก์ชั่นขาดตอน ทำให้แม้สามารถหาลิมิตได้ แต่ค่าของลิมิตจะไม่เท่ากับค่าของฟังก์ชั่น อนึ่ง แนวคิดเรื่องความต่อเนื่อง (continuity)



รูปที่ ก4 ลิมิตของฟังก์ชั่น จากฟังก์ชั่นข้างต้น ในกรณีที่หนึ่ง แม้ $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ และ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ กล่าวคือ $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ อย่างไรก็ตาม ในกรณีให้ถือว่าไม่มีลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าสู่ a ในกรณีที่สอง $\lim_{x\to b^-} f(x) = B$ และ $\lim_{x\to b^+} f(x) = B$ กล่าวคือ $\lim_{x\to b} f(x) = B$ ในกรณีที่สาม $\lim_{x\to c^-} f(x) = C = f(c)$ แต่ $\lim_{x\to c^+} f(x) = E \neq C$ ดังนั้น ไม่มีลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าสู่ c แม้ $f(c)$ จะมีค่าก็ตาม ในกรณีที่สี่ $\lim_{x\to d^-} f(x) = D$ และ $\lim_{x\to d^+} f(x) = D$ กล่าวคือ $\lim_{x\to d} f(x) = D$ แม้ $f(d)$ จะไม่มีค่าก็ตาม ในกรณีที่ห้า $\lim_{x\to e^-} f(x) = E$ และ $\lim_{x\to e^+} f(x) = E$ ดังนั้น $\lim_{x\to e} f(x) = E$ แม้ $f(x|x = e) = C$ ก็ตาม ในกรณีสุดท้าย $\lim_{x\to \infty} f(x) = F$ ซึ่งมี $f(x) = F$ เป็นเส้นกำกับแนวนอนเมื่อ x เข้าสู่ค่าอนันต์

ของฟังก์ชั่นนั้น อันที่จริงแล้วเป็นแนวคิดสำคัญยิ่งทางคณิตศาสตร์ที่มีคำนิยามชัดเจน แต่ในที่นี้จะได้กล่าวถึงแนวคิดเรื่องความต่อเนื่องของฟังก์ชั่นโดยคร่าว โดยใช้หลักการพิจารณาอย่างง่ายว่า หากสามารถวาดฟังก์ชั่นต่อกันไป ผ่านเส้นตรงแนวตั้งที่ลากผ่าน $x = a$ โดยไม่ต้องยกดินสอขึ้น ก็ให้ถือว่าฟังก์ชั่นต่อเนื่องที่จุด $x = a$ นั้น

ตัวอย่างที่ ก24 สำหรับฟังก์ชั่น $f(x) = 2x + 1$ ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นเส้นตรงที่ต่อเนื่องกันตลอดทุกค่าของ $x \in \mathbb{R}$ การหาลิมิตของฟังก์ชั่นนี้สามารถทำได้โดยการแทนค่า x ด้วยค่าที่ต้องการลิมิตเข้าไปในฟังก์ชั่นได้โดยตรง กล่าวคือ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ $\square$

2. การแยกองค์ประกอบของฟังก์ชั่น และลดรูปก่อนแทนค่า การหาลิมิตของฟังก์ชั่นด้วยวิธีการแทนค่าในฟังก์ชั่นโดยตรงในบางกรณี อาจส่งผลให้ไม่สามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชั่นได้ เพราะอาจได้ผลลัพธ์ในรูปที่ไม่สามารถหาค่าได้ (indeterminate) อาทิ $\frac{x}{0}$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ เป็นต้น อย่างไรก็ตาม การแยกองค์ประกอบของฟังก์ชั่น อาจช่วยให้สามารถลดรูปของฟังก์ชั่นก่อน จากนั้นจึงแทนค่าที่ต้องการหาลิมิตภายหลัง และหลีกเลี่ยงปัญหาข้างต้นได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ ก25 สำหรับการหา $\lim_{x\to 1} f(x)$ ของฟังก์ชั่น

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$$

หากแทนค่า $x = 1$ ในฟังก์ชั่นโดยตรง จะได้ $f(x) = \frac{0}{0}$ ซึ่งไม่สามารถหาค่าได้ อย่างไรก็ตาม หากได้แยกองค์ประกอบของฟังก์ชั่นข้างต้นก่อน จะได้ว่า

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{(x+1)}{(x+2)}$$

จากนั้นจึงหาลิมิตของฟังก์ชั่นเมื่อ $x \to 1$ ซึ่งให้ผลลัพธ์คือ

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)}{(x+2)} = \frac{2}{3} \quad \square$$

3. การหาลิมิตที่ค่าอนันต์ของฟังก์ชั่นในรูปเศษส่วนของพหุนามในการหาลิมิตที่ค่าอนันต์ของฟังก์ชั่น ที่อยู่ในรูปเศษส่วนของพหุนามนั้น การใช้ค่าลิมิตที่ค่าอนันต์โดยทันที อาจทำให้ไม่สามารถหาลิมิตของฟังก์ชั่นได้โดยตรง เนื่องจากอาจได้ผลลัพธ์ที่อยู่ในรูป $\frac{\infty}{\infty}$ ซึ่งเป็นอีกรูปแบบหนึ่ง ที่ไม่สามารถหาค่าได้ (indeterminate) อย่างไรก็ตาม หากได้นำเอาค่าพหุนาม ที่มีกำลังสูงสุด หาร

ทั้งเศษและส่วนของฟังก์ชั่น จากนั้นจึงหาลิมิต ทุกค่าที่อยู่ในรูปเศษส่วนของค่าที่ลิมิตสู่ค่าอนันต์จะลดลงจนเท่ากับ 0 ทำให้ฟังก์ชั่นสามารถหาค่าได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ ก26 ในการหา $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ของฟังก์ชั่น

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$$

เมื่อ $a, \ldots, f$ คือ สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชั่น ในกรณีนี้การหาลิมิต $\lim_{x\to\infty} f(x)$ โดยทันที จะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่อยู่ในรูป $\frac{\infty}{\infty}$ ซึ่งไม่สามารถหาค่าได้ อย่างไรก็ตาม จากการพิจารณาฟังก์ชั่น จะเห็นได้ว่าค่าพหุนามที่มีกำลังสูงสุดของฟังก์ชั่น ได้แก่ x^2 ซึ่งหากนำไปหารทั้งเศษและส่วนของฟังก์ชั่นแล้วจึงหาลิมิตของฟังก์ชั่น จะได้

$$f(x) = \frac{(ax^2 + bx + c)/x^2}{(dx^2 + ex + f)/x^2} = \frac{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}{d + \frac{e}{x} + \frac{f}{x^2}}$$

จากนั้นจึงค่อยพิจารณาลิมิตของฟังก์ชั่นเมื่อ $x \to \infty$ ซึ่งให้ผลลัพธ์คือ

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}{d + \frac{e}{x} + \frac{f}{x^2}} = \frac{a}{d}$$

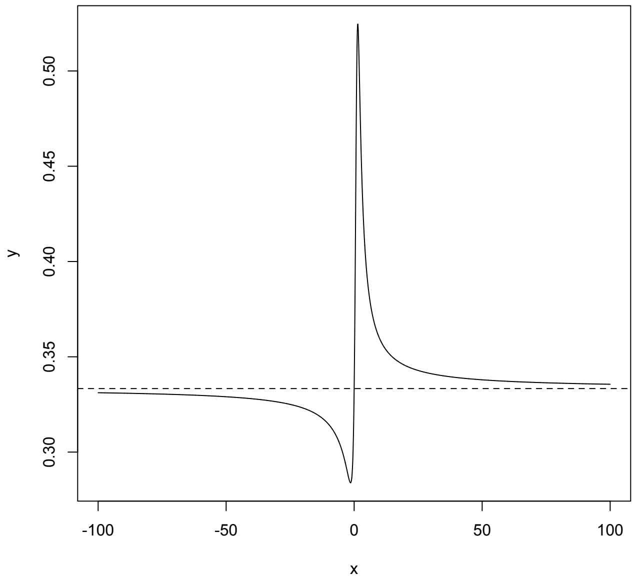
เนื่องจากลิมิตของทุกค่าที่หาด้วย x หรือ x^2 เมื่อ $x \to \infty$ ต่างเท่ากับ 0 $\square$

ตัวอย่างที่ ก27 แนวคิดจากตัวอย่างที่ ก16 สามารถขยายสู่กรณีลิมิตของฟังก์ชั่นทั่วไป ที่อยู่ในรูป

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x}$$

ซึ่งในกรณีนี้ การหารทุกค่าของเศษและส่วนของฟังก์ชั่นด้วย x^n และหาลิมิตของฟังก์ชั่นเมื่อ x เข้าสู่ค่าอนันต์ จะส่งผลให้ค่าอื่นที่อยู่ในรูปของ $x^k, k < n$ เท่ากับศูนย์ ดังนั้น $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_n}$ $\square$

อนึ่ง กฎที่ได้รวบรวมข้างต้นเป็นเพียงกฎพื้นฐานเฉพาะบางส่วนเท่านั้น กฎสำคัญอื่นๆ เกี่ยวกับการหาลิมิตของฟังก์ชั่นที่ไม่ได้กล่าวถึงข้างต้น เช่น กฎของโลปิตาล (l'hopital's rule) ซึ่งอยู่ในรูปของอนุพันธ์ของฟังก์ชั่น หรือกฎของลิมิตที่เกี่ยวข้องกับปริพันธ์ (integral) นั้น จะไม่ได้ถูกนำ



รูปที่ ก5 ลิมิตของฟังก์ชั่นที่ค่าอนันต์ การหาลิมิตของฟังก์ชั่นที่ค่าอนันต์ของฟังก์ชั่นที่อยู่ในรูปเศษส่วนของพหุนาม เช่น จากข้างต้น $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ของฟังก์ชั่น

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{3x^2 - 5x + 6}$$

การใช้ลิมิตโดยตรงในฟังก์ชั่นจะได้ผลลัพธ์ในรูป $\frac{\infty}{\infty}$ ซึ่งไม่สามารถหาค่าได้ อย่างไรก็ตาม หากนำเอาพหุนามกำลังสูงสุดของฟังก์ชั่น คือ x^2 หารทั้งเศษและส่วนของฟังก์ชั่น แล้วจึงใช้ลิมิตภายหลังจะได้ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{3}$ ซึ่งเป็นเส้นกำกับแนวนอนของฟังก์ชั่นดังรูป ทั้งนี้ มีข้อควรสังเกตที่น่าสนใจว่า ในกรณีนี้ การหาลิมิตที่ค่าอนันต์ที่เป็นลบ จะให้ค่าเท่ากับการหาลิมิตที่ค่าอนันต์ กล่าวคือ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{3}$ ซึ่งเป็นเส้นกำกับแนวนอนของฟังก์ชั่นเช่นเดียวกัน

มากล่าวในที่นี้ด้วยเหตุผลที่ว่า เป็นกฎที่ต้องอาศัยความรู้ทางแคลคูลัสซึ่งจะได้กล่าวถึงในส่วนต่อไป

อนุพันธ์ของฟังก์ชั่น

การเกิดขึ้นของเรขาคณิตเชิงวิเคราะห์โดยการบุกเบิกของเดคาร์ต ช่วยนักคณิตศาสตร์สามารถอธิบายวัตถุต่างๆ ทางเรขาคณิตได้ด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ เช่น การใช้สมการ $y = ax+b$ ในการอธิบายเส้นตรงในระนาบสองมิติ ที่มีจุดตัดแกน y เท่ากับ b และมีความชันเท่ากับ a อย่างไรก็ตาม แนวคิดเรื่องความชันของเส้นโค้ง กลับเป็นความรู้ที่ค่อนข้างซับซ้อนกว่าความชันของเส้นตรงอยู่มาก ด้วยเหตุที่ว่าเส้นโค้งมีความชันที่แต่ละจุดของเส้นไม่เท่ากัน ต่างกับเส้นตรงที่ไม่ว่าจะพิจารณาที่จุดใดบนเส้น ต่างมีความชันของเส้นที่เท่ากัน อย่างไรก็ตาม หากพิจารณาแนวคิดเรื่องความชันของเส้นโค้ง ในรูปของความชันของเส้นตรง ที่แตะเส้นโค้งดังกล่าวที่จุดที่ต้องการทราบความชันนั้น การตีความในเชิงนี้ ช่วยให้สามารถนำแนวคิดเรื่องลิมิต มาใช้หาความชันของเส้นโค้งที่จุดใดจุดหนึ่งได้ โดยเริ่มจากการหาความชันของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดสองจุดบนเส้นโค้ง จากนั้นจึงลิมิตให้ระยะทางระหว่างจุดทั้งสองจุดแคบเข้า จนเข้าสู่ค่า ใกล้ เช่นนี้จะได้ความชันของเส้นตรงที่แตะเส้นโค้งที่จุดใดจุดหนึ่งบนเส้นโค้งดังต้องการ ดังรูปที่ ก5

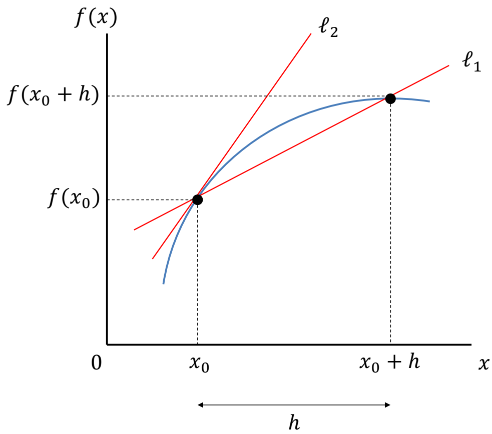
จากแนวคิดข้างต้น สมมติให้ $f(x)$ คือ ฟังก์ชั่นใดๆ ที่อาจเป็นหรือไม่เป็นฟังก์ชั่นเชิงเส้น ความชันของเส้นตรงที่แตะ $f(x_0)$ ที่ค่า $x = x_0$ ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(x_0)$จะเท่ากับ

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

จากสมการในรูปของเศษส่วนข้างต้น จะเห็นได้ว่าส่วนที่เป็นเศษ คือ ส่วนต่างในเชิงแนวตั้งของทั้งสองจุดที่ลากผ่านฟังก์ชั่น $f(x)$ ที่จุดแรกคือ $(x_0, f(x_0))$ และจุดที่สองคือ $(x_0+h, f(x_0+h))$ ซึ่งเท่ากับ $f(x_0+h) - f(x_0)$ และส่วนที่เป็นส่วน คือ ส่วนต่างในเชิงแนวนอนซึ่งเท่ากับ h ค่าของเศษส่วนข้างต้น[1] จึงเท่ากับความชันของเส้นตรงที่ลากผ่านทั้งสองจุด จากนั้นเมื่อได้ลิมิตส่วนต่างของทั้งสองจุด ให้น้อยลงจนเท่ากับศูนย์ จึงได้ความชันของเส้นตรงที่สัมผัสกับฟังก์ชั่น $f(x)$ ที่จุดแรกคือ $(x_0, f(x_0))$

ตัวอย่างที่ ก28 ในการหา $f'(a)$ เมื่อ $f(x) = x^2$ สามารถเริ่มได้จากการพิจารณาค่าเศษส่วน

[1]การนิยามอนุพันธ์ในรูปเศษส่วนดังกล่าว ตามมีชื่อเรียกเป็นการเฉพาะว่า**เศษส่วนของนิวตัน (Newton's quotient)** ตามชื่อของไอแซค นิวตัน (Isaac Newton, 1642-1726) นักคณิตศาสตร์ และนักฟิสิกส์ชาวอังกฤษ ผู้ได้รับการยกย่องว่าเป็นนักวิทยาศาสตร์ที่สร้างผลงานที่มีอิทธิพลที่สุดคนหนึ่ง ตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน



รูปที่ ก6 อนุพันธ์ของฟังก์ชั่น อนุพันธ์ของฟังก์ชั่น $f(x)$ ที่ x_0 ซึ่งนิยามเท่ากับ

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

คือความชันของเส้นตรงที่ทาบกับฟังก์ชั่น $f(x)$ ที่จุด $(x_0, f(x_0))$ จากรูปข้างต้น การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นใดๆ สามารถเริ่มได้จากการลากเส้นตรง ℓ_1 ที่ลากผ่านจุด $(x_0, f(x_0))$ และจุด $(x_0+h, f(x_0+h))$ ซึ่งมีความชันเท่ากับ

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

จากนั้นเมื่อได้ลดระยะห่างระหว่างทั้งสองจุดให้น้อยลงเรื่อยๆ จนเข้าใกล้ 0 จะได้ความชันของเส้นตรง ℓ_2 ซึ่งเป็นความชันของเส้นตรงที่ทาบกับฟังก์ชั่น $f(x)$ ที่จุด $(x_0, f(x_0))$

ของนิวตันซึ่งเท่ากับ

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h} \\ &= 2a+h\end{aligned}$$

จากนั้นเมื่อได้ลิมิต h ให้เข้าสู่ค่า 0 จึงได้ผลลัพธ์คือ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a \qquad \square$$

$f'(x)$ หรือในอีกสัญลักษณ์หนึ่งที่เป็นที่นิยมใช้กันคือ $\frac{df(x)}{dx}$ มีชื่อเรียกว่า**อนุพันธ์ (derivative)** ของ $f(x)$ เป็นแนวคิดสำคัญมากของแคลคูลัส ซึ่งเป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่ง ที่ใช้ในการศึกษาการหาจุดต่ำสุด หรือสูงสุดของฟังก์ชั่น และเป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ ที่จำเป็นที่สุดประการหนึ่งของนักเศรษฐศาสตร์ อนึ่ง โดยทั่วไปแล้ว การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นไม่จำเป็นต้องเริ่มจากนิยาม ซึ่งอยู่ในรูปของลิมิตเสมอไป แต่การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นที่มีรูปแบบเฉพาะนั้น สามารถได้โดยตรง จากสูตรสำเร็จที่รวบรวมไว้ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ ก1 สำหรับฟังก์ชั่น $f(x), g(x), h(x)$ ใดๆ ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้

1. $f(x) = ax^k \Rightarrow f'(x) = akx^{k-1}$ สำหรับ $a, k \in \mathbb{R}$

2. $f(x) = ae^x \Rightarrow f'(x) = ae^x$ สำหรับ $a \in \mathbb{R}$

3. $f(x) = a\ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{x}$ สำหรับ $a \in \mathbb{R}$

4. $f(x) = g(x) \pm h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

5. $f(x) = g(x)h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$

6. $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{(h(x))^2}$

7. $f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)h'(x)$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้นหลายข้อ สามารถทำได้โดยการใช้นิยามของอนุพันธ์ ซึ่งอยู่ในรูปของลิมิตของความชันของเส้นตรง ดังที่ได้พิจารณากันก่อนหน้านี้แล้ว ซึ่งผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่ม

เติมได้จากตำราคณิตศาสตร์เกี่ยวกับแคลคูลัสโดยตรง โดยในที่นี้จะได้พิจารณาการพิสูจน์เฉพาะข้อแรก ของทฤษฎีบทข้างต้นดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ ก29 อนุพันธ์ของ $f(x) = ax^k$ เมื่อ $a, k \in \mathbb{R}$ สามารถหาได้จากการพิจารณาเศษส่วนของนิวตันซึ่งเท่ากับ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a(x+h)^k - ax^k}{h}$$

จากทฤษฎีบททวินาม (binomial theorem)[1] จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a(x+h)^k &= a\sum_{i=0}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array}\right) x^{k-i}h^i \\ &= a\left[\left(\begin{array}{c} k \\ 0 \end{array}\right) x^k h^0 + \left(\begin{array}{c} k \\ 1 \end{array}\right) x^{k-1}h^1 + \left(\begin{array}{c} k \\ 2 \end{array}\right) x^{k-2}h^2 + \ldots + \left(\begin{array}{c} k \\ k \end{array}\right) x^0 h^k\right] \\ &= a(x^k + kx^{k-1}h + o(h^2) + \ldots + o(h^2)) \end{aligned}$$

โดยที่ $o(h^2)$ คือค่าที่อยู่ในรูปของผลคูณของ h^2 จากนั้น เมื่อนำเอา $f(x) = ax^k$ ลบออกจาก $f(x+h)$ ข้างต้นจะได้

$$f(x+h) - f(x) = akx^{k-1} + o(h^2) + \ldots + o(h^2)$$

ซึ่งเมื่อนำเอา h หารค่าข้างต้นจะได้

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = akx^{k-1} + o(h) + \ldots + o(h)$$

โดยที่ $o(h)$ คือค่าที่อยู่ในรูปของผลคูณของ h ดังนั้น เมื่อลิมิตให้ h เข้าสู่ค่า 0 ในขั้นตอนสุดท้าย

---

[1] ทฤษฎีบททวินาม เป็นทฤษฎีบทพื้นฐานทางพีชคณิตที่อธิบายการกระจายพจน์ในรูป $(x+y)^n$ เมื่อ x, y คือตัวแปรซึ่งเป็นจำนวนจริงใดๆ และ n คือจำนวนนับ ทั้งนี้ แม้แนวคิดที่ใกล้เคียงกับแนวทฤษฎีบททวินามจะถูกค้นพบโดยนักคณิตศาสตร์ทั้งจากฝั่งตะวันตก และตะวันออกมานับพันปี แต่ทฤษฎีบททวินามในรูปทั่วไป คือ $(x+y)^n$ ที่เป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายในปัจจุบันนั้น ปรากฏเป็นครั้งแรกในงานเขียนของ Isaac Newton (1642-1726) ในปี 1665 ซึ่งต่อมาได้มีการศึกษาเพิ่มเติม และขยายไปสู่ทฤษฎีบทอื่นๆ อาทิ ทฤษฎีบทพหุนาม (multinomial theorem) ที่ใช้กระจายพจน์ในรูป $(x_1 + \ldots + x_m)^n$ และทฤษฎีบทพหุทวินาม (multi-binomial theorem) ที่ใช้กระจายพจน์ในรูป $(x_1+y_1)^{n_1}\ldots(x_m+y_m)^{n_m}$ เป็นต้น

จึงได้ผลลัพธ์คือ

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = akx^{k-1}$$

เมื่อ $f(x) = ax^k$ สำหรับ $a, k \in \mathbb{R}$ $\square$

ตัวอย่างที่ ก30 สมมติให้

$$f(x) = \frac{e^{x^2+2x+\ln x}}{2x+\frac{1}{x^3}}$$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นที่ดูค่อนข้างซับซ้อนนี้อาจเริ่มได้จากการพิจารณาว่าฟังก์ชั่นข้างต้นอยู่ในรูป

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

เมื่อ $g(x) = e^{x^2+2x+\ln x}$ ซึ่งมีอนุพันธ์คือ

$$g'(x) = e^{x^2+2x+\ln x}(2x+2+\frac{1}{x})$$

และ $h(x) = 2x + x^{-3}$ ซึ่งมีอนุพันธ์คือ

$$h'(x) = 2 - 3x^{-4}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2} \\ &= \frac{e^{x^2+2x+\ln x}(2x+2+\frac{1}{x})(2x+x^{-3}) - e^{x^2+2x+\ln x}(2-3x^{-4})}{(2-3x^{-4})^2} \\ &= \frac{e^{x^2+2x+\ln x}\left((2x+2+\frac{1}{x})(2x+x^{-3}) - (2-3x^{-4})\right)}{(2-3x^{-4})^2} \qquad \square \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ ก31 กฎของโลปิตาล (l'Hôpital's rule)[1] หากให้ $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) =$

[1]กฎของโลปิตาล ตั้งชื่อตาม กิลโยม เดอ โลปิตาล (Guillaume de l'hôpital, 1661-1704) ขุนนางและนักคณิต-ศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ดังปรากฏในหนังสือของเดอ โลปิตาลเกี่ยวกับวิชาแคลคูลัส ทั้งนี้ เนื้อหาส่วนใหญ่ในหนังสือเล่มนี้ เป็นผลงานของอาจารย์ของเดอ โลปิตาล คือ โยฮัน เบอนุลลี (Jacob Bernoulli, 1667-1748) นักคณิตศาสตร์ชาวสวิส

0 หรือ $\pm\infty$ และให้ $\text{lim}_{x\to c} g'(x) \neq 0$ จะได้ว่า

$$\text{lim}_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \text{lim}_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

เมื่อ $\text{lim}_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ สามารถหาค่าได้ อาทิ หากต้องการหา $\text{lim}_{x\to\infty} x^n e^{-x}$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}_+$ ซึ่งสามารถจัดเรียงให้อยู่ในรูป

$$\text{lim}_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

ซึ่งเข้าเงื่อนไขของการใช้กฎของโลปิตาล ดังนี้ หากใช้กฎของโลปิตาลซ้ำกันเรื่อยๆ จะได้ว่า

$$\text{lim}_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = n\text{lim}_{x\to\infty}\frac{x^{n-1}}{e^x} = n(n-1)\text{lim}_{x\to\infty}\frac{x^{n-2}}{e^x} = \ldots$$

ซึ่งให้ผลลัพธ์สุดท้ายคือ $\text{lim}_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = \frac{n!}{\text{lim}_{x\to\infty} e^x} = 0 \quad \square$

การหาจุดสูงสุดหรือต่ำสุด

การหาจุดสูงสุดหรือต่ำสุดเป็นเรื่องสำคัญที่สุดเรื่องหนึ่งในทางเศรษฐศาสตร์ อาทิ การเลือกปริมาณการผลิตที่ทำให้ต้นทุนต่ำสุด หรือปริมาณการผลิตที่ทำให้กำไรสูงสุด ล้วนเป็นคำถามในทางเศรษฐศาสตร์ ที่เกี่ยวข้องกับการหาจุดสูงสุดหรือต่ำสุดทั้งสิ้น การหาจุดสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชั่น ที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรเพียงตัวเดียว (univariate function) สามารถทำได้โดยการพิจารณาหาจุด ที่ทำให้**อนุพันธ์อันดับแรก (first derivative)** ของฟังก์ชั่นเท่ากับ 0 เนื่องจากความชันของเส้นตรง ที่แตะกับฟังก์ชั่นที่จุดดังกล่าวจะเท่ากับ 0 จากนั้นจึงพิจารณาแยกความแตกต่างระหว่างจุดสูงสุด และจุดต่ำสุดโดยการใช้**อนุพันธ์อันดับสอง (second derivative)** ดังขั้นตอนต่อไปนี้

1. หาจุดวิกฤต (critical point) x^* ของ $f(x)$ ซึ่งเท่ากับจุดที่ให้ค่าต่ำสุดหรือสูงสุดของฟังก์ชั่นจากคุณสมบัติของจุดวิกฤตที่ว่า ความชันของเส้นตรงที่แตะฟังก์ชั่นที่จุดวิกฤตจะเท่ากับ 0 กล่าวคือ

$$f'(x^*) = 0$$

ซึ่งได้ทำสัญญาว่าจ้างอนุญาตให้เดอ โลปิตาลสามารถใช้ข้อค้นพบใดๆ ของเบอนุลลีในหนังสือของตนได้ อนึ่ง แม้เดอ โลปิตาล จะได้ชี้แจงอย่างชัดเจนในส่วนคำนำของหนังสือแล้วว่า เนื้อหาในหนังสือจำนวนมาก เป็นผลงานของเบอนุลลี และไลบ์นิซ ที่ผู้อ่านพึงยกย่องเป็นอันดับผู้แรก แต่แนวคิดหลายเรื่องที่ปรากฏในหนังสือ มักได้รับการกล่าวถึงจากสาธารณชนเสมือนเป็นผลงานของเดอ โลปิตาล เอง ดังเช่น กฎของโลปิตาล เป็นต้น

2. จำแนกจุดที่ให้ค่าต่ำสุดและจุดที่ให้ค่าสูงสุด โดยใช้คุณสมบัติที่ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นตรงที่จุดต่ำสุดจะเป็นบวก กล่าวคือ ความชันของเส้นตรงที่ประกอบขึ้นเป็นกรอบล้อมจุดต่ำสุด จะต้องเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จากความชันที่เป็นลบ เข้าสู่ความชันที่เท่ากับศูนย์ และผ่านไปยังความชันที่เป็นบวกในท้ายที่สุด และในทางตรงข้าม อัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นตรงที่จุดสูงสุดจะเป็นลบ กล่าวคือ ความชันของเส้นตรงที่ประกอบขึ้นเป็นกรอบล้อมจุดสูงสุด จะต้องลดลงเรื่อยๆ จากความชันที่เป็นบวก เข้าสู่ความชันที่เท่ากับศูนย์ และผ่านไปยังความชันที่เป็นลบในท้ายที่สุด ดังนี้ สำหรับจุดวิกฤต x^* ของฟังก์ชั่น $f(x)$ จะได้ว่า x^* คือ จุดที่ให้ค่าต่ำสุดหาก $f''(x^*) > 0$ และ x^* คือ จุดที่ให้ค่าสูงสุดหาก $f''(x^*) < 0$ ในกรณีที่ $f''(x^*) = 0$ นั้น จุดวิกฤต x^* จะให้ค่าที่ไม่ใช่ทั้งจุดสูงสุด หรือจุดต่ำสุดของฟังก์ชั่น ซึ่งมีชื่อเรียกเฉพาะว่า**จุดอานม้า (saddle point)**

ตัวอย่างที่ ก32 จากฟังก์ชั่นกำลังสองที่อยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{R}$ จะได้ว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นคือ

$$f'(x) = 2ax + b = 0$$

ซึ่งใช้คำนวณหาค่าจุดวิกฤตได้เท่ากับ $x^* = -\frac{b}{2a}$ การจำแนกว่าจุดวิกฤตดังกล่าวให้ค่าต่ำสุดหรือสูงสุด สามารถพิจารณาได้ จากอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชั่นซึ่งเท่ากับ

$$f''(x) = 2a$$

ดังนี้ หาก $a < 0$ จุดวิกฤต คือ $x^* = -\frac{b}{2a}$ จะให้ค่าสูงสุดของฟังก์ชั่น และหาก $a < 0$ จุดวิกฤตที่คำนวณได้ จะให้ค่าต่ำสุดของฟังก์ชั่น อนึ่ง ในกรณีนี้มีข้อสังเกตที่น่าสนใจ คือ ในการใช้อนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชั่น เพื่อประเมินจุดวิกฤตว่าให้ค่าต่ำสุดหรือสูงสุดนั้น โดยที่อนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชั่นไม่ได้ขึ้นอยู่กับค่า x ใดๆ ค่าต่ำสุดหรือสูงสุดใดๆ ของฟังก์ชั่นจึงไม่ขึ้นกับค่า x เช่นกัน $\square$

ตัวอย่างที่ ก33 จากฟังก์ชั่นกำลังสามซึ่งอยู่ในรูป $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ เมื่อ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ จะได้ว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชั่น คือ

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

ซึ่งอยู่ในรูปฟังก์ชั่นกำลังสอง จุดวิกฤตของฟังก์ชั่นกำลังสามข้างต้นซึ่งเท่ากับรากของฟังก์ชั่นกำลังสองข้างต้น จึงเท่ากับ

$$x^* = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$$

ซึ่งเป็นจำนวนจริงก็ต่อเมื่อ $4b^2 > 12ac$ การจำแนกว่าจุดวิกฤตดังกล่าว ให้ค่าต่ำสุดหรือสูงสุด สามารถพิจารณาได้จากอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชั่น ซึ่งเท่ากับ

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

จุดวิกฤตที่ได้จะให้ค่าต่ำสุด หากอนุพันธ์อันดับสองข้างต้นมีค่าเป็นลบ และให้ค่าสูงสุดหากมีค่าเป็นบวก อนึ่ง ในกรณีนี้ ค่าของอนุพันธ์อันดับสอง จะขึ้นอยู่กับค่าของจุดวิกฤตที่คำนวณได้ในขั้นตอนแรก □

ตัวอย่างที่ ก34 จากตัวอย่างที่ ก21 หากให้ $a = b = 1, c = d = 0$ ฟังก์ชั่นกำลังสามข้างต้นจะอยู่ในรูป

$$f(x) = x^3 + 2x^2$$

ซึ่งมีอนุพันธ์อันดับแรกคือ $f'(x) = 3x^2 + 4x$ จุดวิกฤตซึ่งทำให้อนุพันธ์อันดับแรกเท่ากับศูนย์จึงสามารถหาได้จากการหาค่า x ที่สอดคล้องกับสมการ

$$3x^2 + 4x = x(3x + 4) = 0$$

หรือ $x^* = 0, -4/3$ ในขั้นตอนที่สองซึ่งเป็นการจำแนกว่าจุดวิกฤตใดคือจุดสูงสุด จุดต่ำสุด หรือจุดอานม้าของฟังก์ชั่นนั้น โดยที่อนุพันธ์ลำดับสองของฟังก์ชั่น คือ $f''(x) = 6x + 4$ เมื่อได้นำเอา $x^* = 0, -4/3$ เข้าแทนใน $f''(x)$ แล้ว จะได้ว่า สำหรับ $x^* = 0$ จะได้ $f'(x^*) = 4 > 0$ ซึ่งให้จุดต่ำสุด และสำหรับ $x^* = -4/3$ จะได้ $f'(x^*) = -4 < 0$ ซึ่งให้จุดสูงสุด □

ตัวอย่างที่ ก35 จากข้อเท็จจริงในวิชาเศรษฐศาสตร์จุลภาคที่ว่า เส้นต้นทุนส่วนเพิ่ม (marginal cost curve) จะตัดกับเส้นต้นทุนเฉลี่ย (average cost curve) ที่จุดต่ำสุดของเส้นต้นทุนเฉลี่ย ในการนี้สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับการหาจุดต่ำสุดและจุดสูงสุดของฟังก์ชั่น มาพิสูจน์ข้อเท็จจริงดังกล่าวได้ โดยหากสมมติให้ $c(q)$ คือ ฟังก์ชั่นของต้นทุนรวม ซึ่งขึ้นอยู่กับปริมาณการผลิต q จากนิยามของต้นทุนส่วนเพิ่ม และต้นทุนเฉลี่ย จะได้ว่า ต้นทุนส่วนเพิ่มจะเท่ากับ $c'(q)$ และต้นทุนเฉลี่ยจะเท่ากับ $c(q)/q$ จากคุณสมบัติของจุดต่ำสุดและจุดสูงสุดของฟังก์ชั่นข้างต้น จุดต่ำสุดของต้นทุนเฉลี่ย จึงต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า อนุพันธ์อันดับแรกของฟังก์ชั่นต้นทุนเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ กล่าวคือ

$$\frac{dc(q)/q}{dq} = \frac{c'(q) \cdot q - c(q)}{q^2} = \frac{c'(q) - c(q)/q}{q} = 0$$

ซึ่งเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $c'(q) = c(q)/q$ คือ เมื่อต้นทุนส่วนเพิ่มเท่ากับต้นทุนเฉลี่ย $\square$

ตัวอย่างที่ ก36 ในการหาปริมาณการผลิต ที่ทำให้กำไรสูงสุดของผู้ผลิต หากฟังก์ชั่นกำไรอยู่ในรูป

$$\Pi(q) = p(q) \cdot q - c(q)$$

เมื่อ $p(q)$ คือ ฟังก์ชั่นอุปสงค์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างราคาและปริมาณของสินค้าที่ผู้ผลิตสามารถขายได้ ซึ่งเท่ากับ q และ $c(q)$ คือ ฟังก์ชั่นต้นทุนรวมซึ่งขึ้นอยู่กับปริมาณการผลิต ปริมาณการผลิตที่ทำให้กำไรสูงสุด จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า

$$\Pi'(q) = (p'(q) \cdot q - p(q)) - c'(q) = 0$$

ซึ่งเท่ากับปริมาณการผลิต ที่ทำให้รายรับส่วนเพิ่ม (marginal revenue) คือ $p'(q) \cdot q - p(q)$ เท่ากับต้นทุนส่วนเพิ่ม (marginal cost) คือ $c'(q)$ ในการหาปริมาณการผลิตที่ทำให้กำไรสูงสุดนั้น จำเป็นต้องตรวจสอบเงื่อนไขลำดับที่สองของการหาจุดสูงสุด เนื่องจาก ปริมาณการผลิตที่หาได้จากเงื่อนไขลำดับแรก อาจเป็นได้ทั้งปริมาณการผลิตที่ให้กำไรต่ำสุด หรือสูงสุดก็ได้ โดยหากให้ $MR(q) = p'(q) \cdot q - p(q)$ และ $MC(q) = c'(q)$ แทนฟังก์ชั่นรายรับส่วนเพิ่มและฟังก์ชั่นต้นทุนส่วนเพิ่มของผู้ผลิตตามลำดับ จะได้ว่าเงื่อนไขลำดับแรก ของการทำกำไรให้สูงสุด คือ การที่ $MR(q) = MC(q)$ และเงื่อนไขลำดับที่สอง ของการทำกำไรให้สูงสุด คือ การที่ $MR'(q) < MC'(q)$ หรือเมื่อความชันของเส้นรายรับส่วนเพิ่ม น้อยกว่าความชันของเส้นต้นทุนส่วนเพิ่ม $\square$

ตัวอย่างที่ ก37 จากตัวอย่างที่ ก24 สมมติให้ฟังก์ชั่นอุปสงค์คือ $p(q) = \alpha - q$ และ $c(q) = \beta q^3 + \gamma q^2$ เมื่อ $\alpha, \beta, \gamma, q > 0$ จะได้ว่า

$$\Pi(q) = (\alpha - q)q - \beta q^3 - \gamma q^2$$

ปริมาณการผลิตที่ทำให้กำไรสูงสุด จึงต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า

$$\Pi'(q) = \alpha - 2(1 - \gamma)q - 3\beta q^2 = 0$$

ซึ่งให้ค่าวิกฤตที่สามารถหาได้ จากสูตรการคำนวณรากของฟังก์ชั่นกำลังสองทั่วไป สำหรับเงื่อนไขลำดับที่สองนั้น เนื่องจาก

$$\Pi''(q) = -2(1 - \gamma) - 6\beta q$$

ค่าวิกฤตที่สอดคล้องกับเงื่อนไขการทำกำไรสูงสุด จึงเท่ากับปริมาณการผลิตที่ทำให้ $\Pi''(q) < 0$ กล่าวคือ

$$q < \frac{1-\gamma}{3\beta}$$

ในทางกลับกัน โดยที่ฟังก์ชั่นกำลังสองจะให้รากที่เป็นจำนวนจริงไม่เกิน 2 ราก ปริมาณการผลิตอีกค่าหนึ่ง ซึ่งแม้จะสอดคล้องกับเงื่อนไขแรก จึงย่อมเป็นปริมาณการผลิตที่ทำให้กำไรต่ำสุด $\square$

การขยายฟังก์ชั่นด้วยวิธีการของเทย์เลอร์

การขยายฟังก์ชั่นด้วย**วิธีการของเทย์เลอร์ (Taylor's expansion)** เป็นการนำแนวคิดเรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชั่น มาใช้ขยายหรือประมาณการฟังก์ชั่น กล่าวคือ สำหรับฟังก์ชั่น $f(x)$ ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้เรื่อยๆ ไม่จำกัด

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

เมื่อ a คือค่าคงที่[1] การขยายฟังก์ชั่นด้วยวิธีการของเทย์เลอร์ เป็นวิธีหนึ่งที่ช่วยให้สามารถประมาณการฟังก์ชั่น ที่อาจไม่ใช่ฟังก์ชั่นเส้นตรง ด้วยผลรวมของอนุพันธ์ในลำดับต่างๆ ของฟังก์ชั่น ซึ่งอาจมีความเป็นเส้นตรงกว่าฟังก์ชั่นต้นแบบได้

ตัวอย่างที่ ก38 การหาค่า $\sin(x)$ เมื่อ $x = 0.5$ โดยไม่ใช้เครื่องคิดเลขอาจทำได้ยาก อย่างไรก็ตาม หากเราประมาณการ $f(x) = \sin(x)$ ด้วยวิธีการของเทย์เลอร์โดยใช้อนุพันธ์ลำดับแรกของฟังก์ชั่นที่ $a = 0$ จะได้

$$f(0.5) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(0.5-0)$$

และเมื่อแทนค่า $f(0) = \sin(0) = 0$ และ $f'(0) = \cos(0) = 1$ ลงในสมการข้างต้นแล้ว จะได้ค่า $\sin(x)$ เมื่อ $x = 0.5$ ด้วยวิธีการประมาณการของเทย์เลอย์คือ $\sin(x) \approx 0.5$ ซึ่งใกล้เคียงกับค่าจากการใช้เครื่องคิดเลขคือ $\sin(x) \approx 0.48$ $\square$

[1] แนวคิดนี้ยังมีชื่อเรียกอื่นๆ อาทิ อนุกรมของเทย์เลอร์ (Taylor's series) และการประมาณการฟังก์ชั่นด้วยวิธีการของเทย์เลอร์ (Taylor's approximation)

ก5 จำนวนเชิงซ้อน

หากพิจารณาวิวัฒนาการจำนวนประเภทต่างๆ แล้ว จะเห็นได้ว่า จำนวนแต่ละประเภทล้วนถูกสร้างขึ้น เพื่อสนองความจำเป็นของมนุษย์ เริ่มจากเครื่องมือช่วยนับ คือ จำนวนนับ เช่น $1, 2, 3, \ldots$ ซึ่งเป็นจำนวนประเภทแรกที่พบได้ในทุกอารยธรรม จากนั้นจำนวนตรรกยะหรือเศษส่วน จึงได้เกิดขึ้นในอารยธรรมอียิปต์โบราณ เพื่ออำนวยความสะดวกในการแบ่งพืชผลที่ได้จากการเกษตร ถัดมาจึงเป็นจำนวนลบ ซึ่งกำเนิดขึ้นในอารยธรรมจีนโบราณ เพื่ออธิบายแนวคิดเรื่องหนี้ เรื่อยมาจนถึงการคิดค้นเลขศูนย์ ทั้งในแง่ของเส้นแบ่งระหว่างจำนวนบวกและจำนวนลบ และการใช้เลขศูนย์เพื่อกำหนดตำแหน่งของตัวเลข เพื่อให้ทราบได้ว่า 101 ต่างจาก 11 ตลอดจนจำนวนอตรรกยะต่างๆ เช่น π และ e ซึ่งแม้จะเป็นที่คุ้นเคยแก่ผู้คนในปัจจุบัน แต่เมื่อแรกถือกำเนิดขึ้นนั้น ก็ใช่ว่าจะเป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไป ดังเช่นที่เป็นอยู่ในขณะนี้เสียทีเดียว ด้วยเหตุที่ว่าหากไม่กล่าวถึงจำนวนนับแล้ว จำนวนประเภทอื่นๆ ล้วนต่างมีความเป็นนามธรรมสูง ยากที่จะพิจารณาให้เห็นภาพด้วยตาโดยปราศจากจินตนาการได้ดังเช่นจำนวนนับ อาทิ การนับบ้านจำนวน $1, 2, 3, \ldots$ หลังไปเรื่อยๆ นั้นสามารถทำได้ง่ายอย่างเห็นภาพ แต่บ้านจำนวนครึ่งหลังหรือหนึ่งในสามของหลังอาจดูเป็นการยากยิ่งกว่าที่จะนึกให้เห็นภาพ หรือแม้แต่สิ่งของบางสิ่งซึ่งอาจแบ่งได้โดยง่าย เช่น ในการนึกภาพเศษส่วน $\frac{1}{3}$ หากมีกองทราย 1 กอง ที่ถูกแบ่งเป็น 3 ส่วน ส่วนละเท่าๆ กันก็จะได้กองทรายขนาดเล็กลงเป็นหนึ่งในสามของกองเดิมจำนวน 3 กอง ซึ่งหากจะพิจารณาในเชิงนี้ ก็ใช่จะนึกภาพของตัวเลข $\frac{1}{3}$ ได้โดยง่าย

ดังนี้ หากพิจารณาหาคำตอบของสมการเชิงเส้น $x + 1 = 0$ แล้ว จะเห็นได้ว่า ผู้ที่คุ้นเคยกับแนวคิดเรื่องระบบเลขจำนวนจริงเป็นอย่างดี ย่อมสามารถตอบได้โดยทันทีว่า $x = -1$ แต่หากได้ถามคำถามนี้ก่อนแนวคิดเกี่ยวกับจำนวนลบจะกำเนิดขึ้นแล้ว ก็ต้องถือว่าสมการเชิงเส้นดังกล่าวไม่มีคำตอบ (ที่เป็นจำนวนบวก) และเช่นเดียวกัน หากพิจารณาหาคำตอบของสมการกำลังสอง $x^2 + 1 = 0$ ก็ต้องถือว่าสมการนี้ไม่มีคำตอบ (ที่เป็นจำนวนจริง) ดังที่คุ้นเคยกัน การมุ่งหาคำตอบให้ได้ในกรณีนี้ จึงต้องมีการคิดค้นจำนวนประเภทใหม่ขึ้นเสียก่อน ซึ่งเรียกว่า**จำนวนเชิงซ้อน** **(complex number)**

แนวคิดเรื่องจำนวนเชิงซ้อน เป็นการขยายแนวคิดเรื่องจำนวนจริง ไปสู่การหาคำตอบของสมการที่ไม่สามารถแสดงคำตอบในรูปของจำนวนจริงได้ เช่น จากคุณสมบัติของจำนวนจริงที่ว่า $x^2 \geq 0, x \in \mathbb{R}$ ดังนั้น สมการ $x^2 = -1$ จึงไม่มีคำตอบใดที่เป็นจำนวนจริง และเพื่อเป็นการแก้ไขข้อจำกัดดังกล่าว นักคณิตศาสตร์จึงได้พัฒนาแนวคิดเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งอยู่ในรูป

$$z = a + bi,$$

เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ และ i คือ**จำนวนจินตภาพ (imaginary number)**[1] ซึ่งมีคุณสมบัติที่ว่า $i^2 = -1$ หรือ $i = \sqrt{-1}$ ส่วนแรกของจำนวนเชิงซ้อน คือ a มีชื่อเรียกว่า**ส่วนจริง (real part)** และส่วนที่สองของจำนวนเชิงซ้อน คือ b มีชื่อเรียกว่า**ส่วนจินตภาพ (imaginary part)** จากการนิยามจำนวนเชิงซ้อนข้างต้น จะเห็นได้ว่า คำตอบของสมการ $x^2 = -1$ ซึ่งแต่เดิมไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงนั้น หลังจากที่ได้นิยาม $i = \sqrt{-1}$ แล้ว คำตอบของสมการ $x^2 = -1$ จึงเท่ากับ $x = i$ และในลักษณะเดียวกันนี้ คำตอบของทุกสมการในรูป $x^2 = -b, b \in \mathbb{R}_+$ จึงย่อมสามารถแสดงในรูปของจำนวนเชิงซ้อนได้เชิงกัน เนื่องจาก $x = \sqrt{-b^2} = \sqrt{-1}\sqrt{b^2} = bi$ ทั้งนี้ นักคณิตศาสตร์นิยมใช้สัญลักษณ์ $\mathbb{C}$ แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน ในลักษณะที่สอดคล้องกับการใช้สัญลักษณ์ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง

หากพิจารณาโครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ จะเห็นได้ว่าจำนวนเชิงซ้อนเป็นการขยายแนวคิดเรื่องจำนวนจริงให้กว้างขึ้น ในแง่ที่ว่าจำนวนจริง a ใดๆ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $z = a + bi$ เมื่อ $b = 0$ เสมอ และจำนวนจินตภาพใดๆ ก็สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $z = a + bi$ เมื่อ $a = 0$ เสมอเช่นกัน ด้วยเหตุนี้ เซตของจำนวนจริงจึงเป็นเซตย่อยของจำนวนเชิงซ้อน กล่าวคือ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

คุณสมบัติที่สำคัญของจำนวนเชิงซ้อน

จากคุณสมบัติการสลับที่ การจัดกลุ่ม และการแจงแจงการบวกและการคูณซึ่งเป็นคุณสมบัติพื้นฐานของจำนวนจริง สำหรับ $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ และ $i = \sqrt{-1}$ จะได้ว่า

1. $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

2. $(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i$

3. $(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

4. $(a_1 + b_1 i) \cdot \overline{(a_2 + b_2 i)} = a^2 + b^2$ เมื่อ $\overline{a + bi} = a - bi$ คือคอนจูเกตเชิงซ้อน (complex conjugate) ของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$

---

[1] จำนวนเชิงซ้อนเป็นแนวคิดที่มีความเป็นมายาวนาน ที่อาจย้อนไปได้นับพันปีตั้งแต่สมัยกรีกโบราณ เมื่อเฮโร แห่งอเล็กซานเดรีย (Hero of Alexandria, 1AD) ขบคิดคำถามเกี่ยวกับการถอดรากที่สองของจำนวนลบ อีกทั้งยังปรากฏในงานของเจอโรลาโม คาร์ดาโน (Gerolamo Cardano, 1501-1576) นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาเลียน เกี่ยวกับการหารากของสมการกำลังสาม แนวคิดอย่างเป็นระบบเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน ถูกพัฒนาขึ้นโดยเรอเน เดคาร์ต (René Descarte, 1596-1650) ผู้กล่าวถึงแนวคิดเรื่องนี้ว่าเปรียบได้กับจำนวนในจินตนาการ (imaginaires) ซึ่งเป็นที่มาของการเรียก i ว่าจำนวนจินตภาพในเวลาต่อมา

5. สำหรับค่า $a_2, b_2 \neq 0$

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = A + Bi$$

เมื่อ $A = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$ และ $B = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$

การตีความจำนวนเชิงซ้อนทางเรขาคณิต

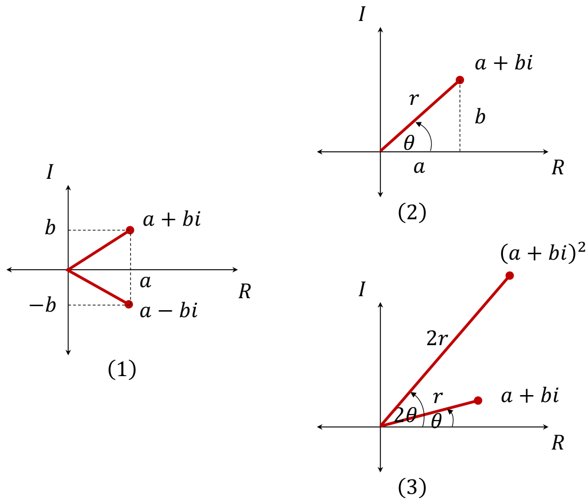
จำนวนเชิงซ้อนสามารถแสดงได้ด้วยแผนภาพของอาร์กัน (Argand diagram)[1] ซึ่งอยู่ในรูปของจุดบนระนาบ 2 มิติที่แกนนอน คือ ส่วนจริงและแกนตั้ง คือ ส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน ดังรูปที่ ก6 (1) การแสดงจำนวนเชิงซ้อนด้วยแผนภาพของอาร์กันด์ข้างต้น มีข้อพึงสังเกตที่สำคัญ คือ จุด $a + bi$ ที่อยู่บนระนาบนั้น ไม่ได้อยู่ในรูปของคู่อันดับ (a, b) ดังเช่นจุดบนระนาบสองมิติ ที่คุ้นเคยกันในเรขาคณิตวิเคราะห์ หากอยู่ในรูปของ*ผลรวม*ระหว่างจำนวนจริง และจำนวนจินตภาพ ซึ่งเท่ากับจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ การแสดงจำนวนเชิงซ้อนด้วยแผนภาพของอาร์กานด์ ช่วยให้สามารถวัดระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุด $a + bi$ บนระนาบเชิงซ้อนใดๆ ได้ โดยการพิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉากที่เกิดขึ้นจากการลากเส้นตรงจากจุดกำเนิดไปยังจุด $a + bi$ ซึ่งมีความยาวแนวนอนและแนวตั้งเท่ากับ a และ b ตามลำดับ จากกฎของพิธาโกรัส ความยาวจากจุดกำเนิดไปยังจุด $a + bi$ จึงเท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2}$ หรือ $\sqrt{(a + bi) \cdot (a - bi)}$ กล่าวคือ รากที่สองของผลคูณของ $a + bi$ และคอนจูเกตเชิงซ้อนของจำนวนนั้น

การตีความจำนวนเชิงซ้อนในเชิงเรขาคณิตอีกรูปแบบหนึ่ง ที่เป็นที่นิยมกันมาก ได้แก่ การแสดงจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ ใน**รูปพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate representation)** โดยจากรูปที่ ก6 (2) จะเห็นได้ว่าหากลากเส้นตรงจากจุด $a + bi$ ให้ดิ่งลงไปทำมุมฉากกับแกนนอน จะได้สามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มีมุมที่จุดกำเนิดเท่ากับ θ และมีความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับ r ดังนั้น โดยที่สามเหลี่ยมมุมฉากนี้มีความกว้างและความสูงเท่ากับ a และ b ตามลำดับ และจากนิยามของฟังก์ชั่นตรีโกณมิติที่ว่า $\sin\theta = \frac{a}{r}$ หรือ $a = r \sin\theta$ และ $\cos\theta = \frac{b}{r}$ หรือ $b = r\cos\theta$ ซึ่งเมื่อได้แทนค่า a และ b ในจำนวนเชิงซ้อนแล้วจะได้ว่า

$$a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

การแสดงจำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดเชิงขั้วช่วยการยกกำลังจำนวนเชิงซ้อนสามารถทำได้โดยง่าย

[1] ตั้งชื่อตามฌอง อาร์กานด์ (Jean Argand, 1768-1822) นักคณิตศาสตร์ชาวสวิส ผู้นำเสนอแนวคิดนี้ในปี 1806 อย่างไรก็ตาม มีหลักฐานปรากฏว่า คาสปาร์ เวสเซล (Caspar Wessel, 1745-1818) นักสำรวจและนักคณิตศาสตร์ชาวแดนิช ได้เริ่มใช้แผนภาพในลักษณะเดียวกันอธิบายจำนวนเชิงซ้อนก่อนหน้าอาร์กานด์แล้วในปี 1797



รูปที่ ก7 จำนวนเชิงซ้อน (1) จำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ บนแผนภาพของอาร์กันด์ ในรูปจุดบนระนาบ 2 มิติ โดยแกนนอน คือ แกนของส่วนจริงและแกนตั้ง คือ ส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน คอนจูเกตเชิงซ้อน (complex conjugate) ของ $a+bi$ คือ $a-bi$ สามารถแสดงได้ด้วยจุดที่อยู่ในระนาบแนวตั้งเดียวกันกับ $a+bi$ แต่อยู่ในระนาบแนวนอนที่ $-b$ (2) จำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ ในรูปของพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate representation) คือ

$$a+bi = r(\cos\,\theta + i\,\sin\,\theta)$$

เมื่อ r คือความยาวของเส้นจากจุดกำหนดไปยังจุด $a+bi$ และ θ คือมุมระหว่างเส้นดังกล่าวกับแกนนอน จากการแสดงจำนวนเชิงซ้อนในรูปของพิกัดเชิงขั้ว จากทฤษฎีบทของเดอมัวเวอร์ (De Moivre's theorem) ที่ว่า

$$(a+bi)^n = r^n(\cos\,n\theta + i\,\sin\,n\theta)$$

ดังนั้น ในกรณีที่ $n=2$ ดังรูป จำนวนเชิงซ้อน $(a+bi)^2$ จึงเท่ากับจุดปลายของเส้นตรงจากจุดกำเนิดที่มีความชันและความยาวเป็นสองเท่าของเส้นตรงเดิมที่ลากจากจุดกำเนิดไปยัง $a+bi$

เช่น หากพิจารณา $(a+bi)^2$จะได้ว่า

$$(a+bi)^2 = r^2(\text{cos } 2\theta + i \text{ sin } 2\theta)$$

กล่าวคือ จำนวนเชิงซ้อน $(a+bi)^2$ จะเท่ากับจุดปลายของเส้นตรงจากจุดกำเนิดที่มีความชันและความยาวเป็นสองเท่าของเส้นตรงเดิมที่ลากจากจุดกำเนิดไปยัง $a+bi$ ผลข้างต้นในกรณีกำลังสองสามารถขยายผลไปสู่กรณีทั่วไปได้ด้วย**ทฤษฎีบทของเดอมัวเครอร์ (De Moivre's Theorem)** ที่ว่า[1]

$$(a+bi)^n = r^n(\text{cos } n\theta + i \text{ sin } n\theta)$$

ทั้งนี้ การพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้น มีจุดตั้งต้นจากการพิสูจน์ว่า ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน ที่อยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้วทั่วไป เช่น ผลคูณของ $a_1 + b_1 i = r_1(\text{cos } \theta_1 + i \text{ sin } \theta_1)$ และ $a_2 + b_2 i = r_2(\text{cos } \theta_2 + i \text{ sin } \theta_2)$ จะเท่ากับ

$$(a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 + b_2 i) = r_1 r_2 \left[\text{cos } (\theta_1 + \theta_2) + i \text{ sin } (\theta_1 + \theta_2)\right]$$

ซึ่งสามารถขยายไปสู่การพิสูจน์ทฤษฎีบทของเดอมัวเครอร์ ในกรณีทั่วไปได้ คือ

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k i) = \left(\prod_{k=1}^{n} r_k\right)\left[\text{cos } (\sum_{k=1}^{n}\theta_k) + i \text{ sin } (\sum_{k=1}^{n}\theta_k)\right],$$

เมื่อ $a_k + b_k i = r_k(\text{cos } \theta_k + i \text{ sin } \theta_k)$

อัตลักษณ์ของออยเลอร์กับจำนวนเชิงซ้อน

[1]อาบราม เดอมัวเครอร์ (Abraham de Moivre, 1667-1754) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ภายหลังจากที่จบระดับมัธยมศึกษาแล้ว เดอมัวเครอร์ได้หนีความวุ่นวายทางศาสนาในฝรั่งเศสไปอยู่ที่อังกฤษ โดยแม้จะมีความเป็นอยู่อย่างลำบากในอังกฤษ เพราะไม่มีมหาวิทยาลัยใดในอังกฤษในสมัยนั้น ประสงค์จะจ้างอาจารย์ชาวฝรั่งเศส และต้องหาเลี้ยงชีพด้วยการเป็นครูสอนคณิตศาสตร์ตามบ้าน แต่ก็พยายามศึกษาหาความรู้ด้วยตนเอง จากการอ่านหนังสือคณิตศาสตร์ที่โด่งดังในยุคนั้น เช่น Principia Mathematica ของไอแซค นิวตัน จนสร้างผลงานทางคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงหลายเรื่อง นอกจากทฤษฎีบทของเดอมัวเครอร์ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างการยกกำลังของจำนวนเชิงซ้อน และแนวคิดเกี่ยวกับตรีโกณมิติ ดังที่ได้พิจารณากันในที่นี้แล้ว เดอมัวเครอร์ยังมีผลงานสำคัญหลายชิ้น เกี่ยวกับความน่าจะเป็นและสถิติ ซึ่งนำไปสู่การค้นพบที่สำคัญภายหลัง เช่น ฟังก์ชั่นการกระจายความน่าจะเป็นแบบปกติของเกาส์ และฟังก์ชั่นการกระจายความน่าจะเป็นแบบปัวซอง เป็นต้น เดอมัวเครอร์เป็นนักคณิตศาสตร์ที่มีอัจฉริยภาพสูงมาก ถึงระดับที่แม้นิวตันยังยกย่องว่า สำหรับคณิตศาสตร์บางเรื่องนั้น เดอมัวเครอร์รู้มากกว่าตัวนิวตันเอง

แม้สมการ $E = MC^2$ อาจเป็นสมการทางฟิสิกส์ที่เป็นที่รู้จักกันดีที่สุด และกฎของปิทาโกรัสที่ว่า $a^2 + b^2 = c^2$เมื่อ a, b, c คือ ด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี c เป็นด้านที่ยาวที่สุด อาจเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ที่เป็นที่รู้จักกันดีที่สุด แต่ในความเห็นของนักคณิตศาสตร์จำนวนมากแล้ว **อัตลักษณ์ของออยเลอร์ (Euler's identity)** ที่ว่า

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

กลับเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ที่งดงามที่สุด ด้วยว่าอัตลักษณ์ของออยเลอร์นั้น แฝงความน่าสนใจอย่างยิ่ง เอาไว้ด้วยกันหลายประการ โดยในประการแรก อัตลักษณ์ของออยเลอร์เชื่อมโยงค่าทางคณิตศาสตร์ ที่สำคัญที่สุดไว้ 5 ค่าด้วยกัน คือ ค่า $0, 1, e, i, \pi$ อีกทั้งยังได้เชื่อมโยงความสัมพันธ์ของทั้งห้าค่าไว้ด้วยวิธีการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญที่สุด 3 วิธี คือ การบวก การคูณ และการยกกำลังด้วยเอกซ์โปเนนเชียล ความน่าสนใจอีกประการหนึ่ง ได้แก่ การที่อัตลักษณ์ข้างต้นดูจะฝืนคุณสมบัติของฟังก์ชั่นเอกซ์โปเนนเชียล ที่โดยปกติจะมีค่าเป็นบวกเสมอ อัตลักษณ์ดังกล่าวซึ่งพิสูจน์ว่า $e^{i\pi} = -1$ คือ การที่เอกซ์โปเนนท์ของ $i\pi$ ให้ผลลัพธ์ที่เป็นลบ จึงย่อมดูเป็นไปไม่ได้

การพิสูจน์อัตลักษณ์ของออยเลอร์ข้างต้น เริ่มจากการขยายฟังก์ชั่นเอกซ์โปเนนเชียลด้วยวิธีของเทเลอร์ กล่าวคือ สำหรับทุกฟังก์ชั่น $f(x)$ ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ไม่จำกัดครั้ง จะได้ว่า

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

เมื่อ a คือค่าคงที่ ดังนั้น หากขยายฟังก์ชั่น $f(x) = e^x$ ที่ค่า $a = 0$ จะได้ว่า

$$e^x = 1 + \frac{1}{1}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$$

และเช่นเดียวกันนี้ หากขยายฟังก์ชั่น $f(x) = \sin x$ และฟังก์ชั่น $f(x) = \cos x$ ที่ค่า $a = 0$ จะได้

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots$$

และ

$$\cos x = 1 + \frac{0}{1}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \ldots = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$$

ตามลำดับ

ดังนี้ หากให้ $x = bi$ เมื่อ $i = \sqrt{-1}$ จะได้

$$\begin{aligned} e^{bi} &= 1 + \frac{1}{1}(bi)^1 + \frac{1}{2!}(bi)^2 + \frac{1}{3!}(bi)^3 + \ldots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2!}b^2 + \frac{1}{4!}b^2 + \ldots\right) + i\left(b + \frac{1}{3!}b^3 + \frac{1}{5!}b^5 + \ldots\right) \\ &= \cos b + i \sin b \end{aligned}$$

สมการข้างต้นเป็นที่รู้จักกันในชื่อ **สมการของออยเลอร์ (Euler's equation)** และเมื่อแทนค่า $b = \pi$ ในสมการข้างต้น จะได้อัตลักษณ์ของออยเลอร์ คือ $e^{i\pi} = -1$ หรือ $e^{i\pi} + 1 = 0$

ก6 สมการพหุนาม

ความรู้เรื่องพีชคณิตเกี่ยวกับการหาคำตอบหรือ**ราก (root)** ของ**สมการพหุนาม (polynomial equation)** ที่อยู่ในรูป

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

เมื่อ $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ และ $n \in \mathbb{N}$ เป็นอีกพื้นฐานสำคัญหนึ่งของการศึกษาวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ทั้งนี้ แม้สมการพหุนามจะไม่ใช่สมการเชิงเส้น แต่ความรู้เรื่องการหารากของสมการพหุนาม กลับเป็นความรู้ที่จำเป็นในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ในการหาคำตอบของระบบสมการผลต่าง (system of difference equations) ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญที่ใช้สร้างตัวแบบพลวัตทางเศรษฐศาสตร์

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า รากของสมการพหุนามในกรณีเฉพาะที่ n เท่ากับ 1 หรือ 2 นั้น สามารถหาได้โดยสูตรตายตัว โดยในกรณีที่ $n = 1$ การหารากของสมการพหุนามสามารถทำได้โดยง่าย โดยการหาคำตอบของสมการเชิงเส้นหนึ่งสมการและหนึ่งตัวแปร ซึ่งหากมีคำตอบ จะมีคำตอบเป็นจำนวนจริง และในกรณีที่ $n = 2$ รากหรือคำตอบของสมการจะมีทั้งหมดสองค่า คือ

$$\rho_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

เมื่อ $a_2 \neq 0$ ซึ่งอาจเป็นได้ทั้งจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อนขึ้นอยู่กับเงื่อนไขว่า $a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$ หรือไม่

อย่างไรก็ตาม การหารากของสมการพหุนามในกรณีที่ $n \geq 3$ กลับเป็นคำถามที่ซับซ้อนมาก และเป็นที่สนใจของนักคณิตศาสตร์เป็นเวลาหลายร้อยปี โดยในกรณีเฉพาะของสมการพหุนามกำลังสามที่อยู่ในรูป

$$x^3 + a_1 x + a_0 = 0$$

นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาเลียนที่สำคัญที่สุดผู้หนึ่งในยุคเรเนอซองส์ คือ เจโรลาโม การ์ดาโน (Gerolamo Cardano, 1501-1576) ได้ค้นพบสูตรสำหรับหารากของสมการดังกล่าวซึ่งมีทั้งหมด 3 รากไว้ คือ

$$\rho_1 = u + v; \rho_2 = \omega u + \omega^2 v; \rho_3 = \omega^2 u + \omega v,$$

เมื่อ

$$u = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a_1^3 + 27a_0^2}{27}}}; u = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a_1^3 + 27a_0^2}{27}}}; \omega = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$$

ซึ่งแสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่า การหารากของสมการพหุนามกำลังตั้งแต่สามขึ้นไปนั้น เป็นเรื่องซับซ้อนมาก เพราะแม้แต่การหารากของสมการพหุนามกำลังสาม ในกรณีเฉพาะที่สัมประสิทธิ์ของ x^3 ถูกกำหนดให้เท่ากับ 1 และสัมประสิทธิ์ของ x^2 ถูกกำหนดไว้เท่ากับ 0 ยังเป็นเรื่องยาก อย่างไรก็ตาม ฌอง-บาติส เลอ รง ดาลมแบร์ (Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, 1717-1783)[1] นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสในอีกประมาณสองร้อยปีต่อมา ได้พัฒนาความรู้เกี่ยวกับการหารากสมการพหุนาม จนได้ทฤษฎีบทที่สำคัญบทหนึ่ง ซึ่งแม้จะไม่สามารถแยกรากของสมการพหุนามในกรณีทั่วไป ออกมาเป็นสูตรที่ตายตัวได้ แต่นับได้ว่าเป็นก้าวสำคัญของการหาคำตอบของสมการพหุนาม จนได้รับการขนานชื่อว่า**ทฤษฎีบทพื้นฐานของพีชคณิต (fundamental theorem of algebra)** ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ ก1 สมการพหุนามในรูป

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

[1]ฌอง-บาติส เลอ รง ดาลมแบร์ (Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, 1717-1783) เป็นลูกนอกสมรสของแม่ซึ่งเป็นนักเขียน ผู้อยู่ในสังคมชั้นสูงของฝรั่งเศส และพ่อซึ่งเป็นทหารระดับสูง แต่เมื่อแรกเกิดกลับถูกแม่ทิ้งไว้ที่หน้าโบสถ์ จนต้องโตมาในสถานเด็กกำพร้า ภายหลังจึงได้รับการช่วยเหลือจากพ่อ ซึ่งให้เงินเลี้ยงดูและอุดหนุนเรื่องการศึกษาอยู่ห่างๆ ดาลมแบร์เป็นอัจฉริยะหลายด้าน ทั้งคณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ ปรัชญา และดนตรี และเป็นผู้ร่วมจัดทำสารานุกรม Encyclopédie ที่ได้รวบรวมความรู้ ในยุคศิลปวิทยาการเฟื่องฟูของตะวันตกเอาไว้ โดยผลงานทางคณิตศาสตร์ ที่เป็นที่รู้จักกันมากที่สุดเรื่องหนึ่งของดาลมแบร์ คือ ทฤษฎีบทพื้นฐานของพีชคณิต นั้น แม้ในปัจจุบันก็ยังคงเป็นที่รู้จักกันในวงวิชาการในฝรั่งเศส ในชื่อว่า ทฤษฎีบทของดาลมแบร์ (d'Alembert's theorem)

เมื่อ $a_n \neq 0$ สามารถแยกให้อยู่ในรูป

$$a_n(x-\rho_1)\cdots(x-\rho_n)=0$$

โดยที่ $\rho_1,\ldots,\rho_n$ คือ รากของสมการซึ่งอาจเป็นได้ทั้งจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน ■

ทฤษฎีบทข้างต้นแสดงให้เห็นว่า รากของสมการพหุนามในกรณีทั่วไปนั้นมีอยู่เสมอ โดยอาจเป็นรากที่เป็นจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อนก็ได้ และอาจเป็นรากที่มีค่าแตกต่างกัน หรือเหมือนกันก็ได้ ซึ่งช่วยให้การหารากของสมการพหุนามสามารถทำได้ง่ายขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่ทราบรากของสมการบางตัวอยู่แล้ว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ ก39 การหารากของสมการพหุนามกำลังสามซึ่งเท่ากับ

$$x^3-4x^2+5x-2=0$$

สามารถทำได้โดยใช้ความรู้จากทฤษฎีบทพื้นฐานของพีชคณิต กล่าวคือ จากการพิจารณาสมการข้างต้น จะทราบได้โดยทันทีโดยการคาดเดาว่า รากตัวหนึ่งของสมการข้างต้น คือ $\rho_1=1$ เนื่องจากหากแทนค่า $x=1$ จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ 0 และจากทฤษฎีบทพื้นฐานของพีชคณิต จึงสรุปได้ว่าสมการพหุนามกำลังสามข้างต้น สามารถจัดให้อยู่ในรูป

$$(x-1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)=0$$

หรืออีกในอีกรูปหนึ่งคือ

$$(x-1)(ax^2+bx+c)=0$$

กล่าวคือ

$$ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c=0$$

ซึ่งเมื่อจับแต่ละพจน์ในสมการข้างต้น เทียบกับแต่ละพจน์ในสมการตั้งต้น จะได้ว่า $a=1$ และ $b-a=-4$ หรือ $b=-3$ และ $c=2$ จากนั้น เมื่อนำไปแทนค่าจะได้

$$(x-1)(x^2-3x+2)=0 \text{ หรือ } (x-1)(x-1)(x-2)=0$$

ดังนี้ รากของสมการพหุนามกำลังสามข้างต้น จึงเท่ากับ $\rho_1=\rho_2=1$ และ $\rho_3=2$ □

ก7 กรณีศึกษา: การทดสอบโควิด-19 แบบรวม

เมื่อครั้งโรคติดเชื้อไวรัสโคโรนา (COVID-19) หรือโควิด-19 ได้อุบัติขึ้นในปี 2019 นั้น การเข้าถึงชุดตรวจสอบการติดเชื้อที่จำเป็น เป็นไปอย่างจำกัดยิ่งในช่วงสองปีแรกหลังเริ่มมีการระบาด โดยแม้รัฐบาลของทุกประเทศจะย้ำให้เห็นความจำเป็น ในการคัดกรองผู้ติดเชื้อให้แยกออกห่างจากผู้ไม่ติดเชื้อเพื่อลดการระบาด แต่ชุดตรวจสอบในหลายประเทศยังคงมีราคาสูง เมื่อเทียบกับรายได้เฉลี่ยของบุคคลทั่วไป อาทิ ในกรณีของประเทศไทยนั้น ชุดตรวจสอบแบบ ATK (Antigen Test Kit) ซึ่งใช้วิธีการเก็บสารคัดหลั่งจากผู้ป่วย ด้วยไม้ที่สอดเข้าจมูก หรือจากน้ำลายชุดหนึ่งในปี 2001 มีราคาสูงถึงประมาณ 200 บาท เทียบกับอัตราค่าแรงขั้นต่ำเฉลี่ยในประเทศที่ประมาณ 335 บาท ปัญหาดังกล่าวเป็นเหตุเร่งให้การคัดกรองผู้ติดเชื้อ เพื่อควบคุมการระบาดทำได้ยากยิ่งขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกลุ่มผู้มีรายได้น้อย ซึ่งมักประสบปัญหาความเสี่ยงในการติดเชื้อ ที่สูงกว่ากลุ่มอื่นจากหลายปัจจัย ทั้งสภาพที่อยู่อาศัยที่ค่อนข้างแออัดซึ่งยากต่อการเว้นระยะห่างทางสังคม (social distancing) ความจำเป็นในการทำงานนอกบ้านจากทั้งลักษณะของอาชีพ ซึ่งมักไม่ใช่งานที่มีรายได้ประจำ และลักษณะงานประเภทใช้แรงงาน ซึ่งไม่เอื้อกับการทำงานจากบ้าน อีกทั้งยังขาดเงินออมเพียงพอ ที่จะชดเชยรายได้ซึ่งขาดหายไป จากมาตรการจำกัดการออกนอกสถานที่

กรณีศึกษาต่อไปนี้จะได้รวบรวมผลสำคัญจากงานวิจัยของผู้เขียน[1] ซึ่งพัฒนาตัวแบบทางเศรษฐ-ศาสตร์ เพื่อศึกษาว่าการใช้วิธีตรวจสอบการติดเชื้อแบบรวมกลุ่ม (collective testing) โดยการนำสารคัดหลั่งจากผู้ป่วยกลุ่มหนึ่งมารวมกัน และทดสอบด้วยชุดตรวจสอบชุดเดียวนั้น สามารถลดค่าใช้จ่ายได้อย่างไร และขนาดของกลุ่มผู้ป่วยที่ช่วยประหยัดค่าใช้จ่ายที่สุดนั้น ควรเป็นเท่าใด กรณีศึกษานี้นับเป็นตัวอย่างที่ดี ที่แสดงให้เห็นแนวทางการประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในภาคผนวกนี้ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ความรู้เกี่ยวกับแคลคูลัส เพื่อพัฒนาตัวแบบทางเศรษฐ-ศาสตร์ โดยแม้ผู้ไม่มีความรู้ทางเศรษฐศาสตร์ในระดับสูง ก็น่าจะสามารถเข้าใจแนวคิดหลักของบทความได้ตามสมควร

ในเชิงเศรษฐศาสตร์นั้น เป้าหมายการประหยัดทรัพยากร จากการใช้วิธีตรวจสอบการติดเชื้อแบบรวมกลุ่ม เมื่อเทียบกับวิธีการตรวจสอบแบบดั้งเดิม ซึ่งใช้ชุดตรวจสอบหนึ่งชุดสำหรับหนึ่งคน ถือเป็นแนวคิดที่ แฝงนัยยะของความเป็นสินค้าสาธารณะบางส่วน (quasi public goods) ของชุดตรวจสอบ ในแง่ที่ว่าผู้เข้ารับการตรวจซึ่งไม่ใช่ผู้ติดเชื้อ ย่อมสามารถใช้ชุดตรวจเพียงชุดเดียวร่วมกันได้ โดยไม่จำเป็นต้องใช้แยกชุดเป็นรายบุคคล โดยหากให้ในกลุ่มประชากรที่มีขนาด N

---

[1] นำเสนอในงานประชุมวิชาการนานาชาติ The 15th International Conference on the Regional Innovation and Cooperation in Asia (RICA), Kyoto

แห่งหนึ่งมีอัตราผู้ติดเชื้อเท่ากับ p สมมติให้การตรวจสอบการติดเชื้อกลุ่มตัวอย่างที่มีขนาด $n \subset N$ สามารถทำได้โดยด้วยวิธีใดวิธีหนึ่งในสองวิธี โดย วิธีแรก คือ การตรวจสอบแบบดั้งเดิมด้วยการนำสารคัดหลั่ง มาทดสอบกับชุดทดสอบเป็นรายบุคคล ด้วยชุดทดสอบที่มีราคาเท่ากับ k_1 ต่อหน่วย ซึ่งมีต้นทุนรวมคือ

$$\mathbb{E}(C_1|k_1, p) = nk_1$$

และวิธีที่สอง คือ วิธีการตรวจสอบที่แยกกระบวนการตรวจสอบเป็นสองขั้นตอน โดยในขั้นตอนที่หนึ่ง เป็นการนำเอาสารคัดหลั่งที่ได้จากทุกคนมารวมกัน และทดสอบด้วยชุดทดสอบเดียว ภายใต้ข้อสมมติที่ว่า ชุดตรวจมีความไว (sensitivity) ต่อการตรวจที่มากพอ ผลการทดสอบที่เป็นลบย่อมบ่งชี้ว่าไม่มีใครในกลุ่มตัวอย่างติดเชื้อ และผลการทดสอบเป็นบวก จะบ่งชี้ว่ามีบุคคลใดบุคคลหนึ่ง ในกลุ่มตัวอย่างเป็นผู้ติดเชื้อ ในกรณีที่ผลการทดสอบจากขั้นตอนที่หนึ่งเป็นบวก จึงจะนำสารคัดหลั่งที่เหลือจากแต่ละคน ไปตรวจสอบว่าผู้ใดในกลุ่มเป็นผู้ติดเชื้อ ด้วยชุดตรวจสอบเป็นรายบุคคลในขั้นตอนที่สอง โดยหากให้ชุดทดสอบในวิธีที่สองมีราคาเท่ากับ k_2 ต่อหน่วย จะได้ต้นทุนรวมที่คาดของวิธีที่สองเท่ากับ

$$\mathbb{E}(C_2|k_2, p) = (1-p)^n k_2 + (1-(1-p)^n)(n+1)k_2$$

ส่วนแรกของด้านขวามือของสมการข้างต้น คือ ความน่าจะเป็นที่ไม่มีผู้ใดในกลุ่มตัวอย่างเป็นผู้ติดเชื้อ ซึ่งเท่ากับ $(1-p)^n$ คูณกับต้นทุนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในกรณีนี้ ซึ่งเท่ากับราคาของชุดทดสอบเพียงชุดเดียวซึ่งเท่ากับ k_2 ในกรณีที่มีบุคคลใดบุคคลหนึ่งในกลุ่มตัวอย่างเป็นผู้ติดเชื้อ ซึ่งเกิดขึ้นด้วยความน่าจะเป็นที่เหลือ คือ $1-(1-p)^n$ ต้นทุนทั้งหมดในกรณีจะเท่ากับราคาของชุดทดสอบในขั้นตอนแรกซึ่งใช้ไปเพียงหนึ่งชุด คือ k_2 รวมกับราคาของชุดทดสอบในขั้นตอนที่สองซึ่งต้องใช้เท่ากับจำนวนคนในกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเท่ากับ nk_2 ทั้งนี้ มีข้อควรพิจารณาที่สำคัญคือ โดยที่

$$\frac{\partial \mathbb{E}(C_2|k_2, p)}{\partial n} = k_2 (1-(1-p)^n) - nk_2(1-p)^n \ln(1-p) > 0$$

ต้นทุนที่คาดว่าจะเกิดขึ้นจากการทดสอบด้วยวิธีที่สอง จะเพิ่มสูงขึ้นตามขนาดของกลุ่มตัวอย่าง ผลข้างต้นนี้สามารถเข้าใจได้โดยง่าย จากการพิจารณาข้อเท็จจริงที่ว่า หากกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้ติดเชื้ออย่างน้อยหนึ่งคน อยู่ในกลุ่มตัวอย่างย่อมสูงขึ้น และส่งผลให้ต้นทุนที่คาดของการทดสอบด้วยวิธีที่สอง สูงขึ้นตามความน่าจะเป็นที่กระบวนการทดสอบจะต้องผ่านเข้าสู่ขั้นตอนที่สอง

จากข้างต้น ประโยชน์ที่คาดจะได้รับ จากการใช้ชุดตรวจสอบในเชิงสินค้าสาธารณะ สามารถ

นิยามได้ในรูปส่วนต่างระหว่างต้นทุนของการใช้การตรวจสอบแบบดั้งเดิมในวิธีที่หนึ่ง และต้นทุนที่คาดว่าจะเกิดขึ้นของการใช้การตรวจสอบแบบสองขั้นตอนในวิธีที่สอง ซึ่งเท่ากับ

$$\Delta = nk_1 - \mathbb{E}(C_2|k_2, p) = (n(1-p)^n - 1)\,k_2 - (k_2 - k_1)n$$

ซึ่งในส่วนแรกของตัวแบบ หากสมมติให้ต้นทุนต่อหน่วยของทั้งสองวิธีเท่ากัน คือ $k_1 = k_2 \equiv k$ จะได้ว่า

$$\tilde{\Delta} \equiv \Delta|_k = (n(1-p)^n - 1)\,k$$

ลักษณะที่น่าสนใจเกี่ยวกับ $\tilde{\Delta}$ เช่น ผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงของอัตราผู้ติดเชื้อ และขนาดกลุ่มตัวอย่าง ต่อประโยชน์ที่ได้จากการใช้วิธีการทดสอบแบบรวม ตลอดจนลักษณะของฟังก์ชั่น $\tilde{\Delta}$ สามารถพิจารณาได้โดยการหาอนุพันธ์ของ ฟังก์ชั่น $\tilde{\Delta}$ ต่อการเปลี่ยนแปลงของ p และ n ซึ่งอยู่ในรูปข้อเสนอ ดังนี้

ข้อเสนอที่ ก1 หาก $\tilde{\Delta}$ คือ ส่วนต่างระหว่างต้นทุนของการใช้การตรวจสอบแบบดั้งเดิมในวิธีที่หนึ่ง และต้นทุนที่คาดของการใช้การตรวจสอบแบบสองขั้นตอนในวิธีที่สอง ในกรณีที่ต้นทุนต่อหน่วยของการทดสอบทั้งสองวิธีเท่ากัน คือ $k \equiv k_1 = k_2$ จะได้ว่า

1. $\frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial p} = -n^2 k(1-p)^{n-1} < 0$

2. $\frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial n} = (1-p)^n k\,(n \ln(1-p) + 1) \lesseqgtr 0$

3. $n^* = -\frac{1}{\ln(1-p)}$ เมื่อ $\left.\frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial n}\right|_{n=n^*} = 0$

4. $\lim_{n\to\infty} \tilde{\Delta} = -k \quad \blacksquare$

ในข้อแรก อนุพันธ์ลำดับแรกของ $\tilde{\Delta}$ ต่อการเปลี่ยนแปลงของ p สามารถคำนวณได้จากสูตรพื้นฐานของอนุพันธ์ของฟังก์ชั่น ซึ่งให้ผลลัพธ์คือ

$$\frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial p} = -n^2 k(1-p)^{n-1} < 0$$

ผลข้างต้นสอดคล้องกับสามัญสำนึกที่ว่า หากอัตราผู้ติดเชื้อคือ p สูงขึ้น ความน่าจะเป็นที่จะพบผู้ใดผู้หนึ่งติดเชื้อในขั้นตอนแรกย่อมสูงขึ้น จึงส่งผลให้ประโยชน์ที่ได้จากกระบวนการทดสอบด้วยวิธีที่สองคือ $\tilde{\Delta}$ ลดลงจากการเพิ่มขึ้นของความน่าจะเป็น ที่จะต้องทดสอบทุกคนในกลุ่มตัวอย่าง

อีกครั้งในขั้นตอนที่สอง และเช่นเดียวกัน อนุพันธ์ลำดับแรกของ $\tilde{\Delta}$ ต่อการเปลี่ยนแปลงของ n สามารถคำนวณได้จากสูตรพื้นฐานของอนุพันธ์ของฟังก์ชั่น ซึ่งให้ผลลัพธ์คือ

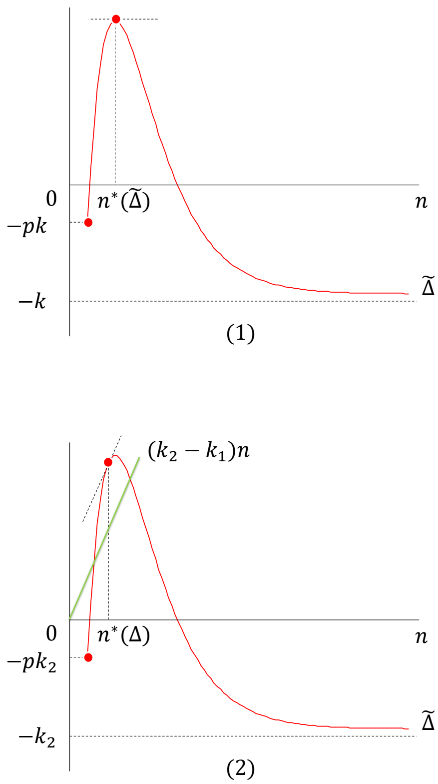
$$\frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial n} = (1-p)^n k \left(n \ \mathsf{ln}(1-p) + 1\right) \lesseqgtr 0$$

ทั้งนี้ โดยที่ $(1-p)^n k$ มีค่าเป็นบวกเสมอ ผลกระทบของ n ต่อ $\tilde{\Delta}$ ว่าจะเป็นบวกหรือลบนั้น ย่อมขึ้นอยู่กับค่าของส่วนที่อยู่ในวงเล็บ คือ $n \ \mathsf{ln}(1-p)+1$ ซึ่งจากข้อเท็จจริงเรื่องนี้ ขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่เหมาะสมที่สุดที่ทำให้ $\tilde{\Delta}$ มีค่าสูงสุด จึงสามารถหาได้จากการหาค่า n ที่ทำให้ค่าในวงเล็บเท่ากับ 0 ซึ่งให้ค่า n^* ดังแสดงไว้ในข้อถัดไป ในส่วนสุดท้าย หากพิสูจน์ได้ว่า $\mathsf{lim}_{n\to\infty} n(1-p)^n = 0$ ก็จะเป็นอันพิสูจน์ข้อเสนอสุดท้ายได้ อย่างไรก็ตาม การพิจารณาลิมิตของพจน์ดังกล่าวเมื่อ $n \to \infty$ นั้นอยู่ในรูปที่ไม่สามารถกำหนดค่าได้ คือ $0 \cdot \infty$ การแก้ปัญหานี้สามารถทำได้โดยการสมมติให้ $f(n) = n$ และ $g(n) = (1-p)^n$ และ $h(n) = g(n)^{-1} = (1-p)^{-n}$ จากนั้นจึงแปลงฟังก์ชั่นให้อยู่ในรูปที่ไม่สามารถกำหนดค่าได้ คือ $\frac{\infty}{\infty}$ แล้วจึงใช้กฎของโลปิตาลที่ว่า ลิมิตของฟังก์ชั่นจะเท่ากับลิมิตของอนุพันธ์อันดับแรกของฟังก์ชั่น กล่าวคือ

$$\mathsf{lim}_{n\to\infty} f(n)\cdot g(n) = \mathsf{lim}_{n\to\infty} \frac{f(n)}{\frac{1}{g(n)}} = \mathsf{lim}_{n\to\infty} \frac{f(n)}{h(n)} = \mathsf{lim}_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{h'(n)}$$

จากข้างต้น โดยที่ $f'(n) = 1$ และ $h'(n) = -(1-p)^{-n}\mathsf{ln}(1-p)$ จากคุณสมบัติที่ว่า $0 < 1-p < 1$ จะได้ว่า $\mathsf{lim}_{n\to\infty} h'(n) = \infty$ ซึ่งจากกฎของโลปิตาลข้างต้น จะได้ว่า $\mathsf{lim}_{n\to\infty} n(1-p)^n = 0$ และ $\mathsf{lim}_{n\to\infty}\tilde{\Delta} = -k$

โดยที่ $\tilde{\Delta} = -pk$ เมื่อ $n = 1$ ประกอบกับข้อเท็จจริงสามข้อสุดท้าย ในข้อเสนอที่ ก1 ที่ว่า $\tilde{\Delta}$ มีค่าสูงสุดที่ n^* จากนั้นจะเข้าใกล้เส้นกำกับแกนนอนที่ค่า $-k$ เมื่อ n มีค่าสูงขึ้นเรื่อยๆ จนเข้าสู่ค่าอนันต์ กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\tilde{\Delta}$ และ n จึงเป็นไปดังรูปที่ ก7 ทั้งนี้ การที่ $\tilde{\Delta} = -pk$ เมื่อ $n = 1$ นั้น สอดคล้องกับสามัญสำนึกที่ว่า ในกลุ่มตัวอย่างที่มีขนาดเท่ากับ 1 นั้น ค่าใช้จ่ายที่คาดจากการใช้การตรวจสอบด้วยวิธีที่สอง ย่อมไม่ต่างจากวิธีที่หนึ่ง ด้วยว่าผลที่ได้ในขั้นตอนที่หนึ่ง ย่อมแสดงสถานะของบุคคลผู้ซึ่งอยู่ในกลุ่มตัวอย่างได้ทันที โดยไม่ต้องตรวจสอบอีกครั้งเป็นรายบุคคลในขั้นตอนที่สอง สำหรับอีกกรณีซึ่ง $n \to \infty$ นั้น การตรวจสอบด้วยวิธีที่สอง ย่อมสร้างความสิ้นเปลืองจากการตรวจในขั้นตอนแรกโดยใช่เหตุ จากการที่ว่ากลุ่มตัวอย่างซึ่งมีขนาดใหญ่อย่างไม่จำกัดนั้น ย่อมเพิ่มความน่าจะเป็นที่มีผู้ใดผู้หนึ่งในกลุ่มตัวอย่างเป็นผู้ติดเชื้อ การนำตัวอย่างสารคัดหลั่งจากทุกคนมาทดสอบรวมกัน ทั้งที่อย่างไรแล้วก็ต้องตรวจสอบแยกเป็นรายคนในขั้นตอนที่สอง จึงสร้างความสิ้นเปลืองโดยไม่จำเป็น อนึ่ง ความสิ้นเปลืองที่เกิดขึ้นนี้



รูปที่ ก8 ประโยชน์จากการทดสอบแบบสองขั้นตอน ประโยชน์จากการทดสอบด้วยวิธีแบบสองขั้นตอน เมื่อ (1) ต้นทุนต่อหน่วยของทั้งสองวิธีเท่ากัน ที่ $k_1 = k_2 = k$ ซึ่งในกรณีนี้ ประโยชน์จากการทดสอบด้วยวิธีแบบสองขั้นตอน หรือ $\tilde{\Delta}$ จะเท่ากับ $-k$ เมื่อ $n = 1$ จากนั้นจึงเพิ่มสูงขึ้นจนมีค่าสูงสุดที่ $n^* = -\ln(1-p)^{-1}$ และลาดลงสู่งเส้นกำกับแนวนอนที่ $-k$ โดย n^* จะเท่ากับค่า n ที่ทำให้ $\tilde{\Delta}_n = 0$ และเมื่อ (2) ต้นทุนต่อหน่วยของวิธีทดสอบแบบสองขั้นตอน สูงกว่าวิธีแบบดั้งเดิม หรือเมื่อ $k_2 > k_1$ ในกรณีนี้แม้จะไม่สามารถแสดง n^*ในรูปแบบปิดได้ แต่สามารถกำหนด n^* ได้เท่ากับค่า n ที่ทำให้ $\tilde{\Delta}_n = k_2 - k_1$

จะมีค่าเข้าใกล้ค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นจากชุดตรวจสอบหนึ่งชุดที่หมดเปลืองไปในขั้นตอนแรก ซึ่งส่งผลให้ประโยชน์สุทธิจากการใช้วิธีตรวจสอบแบบที่สองคือ $\tilde{\Delta} \to -k$

แม้ข้อเท็จจริงต่างๆ ในข้อเสนอข้างต้นจะช่วยให้เราได้ทราบถึงลักษณะของฟังก์ชั่น $\tilde{\Delta}$ ว่ามีการเปลี่ยนแปลงไปตามขนาดของกลุ่มตัวอย่างคือ n อย่างไร แต่การที่จะหาเหตุผลสนับสนุนว่าการทดสอบที่แบ่งขั้นตอนเป็นสองส่วนมีประสิทธิภาพกว่าการทดสอบแบบทั่วไปได้อย่างไรนั้น จำเป็นต้องพิสูจน์ให้ได้ว่าการทดสอบแบบสองส่วนสามารถประหยัดต้นทุนได้มากกว่าจริง หรือในทางคณิตศาสตร์นั้น ยังควรต้องอธิบายเงื่อนไขต่างๆ ที่ทำให้ $\tilde{\Delta} > 0$ ดังสรุปได้ตามข้อเสนอต่อไปนี้

ข้อเสนอที่ ก2 $\tilde{\Delta} > 0$ เมื่อ $p < 1 - \mathsf{exp}(-\mathsf{exp}(-1)) \approx 0.31$ และ $n = n^*$ ■

เงื่อนไขในข้อเสนอที่ ก2 บ่งชี้ว่าในกรณีที่อัตราการติดเชื้อน้อยกว่าประมาณร้อยละ 30 และขนาดของกลุ่มตัวอย่างถูกกำหนดไว้ที่ระดับ n^* ดังที่แสดงในข้อเสนอที่ ก1 การทดสอบแบบสองส่วนจะมีประสิทธิภาพมากกว่าการทดสอบแบบดั้งเดิมเสมอ ข้อเสนอนี้สามารถพิสูจน์โดยตรงได้จากการกำหนดให้นิยามของ $\tilde{\Delta} > 0$ เมื่อ $n = n^*$ กล่าวคือ

$$\tilde{\Delta}|_{k,n=n^*} = \left(n^*(1-p)^{n^*} - 1\right)k > 0$$

โดยที่ $k > 0$ หากสมมติให้ $q \equiv 1 - p$ เงื่อนไขข้างต้นจะสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า $n^* q^{n^*} > 1$ หรือ

$$\mathsf{ln}(n^*) + n^*\mathsf{ln}(q) > 0$$

จากข้อเท็จจริงที่ว่า $n^*\mathsf{ln}(q) = -1$ เพราะ $n^* = -\mathsf{ln}(q)^{-1}$ เงื่อนไขข้างต้นจึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูป $n^* > e$ ซึ่งภายหลังแทนค่า $n^* = -\mathsf{ln}(q)^{-1}$ และแปลงค่ากลับด้วย $= 1 - q$ จะได้เงื่อนไขตามข้อเสนอ 2ก ที่ว่า

$$p < 1 - \mathsf{exp}(-\mathsf{exp}(-1))$$

ในส่วนท้ายนี้จะเป็นการพิจารณาตัดข้อสมมติบางข้อเกี่ยวกับตัวแบบและปรับปรุงให้สมจริงยิ่งขึ้น โดยข้อสมมติที่จะได้พิจารณาในที่นี้ คือ ข้อสมมติที่ว่าต้นทุนต่อหน่วย ของการทดสอบทั้งสองแบบต่างเท่ากันที่ $k_1 = k_2 = k$ ซึ่งในความเป็นจริงนั้น ต้นทุนต่อหน่วยของการทดสอบแบบสองขั้นตอน อาจสูงกว่าแบบดั้งเดิมด้วยเหตุผลหลายข้อ อาทิ ต้นทุนที่สูงขึ้นจากการต้องจัดเก็บ และ

จำแนกสารคัดหลั่งออกเป็นสองส่วน เพื่อการทดสอบในแต่ละขั้นตอน ตลอดจนต้นทุนที่อาจเกิดขึ้น จากความจำเป็นที่ต้องพัฒนาชุดตรวจให้มีความไวสูง สามารถตรวจสอบสารคัดหลั่งที่รวบรวมจากหลายบุคคลได้ ดังนี้ ตัวแบบที่สมจริง จึงควรพิจารณาความเป็นไปได้ที่ว่า $k_2 > k_1$ ซึ่งในกรณีนี้

$$\frac{\partial \Delta}{\partial n} = (1-p)^n k_2 \left(n \ln(1-p) + 1\right) - (k_2 - k_1) = \tilde{\Delta}_n - (k_2 - k_1)$$

จากข้างต้น ขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่เหมาะสมที่สุด ที่ทำให้ Δ มีค่าสูงสุด จึงได้แก่ $n = n^*$ ที่ทำให้ $\Delta_n = 0$ อย่างไรก็ตาม โดยที่อนุพันธ์อันดับแรกข้างต้นอยู่ในรูปค่อนข้างซับซ้อน จึงไม่อาจคำนวณหา n^* ในรูปแบบปิดได้ จะทำได้ก็แต่เพียงอธิบายเงื่อนไขที่ว่า n^* จะต้องเป็นขนาดของกลุ่มตัวอย่าง ที่ทำให้อนุพันธ์อันดับแรกเท่ากับศูนย์เท่านั้น อย่างไรก็ตาม มีข้อสังเกตที่ควรพิจารณาว่า จากที่ $\Delta_n = \tilde{\Delta}_n - (k_2 - k_1)$ จุดที่ทำให้ $\Delta_n = 0$ จึงต้องเท่ากับจุดที่ทำให้ $\tilde{\Delta}_n = k_2 - k_1$ หรือจุดที่ความชันของเส้นตรงที่แตะ $\tilde{\Delta}$ เท่ากับความชันของต้นทุนที่เพิ่มขึ้นมาคือ $k_2 - k_1$ ผลที่ค้นพบนี้มีการตีความที่ทั้งน่าสนใจ และเป็นที่คุ้นเคยกันในเชิงเศรษฐศาสตร์ กล่าวคือ หากเปรียบ $\tilde{\Delta}_n$ เสมือนประโยชน์ส่วนเพิ่มที่เกิดขึ้นจากประโยชน์สาธารณะ จากการขยายขนาดของกลุ่มตัวอย่างให้เพิ่มขึ้น ส่วนต่างของต้นทุนต่อหน่วยของวิธีตรวจสอบทั้งสองวิธี ก็เปรียบได้กับต้นทุนส่วนเพิ่มของวิธีตรวจสอบแบบสองขั้นตอน ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง ที่ทำให้ประสิทธิภาพจากวิธีตรวจสอบแบบสองขั้นตอนสูงสุด จึงสอดคล้องกับเงื่อนไขซึ่งเป็นที่คุ้นเคยกันโดยทั่วไปที่ว่าเป็นขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่ทำให้ประโยชน์ส่วนเพิ่ม และต้นทุนส่วนเพิ่มเท่ากัน

ก8 เอกสารอ่านประกอบเพิ่มเติม

ผู้อ่านที่ประสงค์จะศึกษาแต่ละหัวข้อในภาคผนวกนี้โดยละเอียด สามารถค้นคว้าจากตำราคณิตศาสตร์หลายเล่ม ที่เขียนขึ้นสำหรับผู้ศึกษาวิชาเศรษฐศาสตร์เป็นการเฉพาะได้ อาทิ Haeussler and Paul (1990) ซึ่งเป็นตำราระดับพื้นฐานที่สุด ที่แม้ผู้ไม่ได้มีพื้นฐานคณิตศาสตร์เกินกว่าระดับมัธยมปลาย ก็สามารถศึกษาด้วยตัวเองได้ไม่ยาก หรือ Chiang and Wainwright (2005) ตำราทางคณิตเศรษฐศาสตร์ ซึ่งจัดเป็นตำราระดับคลาสสิคที่ผู้ศึกษาเศรษฐศาสตร์ในระดับปริญญาตรีแทบทุกคนต้องคุ้นเคย ตำราอีกเล่มหนึ่ง ที่สามารถใช้ศึกษาเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ ที่จำเป็นสำหรับเศรษฐศาสตร์วิเคราะห์ในระดับสูงได้ คือ Sydsaeter and Hammond (1995) ซึ่งครอบคลุมเนื้อหาตั้งแต่ระดับพื้นฐานไปจนถึงระดับกลาง

ก9 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. สมมติให้ $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}, C = \{1, 4, 5, 6\}$ และ $D = \{1\}$

(1) จงพิจารณาว่าสิ่งใดต่อไปนี้เป็นจริง: $3 \in A; D \in A; \{\} \in A; \{\} \subset B; A - B \subset C;$ จำนวนสมาชิกของ $A - B$ มากกว่าหรือเท่ากับจำนวนสมาชิกของ $B - A$

(2) จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้: $A \cup B; A \cap (C \cup B); (D - B) \times A$

2. จงแปลงข้อความต่อไปนี้ ให้เป็นคณิตศาสตร์โดยใช้เครื่องหมายเกี่ยวกับเซต

(1) นายกรัฐมนตรีของประเทศไทยที่เสียชีวิตไปแล้ว ทั้งหมดเป็นผู้ชาย

(2) นายกรัฐมนตรีของประเทศไทยที่เป็นผู้ชายบางคน จบการศึกษาสูงสุดระดับปริญญาเอก

(3) นายกรัฐมนตรีของประเทศไทยทั้งหมด ที่ไม่เคยเป็นรัฐมนตรีว่าการกระทรวงการคลัง หรือรัฐมนตรีว่าการกระทรวงมหาดไทยมาก่อนเป็นผู้ชาย

3. จากโพลสำรวจผู้ลงทุนประเภทต่างๆ 1500 คนพบว่าผู้ลงทุนในตลาดทองคำมีทั้งหมด 700 คน ผู้ลงทุนในตลาดพันธบัตรรัฐบาลมีทั้งหมด 800 คน ผู้ลงทุนในตลาดหลักทรัพย์มีทั้งหมด 750 คน ผู้ลงทุนในตลาดทองคำและตลาดพันธบัตรรัฐบาลมีทั้งหมด 550 คน ผู้ลงทุนในตลาดพันธบัตรรัฐบาลและตลาดหลักทรัพย์มีทั้งหมด 400คน ผู้ลงทุนในตลาดทองคำและตลาดหลักทรัพย์มีทั้งหมด 300 คน และผู้ที่ลงทุนในตลาดทั้งสามประเภทมีทั้งหมด 250 คน จงหา

(1) จำนวนผู้ลงทุนที่ลงทุนในตลาดทองคำ แต่ไม่ได้ลงทุนในตลาดพันธบัตร

(2) จำนวนผู้ลงทุนในตลาดหลักทรัพย์เพียงตลาดเดียว

(3) จำนวนผู้ลงทุนในตลาดทองคำและตลาดหลักทรัพย์ แต่ไม่ได้ลงทุนในตลาดพันธบัตร

(4) จำนวนผู้ลงทุนที่ไม่ได้ลงทุนใน 3 ตลาดใดๆ ข้างต้น

4. จงพิสูจน์ว่ารากของ $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ คือ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5. จงพิสูจน์อสมการของโคชีและชวาร์ซ (Cauchy-Schwarz inequality) ที่ว่า

$$(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2)$$

เมื่อ $a_1, \ldots, a_n$ และ $b_1, \ldots, b_n$ เป็นจำนวนจริงใดๆ

6. จงประมาณการฟังก์ชั่น

$$f(x) = \ln(x+1) \text{ และ } g(x) = \frac{e^x}{\cos(x)}$$

ด้วยการขยายฟังก์ชั่นของเทเลอร์ จากนั้นจึงใช้ผลที่ได้ประมาณการค่าของ $\ln(1.5)$ และ $\frac{\sqrt{e}}{\cos(0.5)}$ ตามลำดับ

7. จงพิสูจน์ว่าหาก $f(x) = x^n$ ดังนั้น $f^{(n)}(x) = n!$

8. จงหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและอันดับที่สองของ (1) $f(x) = x^n - \ln(x + e^x)$ (2) $g(x) = x^{n+1}\exp(x^{-5})$ และหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ (3) $h(x) = (2x + \ln(x) + e^x)^{-2}(4x+3)^4$

9. จงแสดงว่า β คือค่าความยืดหยุ่นของ y ต่อการเปลี่ยนแปลงของ x เมื่อ $\ln(y) = \alpha + \beta\ln(x)$

10. จงพิสูจน์ว่า สำหรับทุกค่า $a > 1$ และ k ซึ่งเป็นค่าคงที่

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0$$

11. จงเขียน $(a+bi)^{-1}$ ในรูปของ $A + Bi$

12. จงจัดรูป e^i และ $e^{\pi i}$ ให้อยู่ในรูปใหม่ซึ่งไม่มีค่า i ในส่วนที่เป็นกำลัง

ภาคผนวก ข
เฉลยแบบฝึกหัด

บทที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น

1. การพิจารณาว่าสมการใดๆ เป็นสมการเชิงเส้นหรือไม่นั้น สามารถทำได้ โดยการพิจารณาว่ารูปแบบของสมการ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้นทั่วไป คือ

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

หรือไม่ ซึ่งหากพิจารณาสมการในข้อย่อยต่อไปนี้แล้ว จะได้ว่า

(1) $5x_1 + x_2 = x_3$ สามารถจัดเรียงใหม่ให้เป็น $5x_1 + x_2 - x_3 = 0$ ซึ่งอยู่ในรูปของ $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ เมื่อ $a_1 = 5, a_2 = 1, a_3 = -1$ และ $b = 0$ สมการนี้จึงเป็นสมการเชิงเส้น

(2) $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ ไม่สามารถจัดเรียงให้อยู่ในรูปของ $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ ได้ ไม่ว่าจะกำหนดให้ค่า a_1, a_2, a_3, b เป็นค่าใดๆ เนื่องจาก x_1, x_2, x_3ต่างอยู่ในรูปกำลังสองทั้งหมด

สมการนี้จึงไม่ใช่สมการเชิงเส้น

(3) $x_1^n - x_2^{n-1} = 5$ เมื่อ $n = 1$ เป็นสมการซึ่งเมื่อแทนค่า $n = 1$ แล้ว จะได้สมการในรูป $x_1 - 1 = 5$ หรือ $x_1 = 6$ ซึ่งอยู่ในรูป $a_1x_1 = b$ เมื่อ $a_1 = 1$ และ $b = 6$ สมการนี้จึงเป็นสมการเชิงเส้น ทั้งนี้ มีข้อสังเกตสำคัญ คือ แม้สมการนี้จะเป็นสมการพหุนามแต่ก็สามารถลดรูปให้อยู่ในรูปสมการเชิงเส้นได้ ซึ่งสามารถทำได้ในกรณีเฉพาะที่ $n = 1$ เท่านั้น

(4) $a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_n^2x_n = 0$ เมื่อ $a_1, \ldots, a_n$ คือค่าคงที่ เป็นสมการเชิงเส้น เนื่องจากการนำเอาค่าคงที่ที่เป็นสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรแต่ละตัวมายกกำลังสอง ย่อมให้ค่าคงที่เช่นเดียวกัน ในกรณีนี้ สมการข้างต้นสามารถเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ใหม่ให้อยู่ในรูป $b_1x_1+b_2x_2+\ldots + b_nx_n = c$ เมื่อ $b_i = a_i^2, i = 1, \ldots, n$ และ $c = 0$ ซึ่งอยู่ในรูปสมการเชิงเส้นทั่วไปข้างต้น

(5) $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2 = 0$ เมื่อ $a_1, \ldots, a_n$ คือ ค่าคงที่ ไม่ใช่สมการเชิงเส้น เนื่องจากสมการดังกล่าวไม่สามารถจัดรูปให้อยู่ในรูป $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ ได้ ไม่ว่าจะกำหนดให้ $a_i, \ldots, a_n, b$ เมื่อ $i = 1, \ldots, n$ เท่ากับค่าใดก็ตาม

2. การพิจารณาว่าจุดเป็นคำตอบของสมการเชิงเส้นหรือไม่ สามารถทำได้โดยการแทนค่าที่ถูกกำหนดโดยจุดแต่ละจุด ในสมการหรือระบบสมการเชิงเส้น และพิจารณาว่าสมการเป็นจริงหรือไม่ ในกรณีนี้ สำหรับสมการเชิงเส้น

$$x + y - z = 1$$

หากแทนค่า $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ ลงในฝั่งซ้ายของสมการ จะได้ $1 + 2 - 3 = 0$ ซึ่งไม่เท่ากับฝั่งขวาของสมการ ดังนั้น $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ จึงไม่ใช่คำตอบของสมการนี้ อย่างไรก็ตาม หากแทนค่า $(x, y, z) = (1, 2, 2)$ ลงในฝั่งซ้ายของสมการ จะได้ $1 + 2 - 2 = 1$ ซึ่งเท่ากับฝั่งขวาของสมการ ดังนั้น $(x, y, z) = (1, 2, 2)$ จึงเป็นคำตอบของสมการนี้

3. ค่าที่ถูกกำหนดในจุด จะเป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้ หากเมื่อได้นำเอาค่าที่ถูกกำหนดไปแทนในทุกสมการของระบบสมการเชิงเส้นแล้ว ทำให้สมการเป็นจริง จากที่ได้พิจารณาแล้วใน 1.2 ว่า $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ ไม่ใช่คำตอบของสมการแรกของระบบสมการเชิงเส้น คือ $x + y - z = 1$ จึงไม่จำเป็นต้องพิจารณาจุดนี้ต่อไปอีก สำหรับ $(x, y, z) = (1, 2, 2)$ ซึ่งได้พิจารณาแล้วว่าทำให้ $x + y - z = 1$ เป็นจริง จากนั้นเมื่อนำไปแทนค่าในอีกสมการของระบบสมการเชิงเส้น คือ $x + y + z = 6$ จะเห็นได้ว่า $1 + 2 + 2 = 5$ ซึ่งไม่เท่ากับฝั่งขวาของสมการคือ 6 ดังนั้น จุดทั้งสองต่างไม่ใช่คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ทั้งนี้มีข้อสังเกตว่า หากนำเอาค่าที่ถูกกำหนดใน

จุดแรกคือ $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ ไปแทนในสมการที่สองของระบบสมการ จะได้ $1 + 2 + 3 = 6$ ซึ่งเป็นคำตอบของสมการนี้ อย่างไรก็ตาม การที่จุดใดจะเป็นคำตอบของระบบสมการได้นั้น ต้องเป็นค่าที่ทำให้ทุกสมการในระบบสมการเป็นจริง ไม่ใช่แต่เพียงบางสมการในระบบสมการเป็นจริงเท่านั้น

4. จากสมการ $a_1x_1 + a_2x_2 = 2$ การหาค่า a_1 และ a_2 ที่ทำให้ $(x_1, x_2) = (1, 2)$ เป็นคำตอบของสมการสามารถทำได้ โดยการแทนค่า $(x_1, x_2) = (1, 2)$ ลงในสมการและแก้สมการเพื่อหาค่า a_1 และ a_2 ดังนั้น เมื่อได้แทนค่า $(x_1, x_2) = (1, 2)$ แล้ว จะได้สมการเชิงเส้นซึ่งอยู่ในรูปของ a_1 และ a_2 คือ

$$a_1 + 2a_2 = 2$$

หรือ $a_1 = 2 - 2a_2$ เมื่อ $a_2 \in \mathbb{R}$ ซึ่งให้คำตอบในรูป $a_2 = s$ เมื่อ $s \in \mathbb{R}$ และ $a_1 = 2 - 2s$

5. หลักการสำคัญในการแก้ปัญหาที่เป็นคำถามประยุกต์ อยู่ที่การพิจารณาคำถามและแทนค่าตัวแปรที่เกี่ยวข้องในคำถาม และจัดรูปให้อยู่ในระบบสมการเชิงเส้น จากนั้นจึงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีการที่ได้ศึกษามา จากคำถามข้อนี้ หากให้จำนวนบัตรสำหรับผู้ใหญ่ที่ขายได้เท่ากับ x และจำนวนบัตรสำหรับเด็กที่ขายได้เท่ากับ y จะได้ว่า ข้อมูลส่วนแรก ที่ระบุว่าสวนสนุกแห่งนี้จำหน่ายบัตรทุกใบรวมกันได้เท่ากับ 200 ใบนั้น สามารถแปลงเป็นสมการเชิงเส้นคือ $x + y = 200$ และข้อมูลส่วนที่สอง ที่ระบุว่าสวนสนุกมีรายได้จากการจำหน่ายบัตรทั้งหมดเท่ากับ 3000 บาท เมื่อ ราคาบัตรของผู้ใหญ่เท่ากับ 20 และราคาบัตรของเด็กเท่ากับ 10 บาทนั้น สามารถแปลงเป็นสมการเชิงเส้นคือ $20x + 10y = 3000$ ข้อมูลทั้งหมดจึงสามารถนำมาจัดเรียง ในรูปของระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{aligned} x + y &= 200 \\ 20x + 10y &= 3000 \end{aligned}$$

ระบบสมการข้างต้นเป็นระบบสมการเชิงเส้น ที่ประกอบด้วย 2 สมการและ 2 ตัวแปร ซึ่งสามารถหาคำตอบได้โดยง่ายด้วยวิธีพื้นฐาน เช่น การแทนค่าตัวแปร หรือหากจะใช้วิธีการลดทอนตัวแปรแบบต่างๆ ก็ได้ เช่น หากนำเอา 20 คูณสมการแรก และลบด้วยสมการที่สอง จะได้ $10y = 1000$ หรือ $y = 100$ ซึ่งเมื่อแทนค่าในสมการแรก จะได้ $x = 100$ เช่นกัน $x = y = 100$ จึงเป็นคำตอบของระบบสมการนี้ คำถามข้อนี้สามารถดัดแปลงให้น่าสนใจยิ่งขึ้น เช่น หากสมมติให้โจทย์กำหนดข้อเท็จจริงว่า สวนสนุกสามารถจำหน่ายบัตรของผู้ใหญ่และเด็กได้ อย่างละ 200 และ 100 ใบตามลำดับ และให้รายรับจากการขายบัตร รวมกันเท่ากับ 5000 บัตร จากนั้นจึงให้หาราคาของบัตรของผู้ใหญ่และเด็ก ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าวนี้ ในกรณีนี้ หากให้ราคาบัตรของผู้ใหญ่และเด็กเท่ากับ p_x และ p_y ตามลำดับ จะเห็นได้ว่า ข้อมูลที่ได้สามารถนำไปสร้างสมการได้แต่เพียง

แค่ว่า $200p_x + 100p_y = 5000$ โดยเราอาจนำเอาลักษณะของราคาสินค้าและบริการ ซึ่งเป็นที่ทราบกันโดยทั่วไปว่าย่อมเป็นค่าบวกมาประกอบ กล่าวคือ $p_x, p_y \geq 0$ อย่างไรก็ตาม ข้อมูลที่ให้มาทั้งหมดข้างต้นยังไม่สามารถใช้หาคำตอบที่ชี้ชัดลงไปได้ว่าราคาบัตรของผู้ใหญ่และเด็กเป็นเท่าใด เนื่องจากทุกค่า p_x และ p_y ที่สอดคล้องกับสมการ $200p_x+100p_y = 5000$ เช่น $p_x = 20$ และ $p_y = 10$ หรือ $p_x = 15$ และ $p_y = 20$ ต่างสอดคล้องกับข้อเท็จจริงที่ให้มาทั้งนั้น

6. แบบฝึกหัดข้อนี้มีจุดประสงค์สำคัญ เพื่อชี้ให้เห็นความยุ่งยากของการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ด้วยวิธีแทนค่าตัวแปร เมื่อเปรียบเทียบวิธีการอื่น ซึ่งผู้สนใจอาจลองหาคำตอบของระบบสมการ ด้วยวิธีดังกล่าวได้โดยการแทนค่าตัวแปรไปเรื่อยๆ สำหรับแบบฝึกหัดนี้ จะได้กล่าวถึงแต่เพียงการหาคำตอบของระบบสมการ ด้วยการลดทอนตัวแปรทั้งแบบเกาส์และแบบเกาส์และจอร์-แดน ดังนี้ จากระบบสมการในข้อที่ (1) เมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยายซึ่งเมื่อได้นำเอา 2 คูณแถวที่หนึ่งและนำไปรวมกับแถวที่สอง และเมื่อได้นำเอา -3 คูณแถวที่หนึ่งและนำไปรวมกับแถวที่สามจะอยู่ในรูป

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 2 & -4 & 10 & 1 \\ 3 & -8 & 16 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

จากนั้นเมื่อได้สลับแถวที่สองและสาม และนำเอา -2 คูณแถวที่สองและนำไปรวมกับแถวที่สามจะได้

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

สำหรับวิธีลดทอนตัวแปรแบบเกาส์ การลดทอนตัวแปรจะจบเพียงเท่านี้ เนื่องจากเมตริกซ์สัม-ประสิทธิ์แบบขยาย ซึ่งได้ลดรูปในขั้นตอนสุดท้าย อยู่ในรูปของแถวที่ได้รับการจัดเรียงตามลำดับแล้ว การหาคำตอบของระบบสมการต่อจากนี้ สามารถทำได้โดยการแทนค่าตัวแปร โดยจากแถวสุดท้ายซึ่งสอดคล้องกับสมการ $2x_3 = -3$ จะได้ว่า $x_3 = -\frac{3}{2}$ จากนั้นเมื่อนำ x_3 ไปแทนในสมการที่ได้จากแถวที่สอง คือ $x_2 - 2x_3 = 2$ จะได้ $x_2 = -1$ และเมื่อนำทั้ง x_2 และ x_3 ที่ได้ไปแทนในสมการแรก คือ $x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -1$ จะได้ $x_1 = 5$ และสำหรับวิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์และจอร์แดนนั้น จำเป็นต้องลดรูปเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยายต่อไปอีก จนอยู่ในรูปของแถว ที่ได้รับการจัดเรียงตามลำดับแบบลดรูป กล่าวคือ จุดหมุนของแต่ละแถวจะต้องเท่ากับ 1 และ ตัวเลขอื่นในคอลัมน์เดียวกับจุดหมุน จะต้องเท่ากับ 0 โดยในลำดับแรกหากนำเอา 2 หาร

แถวที่สาม จะได้เมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยายในรูป

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

จากนั้นเมื่อนำเอา 2 คูณกับแถวที่สาม และนำไปรวมกับแถวที่สอง และเมื่อนำเอา 3 คูณกับแถวที่สอง และนำเอา 6 คูณกับแถวที่สาม จากนั้นจึงเอาทั้งหมดไ ปรวมไปรวมกับแถวที่หนึ่ง จะได้สัมประสิทธิ์เมตริกซ์แบบขยาย ที่ถูกลดรูปอย่างสมบูรณ์

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

โดยแต่ละแถวของเมตริกซ์ ต่างสอดคล้องกับสมการ ที่ให้คำตอบโดยตรงว่า ตัวแปรในแต่ละแถวจะเป็นเท่าใด กล่าวคือ $x = b_1, y = b_2$ และ $z = b_3$ เมื่อ b_i คือในคอลัมน์สุดท้ายของแถวที่ i ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยาย ที่ได้รับการจัดเรียงตามลำดับแบบลดรูปแล้ว ซึ่งให้คำตอบเช่นเดียวกันกับคำตอบ ที่ได้จากวิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์ ในข้อที่ (2) จากการพิจารณาสมการที่หนึ่ง และสองของระบบสมการ หากเอา 2 คูณเข้ากับสมการที่หนึ่งจะได้ $2x+2y+2z=2$ ซึ่งขัดแย้งกับสมการที่สองคือ $2x+2y+2z=1$ ดังนั้น ระบบสมการนี้ย่อมไม่มีคำตอบ กล่าวคือไม่มีค่า x, y, z ใดๆ ที่ทำให้ทุกสมการในระบบสมการเป็นจริง โดยจะได้เมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยาย ที่ถูกลดรูปให้อยู่ในรูปของแถวที่ได้รับการจัดเรียงตามลำดับแล้ว คือ

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

จากข้างต้น อันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เท่ากับ 2 แต่อันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยายกลับเท่ากับ 3 แถวของสุดท้ายของเมตริกซ์สอดคล้องกับสมการ $0x+0y+0z=1$ ซึ่งส่งผลให้ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ จากระบบสมการในข้อที่ (3) เมื่อนำ -2 คูณแถวแรกของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยาย และนำไปรวมกับแถวที่สอง และนำเอา -3 คูณกับแถวที่หนึ่งและนำไป

รวมกับแถวที่สาม และสลับที่แถวที่สองและแถวที่สามจะได้

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -8 & 16 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & 13 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยายข้างต้น มีอันดับเท่ากับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ แต่ค่าของอันดับคือ 2 น้อยกว่าแถวของเมตริกซ์คือ 3 ซึ่งในกรณีนี้ระบบสมการจะมีคำตอบนับไม่ถ้วน โดยหากให้ z เป็นตัวแปรอิสระคือ $z = s, s \in \mathbb{R}$ จะได้ $y = (1 + 13s)/11$ และ $x = (10 - 24s)/11$ ในกรณีนี้การหาคำตอบด้วยวิธีการแบบเกาส์และจอร์แดน สามารถทำได้โดยการลดรูปเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยายเพิ่มเติมได้ โดยการนำเอา -11 หารแถวที่สองของเมตริกซ์ หลังจากนั้นจึงนำเอา -1 คูณแถวที่สองของเมตริกซ์ และนำไปรวมกับแถวที่หนึ่ง ซึ่งให้เมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยายอยู่ในรูป

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & 13 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{24}{11} & \frac{10}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ซึ่งให้คำตอบเท่ากับคำตอบที่ได้จากวิธีแบบเกาส์ จากระบบสมการในข้อที่ (4) หากนำเอา $-3/2$ คูณกับแถวที่สอง และนำไปรวมกับแถวที่สามของเมตริกซ์สัมประสิทธิแบบขยายจะได้

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

กรณีนี้เป็นกรณีเดียวกับ (2) โดยมีอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ คือ 2 ซึ่งกว่าอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยายคือ 3 จึงเป็นกรณีที่ระบบสมการไม่มีคำตอบ

7. จากข้อ (1) เมื่อนำแถวที่หนึ่งไปรวมกับแถวที่สอง จะได้เมตริกซ์ที่ถูกจัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับ คือ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

จากนั้นเมื่อนำแถวที่สองไปรวมกับแถวที่หนึ่ง และนำ -1 คูณแถวที่สอง จะได้เมตริกซ์ที่ถูกจัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแบบลดรูป คือ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

จากข้อ (2) เมื่อนำ 2 หารแถวที่หนึ่ง จากนั้นเมื่อนำ -3 คูณแถวที่หนึ่งและนำไปรวมกับแถวที่สอง จะได้เมตริกซ์ที่ถูกจัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับ คือ

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

จากนั้นเมื่อนำ 2 คูณกับแถวที่สอง และนำ $-\frac{5}{2}$ คูณแถวที่สองและรวมกับแถวที่หนึ่ง จะได้เมตริกซ์ที่ถูกจัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแบบลดรูป คือ

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

จากข้อ (3) เมื่อสลับแถวที่หนึ่งกับแถวที่สาม นำเอา -2 คูณกับแถวที่หนึ่งและนำไปรวมกับแถวที่สอง นำเอาแถวที่หนึ่งรวมกับแถวที่สาม จากนั้นนำแถวที่สองรวมกับแถวที่สาม จะได้เมตริกซ์ที่ถูกจัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับ คือ

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

จากนั้นเมื่อนำ 2 หารแถวที่หนึ่งและแถวที่สอง จะได้เมตริกซ์ที่ถูกจัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับแบบลดรูป คือ

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. ในคำถามข้อนี้ จะได้พิจารณาเฉพาะกรณีที่ $a_{ij} \neq 0$ เมื่อ $i, j \in \{1, 2\}$ โดยจากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยายของระบบสมการเชิงเส้นนี้ หากนำเอา a_{11} หารแถวแรก จะได้

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$$

จากนั้นเมื่อนำเอา $-a_{21}$ คูณแถวแรกและนำไปรวมกับแถวที่สอง จะได้เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขยายที่ถูกจัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับ คือ

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}} \\ 0 & \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}} & \frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{21}} \end{array}\right)$$

จากเมตริกซ์ข้างต้นหาก $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$ อันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์และเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยาย ต่างเท่ากับ 2 และเท่ากับจำนวนแถวของเมตริกซ์ ซึ่งส่งผลให้ระบบสมการนี้มีคำตอบ และมีคำตอบชุดเดียวเสมอ ในกรณีที่ $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$ นั้น หาก $b_2a_{11} \neq b_1a_{21}$ อันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์จะเท่ากับ 1 ซึ่งน้อยกว่าอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยายซึ่งเท่ากับ 2 ส่งผลให้ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ และหาก $b_2a_{11} = b_1a_{21}$ อันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ และเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยาย จะเท่ากันคือเท่ากับ 1 ซึ่งน้อยกว่าจำนวนแถวของเมตริกซ์ ส่งผลให้ระบบสมการนี้มีคำตอบนับไม่ถ้วน

9. เมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยายของระบบสมการเชิงเส้นนี้ สามารถจัดแถวให้อยู่ในรูปการเรียงลำดับ คือ

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{rr|r} 12 & 2 & 14 \\ 6 & 2 & 4 \\ -6 & -2 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 6 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4+a \end{array}\right)$$

จากเมตริกซ์ข้างต้น หาก $a \neq -4$ อันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธ์ซึ่งเท่ากับ 2 จะน้อยกว่าอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ซึ่งเท่ากับ 3 ส่งผลให้ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ อย่างไรก็ตาม หาก $a = -4$ อันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ และเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยาย จะเท่ากันคือ 2 และเท่ากับจำนวนตัวแปรในระบบสมการ คือ 2 ส่งผลให้ระบบสมการนี้ มีคำตอบหนึ่งชุด คือ $x_1 = \frac{5}{3}$ และ $x_2 = -3$

10. จากระบบสมการเชิงเส้น

$$mx + 2y = 10$$
$$3x - 2y = 0$$

หากนำเอาสมการแรก และสมการที่สองรวมกันจะได้ว่า

$$(m+3)x = 10 \text{ หรือ } nx = 10$$

เมื่อ $n = x + 3$ ดังนั้น $x = \frac{10}{n}$ ซึ่งเมื่อแทนค่าในสมการที่สองจะได้ว่า $y = \frac{15}{n}$ จากเงื่อนไขที่ว่า $x, y \in \mathbb{I}$ และโดยที่ตัวหารร่วมที่มีค่าสูงสุดของตัวตั้ง คือ 10 และ 15 คือ 5 ดังนั้น $-5 \leq n \leq 5$ ซึ่งให้ค่า n ที่ทำให้ $x, y \in \mathbb{I}$ คือ $\pm 1, \pm 5$ หรือค่า $m = n - 2$ ที่ทำให้ $x, y \in \mathbb{I}$ คือ $-7, -3, -1, 3$

11. จากตัวแบบ IS-LM ในรูประบบสมการเชิงเส้น

$$Y = C + I + G; C = a + bY; I = cY - dR$$
$$M_d = M_s; M_d = e + fY - gR$$

โดยที่ Y คือ รายได้ประชาชาติ C คือ การบริโภคภาคเอกชน I คือ การลงทุนภาคเอกชน G คือ รายจ่ายภาครัฐ R คือ อัตราดอกเบี้ย และ M_d และ M_s คือ อุปสงค์และอุปทานของเงิน ตามลำดับ โดย $a, \ldots, g > 0$ คือค่าพารามิเตอร์ของระบบสมการ เมื่อนำสมการของ C และ I แทนค่าในฝั่งขวาของสมการแรกในบรรทัดแรก และนำสมการของ M_d แทนค่าในฝั่งซ้ายของสมการแรกในบรรทัดที่สอง และจัดรูปของระบบสมการแล้ว จะได้ระบบสมการเชิงเส้นในรูป

$$(1-b-c)Y + dR = a + G$$
$$fY - gR = M_s - e$$

ซึ่งมีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยายของระบบสมการ คือ

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-b-c & d & a+G \\ f & -g & M_s - e \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1-b-c & d & a+G \\ 0 & 1 & \frac{-(1-b-c)(M_s-e)+f(a+G)}{g(1-b-c)+fd} \end{array}\right)$$

ซึ่งให้ดุลยภาพอัตราดอกเบี้ย คือ

$$R^* = \frac{-(1-b-c)(M_s-e)+f(a+G)}{g(1-b-c)+fd}$$

จากนั้น เมื่อแทนค่าในสมการแรกของเมตริกซ์ จะได้ดุลยภาพรายได้ คือ

$$Y^* = \frac{1}{1-b-c}\left(a+G+d\frac{(1-b-c)(M_s-e)-f(a+G)}{g(1-b-c)+fd}\right)$$

12. จากตัวแบบ AD-AS ในรูประบบสมการเชิงเส้น

$$AD: Y = \alpha\left(\frac{M}{P}\right)$$
$$AS: P = \beta Y$$

โดยที่ Y คือ รายได้ประชาชาติ M คือ ปริมาณเงินที่เป็นตัวเลข P คือ ระดับราคา $\alpha, \beta > 0$ คือ พารามิเตอร์ของระบบสมการ การหาคำตอบของระบบสมการนี้ด้วยวิธีการแทนค่าตัวแปร สามารถทำได้โดยการนำ $P = \beta Y$ ในสมการที่สอง แทนค่าในสมการที่หนึ่ง ซึ่งให้คำตอบของดุลยภาพรายได้ประชาชาติ คือ

$$Y = \left(\frac{\alpha}{\beta}M\right)^{\frac{1}{2}}$$

จากนั้นเมื่อแทนค่าในสมการที่สอง จะได้ดุลยภาพระดับราคา คือ

$$P = (\alpha\beta M)^{\frac{1}{2}}$$

จากคำตอบของระบบสมการข้างต้น มีข้อสังเกตที่น่าสนใจว่า การเปลี่ยนแปลงของดุลยภาพรายได้และราคา ต่างเป็นไปในทิศทางเดียวกัน กับการเปลี่ยนแปลงของปริมาณเงินในระบบเศรษฐกิจ ทั้งนี้ โดยที่

$$\frac{Y}{P} = \frac{1}{\beta}$$

รายได้ที่แท้จริงในระบบเศรษฐกิจนี้จึงมีค่าคงที่เสมอ และไม่เปลี่ยนแปลงตามปริมาณเงินในระบบเศรษฐกิจแต่อย่างใด

ในการหาคำตอบของระบบสมการนี้ด้วยวิธีการของเกาส์นั้น มีข้อสังเกตว่า ระบบสมการข้างต้นในรูปเดิม ไม่ใช่ระบบสมการเชิงเส้น อย่างไรก็ตาม หากแปลงแต่ละสมการด้วยฟังก์ชั่นล็อกการิธึมแบบธรรมชาติ จะได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} y &= \ln\alpha + m - p \\ p &= \ln\beta + y \end{aligned}$$

เมื่ออักษรตัวเล็กในภาษาอังกฤษ เท่ากับค่าล็อกการิธึมแบบธรรมชาติของอักษรเดียวกันซึ่งเป็นตัวใหญ่ ซึ่งสามารถจัดเรียงใหม่ในรูป

$$\begin{aligned} y + p &= \ln\alpha + m \\ -y + p &= \ln\beta \end{aligned}$$

และมีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยายของระบบสมการ คือ

$$\left(\begin{array}{rr|c} 1 & 1 & \ln\alpha + m \\ -1 & 1 & \ln\beta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|c} 1 & 1 & \ln\alpha + m \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\left(\ln\alpha + \ln\beta + \ln m\right) \end{array}\right)$$

จากข้างต้น คำตอบของระบบสมการจะเท่ากับ

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}\left(\ln\alpha + \ln\beta + \ln m\right) \\ y &= \frac{1}{2}\left(\ln\alpha - \ln\beta + \ln m\right) \end{aligned}$$

ซึ่งเท่ากับคำตอบของระบบสมการ ที่ได้จากการแทนค่าตัวแปรด้วยวิธีการแรก จากคำตอบข้างต้นจะเห็นได้ว่าการเพิ่มขึ้นของปริมาณเงินในระบบเศรษฐกิจร้อยละหนึ่ง จะส่งผลให้ทั้งระดับราคาและรายได้ที่เป็นตัวเงินของประเทศ เพิ่มขึ้นในอัตราร้อยละ $\frac{1}{2}$ เท่ากัน กล่าวคือ ปริมาณเงินในระบบเศรษฐกิจ จะไม่ส่งผลต่อรายได้ที่แท้จริงของประเทศ ซึ่งสอดคล้องกับผลลัพธ์ที่ว่า หากแปลงรายได้ที่แท้จริงด้วยฟังก์ชั่นล็อกการิธึมแบบธรรมชาติ จะได้

$$\ln\left(\frac{Y}{P}\right) = y - p = -\beta$$

ซึ่งเท่ากับค่าคงที่ ที่ไม่ขึ้นกับปริมาณเงินในระบบเศรษฐกิจ

บทที่ 2 พีชคณิตของเมตริกซ์

1. จากเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ และ $\boldsymbol{D}$ ดังที่กำหนดในคำถาม

(1) $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$3\boldsymbol{A} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{A}') = 2\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} - \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BD} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{DB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{BD}$$

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{D}' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}_2
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{B} \odot \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1(1) & 2(0) \\ -1(0) & 0(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1\boldsymbol{D} & 2\boldsymbol{D} \\ -1\boldsymbol{D} & 0\boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{D}$ ไม่สามารถหาค่าได้เนื่องจากมิติของเมตริกซ์ทั้งสองไม่เท่ากัน

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1\boldsymbol{D} \\ -1\boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1\boldsymbol{A} & 2\boldsymbol{A} \\ -1\boldsymbol{A} & 0\boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) เมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ จะเป็นเมตริกซ์นิจพล ก็ต่อเมื่อ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ ดังนั้น เมื่อ

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X}\boldsymbol{I}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$$

จึงสรุปได้ว่า $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$ คือ เมตริกซ์นิจพลโดยนิยาม

(3) จากที่

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $(\boldsymbol{DB})' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ และจากที่

$$\boldsymbol{B}'\boldsymbol{D}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $(\boldsymbol{DB})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{D}'$

2. หากให้ $\boldsymbol{X} = \mathsf{diag}(x_1, \ldots, x_n)$ และ $\boldsymbol{Y} = \mathsf{diag}(y_1, \ldots, y_n)$ จะได้ว่า

$$\boldsymbol{XY} = \mathsf{diag}(x_1y_1, \ldots, x_ny_n) = \mathsf{diag}(y_1x_1, \ldots, y_nx_n) = \boldsymbol{YX}$$

3. จากนิยามตัวกำหนดของเมตริกซ์จัตุรัส $\boldsymbol{A}$ ใดๆ ของไลบ์นิซจะได้ว่า

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\mathsf{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma_i} \right)$$

ซึ่งในสองกรณีแรก ซึ่งเป็นการหาตัวกำหนดของเมตริกซ์จัตุรัสขนาด 2×2 นั้น สามารถทำได้โดยง่าย โดยการสลับคอลัมน์ของเมตริกซ์เพียงครั้งเดียว กล่าวคือ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ซึ่งให้ค่าของตัวกำหนด

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1(3) - 2(-1) = 5$$

สำหรับเมตริกซ์นี้ หากใช้การขยายของลาปลาสตามแถวแรก จะได้ว่า

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1(3) - 2(-1) = 5$$

และหากใช้การขยายของลาปลาสตามแถวที่สอง จะได้ว่า

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-1)(2) + 3(1) = 5$$

ซึ่งเท่ากับผลลัพธ์จากการหาตัวกำหนด ด้วยนิยามของไลบ์นิซ และจากการขยายของลาปลาสตามแถวแรก สำหรับเมตริกซ์ที่สอง ซึ่งเป็นเมตริกซ์แกน หากหาค่ากำหนดโดยใช้นิยามของไลบ์นิซจะได้

$$\begin{vmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 31 \end{vmatrix} = 13(31) - 0(0) = 403$$

และเช่นเดียวกันนี้ ค่ากำหนดของเมตริกซ์แกน ที่ได้จากการขยายของลาปลาส จะเท่ากับผลคูณของค่าตามแกนของเมตริกซ์ เนื่องจากค่าอื่นที่ไม่ใช่ค่าตามแกนจะเท่ากับ 0 เสมอ กล่าวคือ $13(31) - 0(0) = 403$ ซึ่งเท่ากับผลลัพธ์ที่ได้ จากวิธีของไลบ์นิซ ในกรณีที่สาม ซึ่งเป็นการหาตัวกำหนดของเมตริกซ์จัตุรัสขนาด 3×3 ตัวกำหนดจากนิยามของไลบ์นิซ จะเป็นผลรวมแบบสลับเครื่องหมายบวกลบของจำนวน $3! = 6$ จำนวน โดยสำหรับที่แต่ละจำนวน เป็นผลคูณของค่าตามแกน ที่เกิดจากการสลับคอลัมน์ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของเมตริกซ์ กล่าวคือ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

จะมีตัวกำหนด คือ $|\boldsymbol{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$ ดังนั้น

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(1)(3) - 1(2)(1) + 0(2)1)$$
$$- 0(1)(0) + (-1)(2)(0) - (-1)(2)(3) = 7$$

การหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ ด้วยวิธีการขยายของลาปลาส สามารถเลือกขยายตามแถว หรือคอลัมน์ที่ง่ายที่สุด อาทิ แถวหรือคอลัมน์ที่มีค่า 0 มากที่สุด ซึ่งในที่นี้จะได้ขยายตามแถวแรกของ

เมตริกซ์ กล่าวคือ

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

ซึ่งเท่ากับผลลัพธ์ที่ได้ จากการหาตัวกำหนดด้วยนิยามของไลบ์นิซ สำหรับกรณีสุดท้ายซึ่งเป็นการหาตัวกำหนดของเมตริกซ์จัตุรัสขนาด 4×4 นั้น การหาตัวกำหนดตามนิยามของไลบ์นิซ มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น เนื่องจากการหาตัวกำหนดด้วยวิธีนี้ จำเป็นต้องหาผลรวมของแบบสลับเครื่อง-หมายบวกลบของจำนวน $4! = 24$ จำนวน โดยที่แต่ละจำนวนเป็นผลคูณของค่าทั้งหมด 4 ค่า โดยหากพิจารณาเฉพาะค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ σ_1 ซึ่งเกิดจากการสลับคอลัมน์ของเมตริกซ์นั้น สามารถสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

$$\begin{array}{cccc} +1234 & -2134 & -3214 & -4231 \\ -1243 & +2143 & +3241 & +4213 \\ +1423 & -2413 & -3421 & -4123 \\ -1432 & +2431 & +3412 & +4132 \\ +1342 & -2341 & -3142 & -4312 \\ -1324 & +2314 & +3124 & +4321 \end{array}$$

โดยที่ $\pm ijkl$ หมายถึง $\pm a_{1i}a_{2j}a_{3k}a_{4l}$ เช่น $+1234$ หมายถึง $+a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ และ -1243 หมายถึง $-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ ซึ่งเมื่อได้นำเอาค่าทั้งหมดจากตารางข้างต้นมาคำนวณแล้ว จะได้ค่ากำหนดของเมตริกซ์จัตุรัส $\boldsymbol{A}$ ขนาด 4×4 เท่ากับ $|\boldsymbol{A}| = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + \ldots - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} &= 1(-2)(3)(4) - 1(-2)(2)(3) + \ldots \\ &\quad - 1(0)(0)(2) + 1(0)(1)(1) = 0 \end{aligned}$$

สำหรับการหาค่ากำหนดของเมตริกซ์สุดท้าย ซึ่งเป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด 4×4 การขยายตาม

คอลัมน์ที่ 3 ดูจะเป็นการง่ายที่สุด ซึ่งให้ค่ากำหนดคือ

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

การหาตัวกำหนดด้วยคุณสมบัติของตัวกำหนด อาจใช้เป็นแนวทางสำหรับเมตริกซ์ในบางกรณี เช่น เมตริกซ์แกนในข้อที่สอง ซึ่งตัวกำหนดของเมตริกซ์เท่ากับผลคูณตามแกนของเมตริกซ์ ทั้งนี้แม้การใช้คุณสมบัติของตัวกำหนดของเมตริกซ์แกนในกรณีนี้ อาจดูไม่เห็นคุณประโยชน์เด่นชัดเท่าไรนัก เนื่องด้วยการหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ขนาด 2×2 สามารถทำได้โดยง่ายอยู่แล้วก็ตาม แต่คุณสมบัติดังกล่าว ย่อมเป็นแนวทางหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ ที่มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้นในการหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ขนาดใหญ่ สำหรับเมตริกซ์ในกรณีสุดท้าย ซึ่งแม้จะมีขนาดใหญ่นั้น หากพิจารณาแถวแรกและแถวที่สองของเมตริกซ์ ก็จะเห็นได้โดยง่ายว่า แถวที่สองของเมตริกซ์เท่ากับ 2 คูณด้วยแถวแรกของเมตริกซ์ ซึ่งจากคุณสมบัติของตัวกำหนด จะได้ว่าตัวกำหนดของเมตริกซ์ที่มีลักษณะเช่นนี้ย่อมเท่ากับ 0 เสมอ

4. จากระบบสมการแรกคือ

$$x_1 + x_2 = 1; x_1 - x_2 = 1$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ คือ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

คำตอบของระบบสมการจากการใช้อินเวอร์สของเมตริกซ์ จึงเท่ากับ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ในการหาคำตอบของระบบสมการด้วยกฎของคราเมร์ โดยที่

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2; |\boldsymbol{A}_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2; |\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

คำตอบของระบบสมการนี้จากกฎของคราเมร์จึงเท่ากับ

$$x_1 = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|} = 1; x_2 = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|} = 1$$

ซึ่งเท่ากับคำตอบที่ได้จากวิธีแรก และจากระบบสมการที่สอง คือ

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3; x_2 - x_3 = 1; x_3 = 0$$

ซึ่งอยู่ในรูป

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ในขั้นตอนแรก จะเป็นการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการก่อน โดยจากคุณสมบัติเรื่องตัวกำหนดของเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน หรือสามเหลี่ยมล่าง ซึ่งเท่ากับผลคูณของค่าบนแกน จะได้ว่าตัวกำหนดของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการนี้ จึงเท่ากับ 1 และจากทฤษฎีบทที่ว่า อินเวอร์สของเมตริกซ์ใดๆ จะเท่ากับอินเวอร์สของตัวกำหนด คูณด้วยเมตริกซ์ผูกพัน จึงได้คำตอบของระบบสมการคือ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ในการหาคำตอบของระบบสมการด้วยกฎของคราเมร์ โดยที่

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; |\boldsymbol{A}_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$|\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; |\boldsymbol{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

คำตอบของระบบสมการนี้จากกฎของคราเมร์จึงเท่ากับ

$$x_1 = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|} = 2; x_2 = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|} = 1; x_3 = \frac{|\boldsymbol{A}_3|}{|\boldsymbol{A}|} = 0$$

ซึ่งเท่ากับคำตอบที่ได้จากการใช้อินเวอร์สของเมตริกซ์ สำหรับคำถามข้อนี้ หากเปรียบเทียบกับวิธีลดทอนตัวแปรแบบเกาส์แล้ว จะเห็นได้ว่าวิธีลดทอนตัวแปรแบบเกาส์นั้น มีประสิทธิภาพกว่ามาก เนื่องจากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการตั้งต้น อยู่ในรูปการจัดเรียงแถวอยู่แต่แรกแล้ว การหาคำตอบของระบบสมการ จึงสามารถทำได้โดยทันทีโดยการแทนค่าตัวแปรไปเรื่อยๆ จากตัวแปรสุดท้ายคือ x_3 ไปจนถึงตัวแปรแรกคือ x_1 ซึ่งหากพิจารณาในแง่นี้ การหาคำตอบของระบบสมการด้วยวิธีลดทอนตัวแปร ดูจะมีข้อดีเหนือกว่าวิธีอื่นๆ ทั้งที่เป็นวิธีที่สามารถใช้ได้ในกรณีทั่วไป สำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่จำนวนสมการและตัวแปรไม่จำเป็นต้องเท่ากัน และในแง่ของความรวดเร็วในการหาคำตอบ ข้อดีดังกล่าวสามารถเห็นได้อย่างเด่นชัดขึ้น ในการหาคำตอบของระบบสมการขนาดใหญ่ ดังเช่นระบบสมการเชิงเส้น ที่ประกอบด้วยสมการ 4 สมการและตัวแปร 4 ตัวแปรในคำถามสุดท้าย ซึ่งหากใช้การหาคำตอบด้วยวิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์จะได้เมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยายในรูป

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

และสามารถใช้การจัดการแถวพื้นฐานจัดเรียงให้อยู่ในรูป

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 7 \end{array}\right)$$

ซึ่งจากขั้นตอนสุดท้าย สามารถหาคำตอบของระบบสมการด้วยวิธีการแทนค่าได้อย่างรวดเร็ว คือ $x_4 = -\frac{7}{5}$, $x_3 = \frac{14}{5}$, $x_2 = \frac{6}{5}$ และ $x_1 = \frac{2}{5}$ สำหรับการหาคำตอบของระบบสมการโดยการใช้อินเวอร์ส และกฎของคราเมร์นั้น จากระบบสมการซึ่งเมื่อเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

คือ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

จะได้ว่าตัวกำหนดของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ข้างต้น จากการหาตัวกำหนดด้วยวิธีการขยายแบบลาปลาสที่คอลัมน์สุดท้ายของเมตริกซ์ จะได้

$$|\boldsymbol{A}| = -1(1) \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

ขั้นตอนต่อไปในการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์คือการหาปัจจัยร่วมทั้ง 16 ตัว ซึ่งแต่ละตัวคือค่ากำหนดของเมตริกซ์ขนาด 3×3 ดังนี้

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad C_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2;$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3; \quad C_{14} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$C_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2;$$

$$C_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3; \quad C_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3; \quad C_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1;$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad C_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$C_{41} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3; \quad C_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1;$$

$$C_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4; \quad C_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

ซึ่งสามารถนำมาจัดเรียงเป็นเมตริกซ์เป็นเมตริกซ์ผูกพันคือ

$$\mathsf{adj}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

ในขั้นตอนสุดท้าย เมื่อนำเอาอินเวอร์สของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ข้างต้นไปคูณกับเวคเตอร์ $\boldsymbol{b}$ แล้วจะได้คำตอบของระบบสมการคือ

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix}$$

สำหรับวิธีการหาคำตอบของระบบสมการนี้ด้วยกฎของคราเมร์ คำตอบของระบบสมการ คือ

$$x_i = \frac{|\boldsymbol{A}_i|}{|\boldsymbol{A}|}$$

เมื่อ $|\boldsymbol{A}_i|$ คือตัวกำหนดของ $\boldsymbol{A}$ ที่คอลัมน์ i ถูกแทนที่ด้วย $\boldsymbol{b}$ ในกรณีนี้ โดยที่คอลัมน์สุดท้ายของ $\boldsymbol{A}$ ประกอบด้วยค่า 0 ถึงสองตัว การหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ขนาด 4×4 ในกรณีต่างๆ จึงสามารถทำได้ไม่ยากหากใช้การขยายของลาปลาส กล่าวคือ

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}_1| &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+4}(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4}(-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}_2| &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+4}(1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -6
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+4}(1)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -14
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}_4| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+4}(3)\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4}(1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\
&\quad + (-1)^{3+4}(2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7
\end{aligned}
$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการด้วยกฎของคราเมร์ จึงได้แก่ $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{6}{5}$, $x_3 = \frac{14}{5}$ และ $x_4 = -\frac{7}{5}$ ทั้งนี้จะเห็นได้ว่าคำตอบที่ได้จากทั้งสามวิธีมีค่าเท่ากัน แต่การหาคำตอบด้วยวิธีการลดทอนตัวแปรแบบเกาส์ ดูจะมีประสิทธิภาพที่สุดเพราะสามารถทำได้รวดเร็วที่สุด การหาคำตอบด้วยกฎของคราเมร์ ซึ่งแม้จะต้องคำนวณตัวกำหนดของเมตริกซ์ขนาด 4×4 ซึ่งเป็นค่าเศษของเศษส่วนอีกถึงสี่ครั้งนั้น แต่ถือได้ว่าสามารถทำได้อย่างรวดเร็วรองลงมา เนื่องจากบางคอลัมน์ในแต่ละเมตริกซ์ ต่างประกอบด้วยค่า 0 จำนวนมาก การหาตัวกำหนดของเมตริกซ์เช่นนี้ ด้วยวิธีการขยายของลาปลาส จึงสามารถทำได้ไม่ยาก และหากเปรียบเทียบกับการใช้อินเวอร์สแล้ว จะเห็นได้ว่าวิธีสุดท้ายมีความซับซ้อนกว่ามาก

5. จากเมตริกซ์

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

และจากนิยามของ $\boldsymbol{A}^{-n} = (\boldsymbol{A}^{-1})^n, n \in \mathbb{I}$ เมื่อ $\boldsymbol{A}^{-1}$ หาค่าได้ ดังนั้น เมื่อ

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{-1+2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

จึงได้ว่า

$$\boldsymbol{A}^{-2} = (\boldsymbol{A}^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6. สมมติให้ $\boldsymbol{A} = \mathsf{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ จะได้ว่า $\boldsymbol{A}^{-1} = \mathsf{diag}(a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1})$ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยง่ายจากนิยามของอินเวอร์สที่ว่า

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \mathsf{diag}(a_1 a_1^{-1}, \ldots, a_n a_n^{-1}) = \boldsymbol{I}$$

7. จากเมตริกซ์สมมาตรขนาด 2×2 ซึ่งอยู่ในรูป

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

ดังนั้น

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ac - b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

ซึ่งเป็นเมตริกซ์สมมาตรเช่นเดียวกับ $\boldsymbol{A}$

8. จากโจทย์ซึ่งกำหนดให้ $\boldsymbol{A}$ มีขนาด $n \times n$ สมมติให้ $\boldsymbol{B}$ มีขนาด $p \times q$ จากเงื่อนไขการคูณกัน

ของเมตริกซ์จะได้ว่า $\boldsymbol{AB}$ สามารถหาค่าได้ก็ต่อเมื่อ $n = p$ และ $\boldsymbol{BA}$ สามารถหาค่าได้ก็ต่อเมื่อ $q = n$ ดังนั้น หาก $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ จะได้ว่า $\boldsymbol{B}$ ต้องมีขนาด $n \times n$ เสมอ

9. จาก

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}'\left(\frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}'}{2}\right)\boldsymbol{x} \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}'\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

และโดยที่ $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}'\boldsymbol{x}$ เป็นสเกลาร์ที่มีคุณสมบัติที่ว่า ทรานส์โพสของสเกลาร์จะเท่ากับสเกลาร์เสมอ และจากกฎของทรานโพสของผลคูณของเมตริกซ์ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}'\boldsymbol{x} &= (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}'\boldsymbol{x})' \\ &= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

ซึ่งเมื่อนำไปแทนค่าในสมการข้างต้นจะได้

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \left(\frac{2}{2}\right)\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$$

10. จากฟังก์ชั่นกำลังสอง $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ในกรณีแรก หาก

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

จะได้

$$f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_1x_2$$

และหากพิจารณาไมเนอร์หลักแบบเรียงของ $\boldsymbol{A}$ จะได้ว่า

$$\widehat{\widehat{M}}_{(1)} = 1 > 0; \widehat{\widehat{M}}_{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0$$

โดยที่ไมเนอร์หลักแบบเรียงทั้งหมดของ $\boldsymbol{A}$ มีค่ามากกว่าศูนย์ จะสรุปได้ว่า $\boldsymbol{A}$ มีค่าเป็นบวก ใน

กรณีที่สอง เมื่อ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

จะได้

$$f(x) = x_1^2 - 4x_2^2 + 4x_1x_2$$

และหากพิจารณาไมเนอร์หลักแบบเรียงของ $\boldsymbol{A}$ จะได้ว่า

$$\widehat{\widehat{M}}_{(1)} = 1 > 0; \widehat{\widehat{M}}_{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -8 < 0$$

โดยที่ไมเนอร์หลักแบบเรียงของ $\boldsymbol{A}$ ข้างต้นไม่ได้เป็นไปตามรูปแบบของเมตริกซ์ที่มีค่าบวกที่ไมเนอร์หลักแบบเรียง จะต้องมากกว่าศูนย์ทุกตัว และไม่ได้เป็นไปตามรูปแบบของเมตริกซ์ที่มีค่าลบ ที่ไมเนอร์หลักแบบเรียงที่เป็นเลขคี่จะมีค่าน้อยกว่าศูนย์ ส่วนที่เป็นเลขคู่จะมีค่ามากกว่าศูนย์ จึงสรุปได้ว่า $\boldsymbol{A}$ ไม่สามารถระบุค่าได้ ในกรณีที่สาม

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

จะได้

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^3 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$$

ในกรณีนี้

$$\widehat{\widehat{M}}_{(1)} = 1 > 0; \widehat{\widehat{M}}_{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \widehat{\widehat{M}}_{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

โดยที่ $\widehat{\widehat{M}}_{(3)} < 0$ จึงสามารถสรุปได้โดยทันทีว่า $\boldsymbol{A}$ ไม่สามารถระบุค่าได้ ทั้งนี้ หาก $\widehat{\widehat{M}}_{(3)} \geq 0$ จะต้องคำนวณหาไมเนอร์หลักทุกตัว เพื่อตรวจสอบความเป็นได้ที่ $\boldsymbol{A}$ อาจมีค่ากึ่งบวก และในกรณี

สุดท้าย จาก

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

จะได้

$$f(x) = -2x_1^2 - x_2^2 - x_3^3 + 3x_1x_2$$

ในกรณีนี้

$$\widehat{\widehat{M}}_{(1)} = -2 < 0; \widehat{\widehat{M}}_{(2)} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \widehat{\widehat{M}}_{(3)} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\boldsymbol{A}$ จึงอาจเป็นเมตริกซ์ที่มีค่ากึ่งลบ หรือเป็นเมตริกซ์ที่ไม่สามารถระบุค่าได้ โดยเมตริกซ์ที่มีค่ากึ่งลบ ที่ไมเนอร์หลักทุกตัวที่อันดับเลขคี่จะต้องน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ และไมเนอร์หลักทุกตัวที่อันดับเลขคู่ จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์นั้น เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \widehat{M}_{(1)} &= -2, -1, -1 \\ \widehat{M}_{(2)} &= 0, 2, 1 \\ \widehat{M}_{(3)} &= 0 \end{aligned}$$

จากข้างต้น เนื่องด้วยไมเนอร์หลักที่อันดับที่หนึ่งทุกตัว มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ไมเนอร์หลักที่อันดับที่สองทุกตัว มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ และไมเนอร์หลักที่อันดับที่สามทุกตัว มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ จึงสามารถสรุปได้ว่า $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีค่ากึ่งลบ

11. จาก

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า

$$\widehat{\widehat{M}}_{(1)} = a; \widehat{\widehat{M}}_{(2)} = ac - b^2; \widehat{M}_{(1)} = a, c; \widehat{M}_{(2)} = ac - b^2$$

จึงสรุปได้ว่า

(1) $\boldsymbol{A}$ มีค่าบวก $\Leftrightarrow a > 0, ac - b^2 > 0$

(2) $\boldsymbol{A}$ มีค่าลบ $\Leftrightarrow a < 0, ac - b^2 > 0$

(3) $\boldsymbol{A}$ มีค่ากึ่งบวก $\Leftrightarrow a \geq 0, c \geq 0, ac - b^2 \geq 0$

(4) $\boldsymbol{A}$ มีค่ากึ่งลบ $\Leftrightarrow a \leq 0, c \leq 0, ac - b^2 \geq 0$

(5) $\boldsymbol{A}$ มีสามารถหาค่าได้หากค่าของ a, b, c, d ไม่ได้เป็นไปตามรูปแบบข้างต้น

12. จาก

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

การแสดงให้เห็นว่า $\boldsymbol{A}^+$ เป็นอินเวอร์สของมอร์และเพนโรสของ $\boldsymbol{A}$ สามารถทำได้ โดยแสดงให้เห็นคุณสมบัติทั้งสี่ข้อ ตามนิยามของอินเวอร์สของมอร์และเพนโรส ด้วยการแทนค่า กล่าวคือ

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^+$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+$$

$$(\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}$$

ซึ่งต้องตรงกับคุณสมบัติทั้งสี่ข้อ ตามนิยามของอินเวอร์สของมอร์และเพนโรส ดังนั้น $\boldsymbol{A}^+$ จึงเป็นอินเวอร์สของมอร์และเพนโรสของ $\boldsymbol{A}$

13. สำหรับเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ ขนาด $n \times n$ ที่มีอินเวอร์สคือ $\boldsymbol{A}^{-1}$ และ $\boldsymbol{B}^{-1}$ ตามลำดับ

(1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$ คุณสมบัติของอินเวอร์สข้อนี้สามารถพิสูจน์ได้ จากนิยามของอินเวอร์สที่ว่าหาก $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ แล้ว $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$ ดังนั้น เนื่องจาก $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ ดังนั้น $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}$

(2) หาก $\boldsymbol{AB}$ สามารถหาอินเวอร์สได้แล้ว $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ คุณสมบัติของอินเวอร์สข้อนี้ สามารถพิสูจน์ได้ โดยการแสดงว่าหาก $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ จะได้ว่า $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ ซึ่งผลดังกล่าวนี้ สามารถแสดงให้เห็นได้โดยการคูณเมตริกซ์ที่เกี่ยวข้องเข้าด้วยกันทั้งหมด คือ $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{ABB}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{AIA}^{-1} = \boldsymbol{I}$

(3) อินเวอร์สของ $\boldsymbol{A}'$ คือ $(\boldsymbol{A}')^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})'$ คุณสมบัติของอินเวอร์สข้อนี้ สามารถพิสูจน์ได้จากนิยามของอินเวอร์สที่ว่า $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ เมื่อทรานส์โพสทั้งสองข้างของสมการ จะได้ $(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})' = \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{A}^{-1})' = \boldsymbol{I}$ ดังนั้น จากนิยามของอินเวอร์สจะได้ว่า $(\boldsymbol{A}^{-1})' = (\boldsymbol{A}')^{-1}$

(4) สมมติให้ $k \neq 0$ คือค่าคงที่ $(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ คุณสมบัติของอินเวอร์สข้อนี้ สามารถพิสูจน์ได้จาก $(k\boldsymbol{A})(k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}) = \boldsymbol{I}$ ดังนั้น จากนิยามของอินเวอร์สจะได้ว่า $(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

14. จากระบบสมการเชิงเส้นในตัวแบบ IS-LM

$$\begin{aligned}(1-b-c)Y + dR &= a + G \\ fY - gR &= M_s - e\end{aligned}$$

ซึ่งสามารถแสดงในรูปของเมตริกซ์ คือ

$$\begin{pmatrix} 1-b-c & d \\ f & -g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+G \\ M_s - e \end{pmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} Y \\ R \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-b-c & d \\ f & -g \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a+G \\ M_s - e \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-(1-b-c)g - df}\begin{pmatrix} -g & -d \\ -f & 1-b-c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+G \\ M_s - e \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1-b-c)g + df}\begin{pmatrix} g(a+G) + d(M_s - e) \\ f(a+G) - (1-b-c)(M_s - e) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

และหากให้

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1-b-c & d \\ f & -g \end{vmatrix}; |\boldsymbol{A}_1| = \begin{vmatrix} a+G & d \\ M_s-e & -g \end{vmatrix}; |\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 1-b-c & a+G \\ f & M_s-e \end{vmatrix}$$

จะได้คำตอบของระบบสมการ คือ

$$Y = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{g(a+G)+d(M_s-e)}{(1-b-c)g+df}; R = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{f(a+G)-(1-b-c)(M_s-e)}{(1-b-c)g+df}$$

ซึ่งเท่ากับคำตอบที่ได้จากวิธีอื่นๆ ข้างต้น

จากระบบสมการเชิงเส้นในตัวแบบ AD-AS

$$\begin{aligned} y+p &= \ln\alpha + m \\ -y+p &= \ln\beta \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถแสดงในรูปเมตริกซ์ คือ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln\alpha + m \\ \ln\beta \end{pmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ln\alpha + m \\ \ln\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \ln\alpha - \ln\beta + m \\ \ln\alpha + \ln\beta + m \end{pmatrix}$$

และหากให้

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; |\boldsymbol{A}_1| = \begin{vmatrix} 1 & \ln\alpha + m \\ -1 & \ln\beta \end{vmatrix}; |\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} \ln\alpha + m & 1 \\ \ln\beta & 1 \end{vmatrix}$$

จะได้คำตอบของระบบสมการ คือ

$$y = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\ln\alpha - \ln\beta + m}{2}; p = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\ln\alpha + \ln\beta + m}{2}$$

ซึ่งเท่ากับคำตอบที่ได้จากวิธีอื่นๆ ข้างต้น

15. จากตัวแบบเชิงเส้นทางเศรษฐมิติ

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

สมมติให้ $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2 \ldots\ \boldsymbol{x}_k)$ เมื่อ $\boldsymbol{x}_i$ คือ เวคเตอร์ข้อมูลจากตัวแปร i ดังนี้ หาก $\boldsymbol{x}_i$ เป็นฟังก์ชั่นเชิงเส้น หรือองค์ประกอบเชิงเส้นของ $\boldsymbol{x}_{-i}$ อันดับของ $\boldsymbol{X}$ จะน้อยกว่า k กล่าวคือ $\rho(\boldsymbol{X}) < k$ และจากข้อเท็จจริงที่ว่า

$$\rho(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) \leq \min\left\{\rho(\boldsymbol{X}), \rho(\boldsymbol{X}')\right\}$$

ดังนั้น $\rho(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) < k$ ซึ่งส่งผลให้ $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ ไม่อาจหาค่าได้ ดังนี้ จึงไม่อาจหาตัวประมาณการกำลังสอง $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y})$ ได้เช่นกัน

16. จากฟังก์ชั่นกำไรของผู้ผลิตรายที่ 1 ซึ่งเท่ากับ

$$\begin{aligned}\pi_1 &= pq_1 - cq_1 \\ &= (\alpha - q_1 - q_2)\, q_1 - (\beta q_1 + (1-\beta)q_2)\, q_1\end{aligned}$$

ซึ่งมีอนุพันธ์อันดับแรก คือ

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = \alpha - 2q_1 - q_2 - 2\beta q_1 - (1-\beta)q_2 = 0$$

ฟังก์ชั่นการตอบสนองที่ดีที่สุดของผู้ผลิตรายที่ 1 จึงเท่ากับ

$$q_1 = \frac{1}{2(1+\beta)}\left(\alpha - (2-\beta)q_2\right)$$

และโดยที่ผู้ผลิตรายที่ 1 และ 2 มีลักษณะสมมาตรกัน ฟังก์ชั่นการตอบสนองที่ดีที่สุดของผู้ผลิตรายที่ 2 จึงเท่ากับ

$$q_2 = \frac{1}{2(2-\beta)}\left(\alpha - (1+\beta)q_1\right)$$

ฟังก์ชั่นการตอบสนองของผู้ผลิตทั้งสองราย สามารถเขียนในรูประบบสมการเชิงเส้นได้ คือ

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2-\beta}{2(1+\beta)} \\ \frac{1+\beta}{2(2-\beta)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2(1+\beta)} \\ \frac{\alpha}{2(2-\beta)} \end{pmatrix}$$

ซึ่งมีคำตอบของระบบสมการ คือดุลยภาพของแนชของตลาดเท่ากับ

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2-\beta}{2(1+\beta)} \\ \frac{1+\beta}{2(2-\beta)} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2(1+\beta)} \\ \frac{\alpha}{2(2-\beta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{3(1+\beta)} \\ \frac{\alpha}{3(2-\beta)} \end{pmatrix}$$

บทที่ 3 ค่าเฉพาะ

1. การหาค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะสำหรับเมตริกซ์จัตุรัส $\boldsymbol{A}$ สามารถทำได้โดยการหาค่า λ ที่ทำให้ $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$ จากนั้นจึงหาเวคเตอร์เฉพาะ $\boldsymbol{x}$ โดยใช้คุณสมบัติที่ว่า $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ทั้งนี้ วิธีการหนึ่งที่มีประสิทธิภาพในการค่าเฉพาะ สามารถทำได้โดยการพิจารณาค่าที่ทำให้ $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$ แทนการหาค่ากำหนดโดยตรง โดยใช้คุณสมบัติที่ว่าเมตริกซ์ที่มีทุกค่าในแถวเท่ากันหรือมีทุกค่าเท่ากับศูนย์ หรือมีทุกค่าในแถวหนึ่ง ที่เท่ากับค่าคงที่คูณกับทุกค่าในอีกแถวหนึ่ง จะมีค่ากำหนดเท่ากับศูนย์ สำหรับในข้อ (1) ค่าเฉพาะของเมตริกซ์นี้คือ λ ที่ทำให้

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(6-\lambda) = 0$$

ซึ่งเป็นสมการพหุนาม ที่มีรากคือ $\lambda = 4, 6$ สำหรับกรณีนี้ สามารถพิจารณาเมตริกซ์ เพื่อหารากโดยตรงได้ กล่าวคือ หากนำเอา 4 ไปลบออกจากค่าที่หนึ่งในแถวแรก จะทำให้ทุกค่าในแถวแรกของเมตริกซ์เท่ากับ 0 ทั้งหมด ซึ่งทำให้ค่ากำหนดของเมตริกซ์ใหม่เป็น 0 นอกจากนี้หากนำเอา 6 ไปลบออกจากค่าที่สองของแถวที่สองของเมตริกซ์ จะทำให้แถวแรกกับแถวที่สองไม่เป็นอิสระจากกัน ซึ่งทำให้ค่ากำหนดของเมตริกซ์ใหม่เป็น 0 เช่นกัน สำหรับเวคเตอร์เฉพาะของ $\lambda = 4$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $5x_1 + 2x_2 = 0$ ในกรณีนี้หากให้ x_2 เป็นตัวแปรอิสระจะได้เวคเตอร์

เฉพาะคือ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} s, s \in \mathbb{R}$$

สำหรับเวคเตอร์เฉพาะของ $\lambda = 6$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $4x_1 = 0$ และ $5x_1 = 0$ ดังนั้น $x_1 = 0$ และหากให้ x_2 เป็นตัวแปรอิสระ จะได้เวคเตอร์เฉพาะคือ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} s, s \in \mathbb{R}$$

ในข้อ (2) ค่าเฉพาะของเมตริกซ์คือ λ ที่ทำให้

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} &= (-1-\lambda)(5-\lambda) + 4 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{5}, \lambda_2 = 2 - \sqrt{5}$$

สำหรับเวคเตอร์เฉพาะของ $\lambda_1 = 2 + \sqrt{5}$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} -3-\sqrt{5} & 2 \\ -2 & 3+\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} -(3+\sqrt{5})x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 + (3+\sqrt{5})x_2 &= 0 \end{aligned}$$

แม้การหาคำตอบของระบบสมการข้างต้นด้วยวิธีแทนค่า หรือวิธีลดทอนตัวแปรที่ผ่านมา อาจดูค่อนข้างซับซ้อนเนื่องจากสัมประสิทธิ์บางตัวที่อยู่ในรูป $\pm(3+\sqrt{5})$ อย่างไรก็ตาม หากพิจารณา

ระบบสมการอย่างละเอียด จะเห็นได้ว่าคำตอบของระบบสมการข้างต้น คือ $x_1 = -x_2$ เนื่องจากหากนำเอา x_1 แทนที่ด้วย $-x_2$ ในสมการแรก จะได้สมการที่สอง ซึ่งหากให้ x_2 เป็นตัวแปรอิสระ จะได้เวคเตอร์เฉพาะคือ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} s, s \in \mathbb{R}$$

สำหรับเวคเตอร์เฉพาะของ $\lambda_2 = 2 - \sqrt{5}$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} -3+\sqrt{5} & 2 \\ -2 & 3+\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} (-3+\sqrt{5})x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 + (3+\sqrt{5})x_2 &= 0 \end{aligned}$$

หากนำฝั่งซ้ายของสมการทั้งสองมาเท่ากันจะได้

$$\begin{aligned} (-3+\sqrt{5})x_1 + 2x_2 &= -2x_1 + (3+\sqrt{5})x_2 \\ -(1-\sqrt{5})x_1 &= (1+\sqrt{5})x_2 \end{aligned}$$

หรือ

$$x_1 = -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right) x_2$$

ในการนี้หากให้ x_2 เป็นตัวแปรอิสระ จะได้เวคเตอร์เฉพาะคือ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} s, s \in \mathbb{R}$$

ในข้อ (3) ค่าเฉพาะของเมตริกซ์คือ λ ที่ทำให้

$$\begin{vmatrix} -\lambda & x \\ 0 & y-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(y-\lambda) = 0$$

ซึ่งให้ค่า $\lambda_1 = 0$ และ $\lambda_2 = y$ สำหรับเวคเตอร์เฉพาะของ $\lambda_1 = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้น $xz_2 = yz_2$ ในกรณีนี้ ค่าของ z_2 ที่สอดคล้องกับทุกค่าที่เป็นไปได้ของ x, y จึงได้แก่ $z_2 = 0$ ทั้งนี้เนื่องจากระบบสมการข้างต้น ไม่มีเงื่อนไขใดที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรแรกคือ z_1 จึงได้ว่า z_1 คือตัวแปรอิสระในกรณีนี้ เวคเตอร์เฉพาะของค่าเฉพาะ $\lambda_1 = 0$ จึงอยู่ในรูป

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} s, s \in \mathbb{R}$$

สำหรับเวคเตอร์เฉพาะของ $\lambda_2 = y$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} -y & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้น $-yz_1 + xz_2 = 0$ หรือ $z_1 = \frac{x}{y} z_2$ ในกรณีนี้หากให้ z_2 เป็นตัวแปรอิสระ จะได้เวคเตอร์เฉพาะคือ

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{y} \\ 1 \end{pmatrix} s, s \in \mathbb{R}$$

สำหรับการหาค่าเฉพาะของเมตริกซ์ในข้อ (4) คือ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ซึ่งเป็นเมตริกซ์ขนาด 3×3 นั้น มีค่าเฉพาะเท่ากับ λ ที่ทำให้

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = 0$$

ซึ่งให้รากของสมการพหุนามทั้งสิ้นสามค่า คือ $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ และ $\lambda_3 = 2$ สำหรับค่าเฉพาะค่าแรกคือ $\lambda_1 = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ซึ่งให้คำตอบคือ $x_1 = 0$ และ $x_2 = -x_3$ ดังนั้น หากให้ x_3 เป็นตัวแปรอิสระจะได้เวคเตอร์เฉพาะซึ่งอยู่ในรูป

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} s, s \in \mathbb{R}$$

สำหรับค่าเฉพาะค่าที่สองคือ $\lambda_2 = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

ซึ่งให้คำตอบคือ $x_1 = x_2 = 0$ และหากให้ x_3 เป็นตัวแปรอิสระจะได้เวคเตอร์เฉพาะซึ่งอยู่ในรูป

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s, s \in \mathbb{R}$$

สำหรับค่าเฉพาะค่าสุดท้ายคือ $\lambda_3 = 2$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} -x_1 &= 0 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ซึ่งให้คำตอบคือ $x_1 = 0$ และ $x_2 = x_3$ ดังนั้นหากให้ x_3 เป็นตัวแปรอิสระจะได้เวคเตอร์เฉพาะซึ่งอยู่ในรูป

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s, s \in \mathbb{R}$$

2. โดยที่ค่ากำหนดของเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน และล่างขนาดใดๆ จะเท่ากับผลคูณของค่าบนแกน ดังนั้นค่าเฉพาะของเมตริกซ์สามเหลี่ยมขนาด $n \times n$ จึงเท่ากับรากของสมการพหุนาม

$$(a_{11} - \lambda_1)(a_{22} - \lambda_2) \cdots (a_{nn} - \lambda_n) = 0$$

ซึ่งให้ค่าเฉพาะคือ $\lambda_i = a_{ii}$ เมื่อ $i = 1, \ldots, n$

3. จากทฤษฎีบทเรื่องการแปลงเมตริกซ์จัตุรัสให้เป็นเมตริกซ์แกน หากให้ $\boldsymbol{A}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่มีค่าเฉพาะ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ และเวคเตอร์เฉพาะสำหรับแต่ละค่าเฉพาะ คือ $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ จะ

สามารถนำเอาเวคเตอร์เฉพาะแต่ละตัว มาประกอบกันเป็นเมตริกซ์

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \ldots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$$

โดยที่

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathsf{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

จากคำถามข้อที่ (1) เมื่อ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

ซึ่งให้ค่าเฉพาะสองค่าที่แตกต่างกัน คือ $\lambda_1 = 4$ ที่มีเวคเตอร์เฉพาะคือ $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}'$ เมื่อ $s \in \mathbb{R}$ ซึ่งในที่นี้ อาจเลือกให้ $s = 5$ จะได้ $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix}'$ และสำหรับค่าเฉพาะอีกตัวคือ $\lambda_2 = 6$ จะได้เวคเตอร์เฉพาะคือ $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}'$ ดังนั้นจะได้

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

และ

$$\boldsymbol{P}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

ซึ่งให้

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{diag}(4, 6)$$

สำหรับข้อ (2) จากเวคเตอร์เฉพาะของ $\lambda_1 = 2 + \sqrt{5}$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} s, s \in \mathbb{R}$$

และจากเวคเตอร์เฉพาะของ $\lambda_2 = 2 - \sqrt{5}$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} s, s \in \mathbb{R}$$

สำหรับเวคเตอร์เฉพาะแรกหากให้ $s = -1 - \sqrt{5}$ และนำมาประกอบกับเวคเตอร์เฉพาะที่สองจะได้

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & -1-\sqrt{5} \\ -1-\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

และ

$$\boldsymbol{P}^{-1} = -\frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

ซึ่งให้

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} &= -\frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & -1-\sqrt{5} \\ -1-\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \\ &= \mathsf{diag}(2+\sqrt{5}, 2-\sqrt{5})\end{aligned}$$

ในข้อ (3) เมื่อนำเอาเวคเตอร์เฉพาะของเมตริกซ์มาประกอบกันจะได้

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

และ

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ซึ่งให้

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathsf{diag}(0, y)\end{aligned}$$

4. ระบบสมการผลต่างเชิงเส้นในข้อ (1) สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

โดยมีค่าเฉพาะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์คือ λ ที่ทำให้

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

หรือ ซึ่งให้ $\lambda_1 = 1$ และ $\lambda_2 = 2$ จากค่าเฉพาะแรกคือ $\lambda_1 = 1$ จะได้เวคเตอร์เฉพาะคือ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้น $v_1 = 0$ ดังนั้นหากให้ v_2 เป็นตัวแปรอิสระจะได้เวคเตอร์เฉพาะของ $\lambda_1 = 1$ คือ

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} s, s \in \mathbb{R}$$

จากค่าเฉพาะที่สองคือ $\lambda_2 = 2$ จะได้เวคเตอร์เฉพาะคือ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้น $v_1 = v_2$ ดังนั้นหากให้ v_2 คือ ตัวแปรอิสระจะได้เวคเตอร์เฉพาะของ $\lambda_2 = 2$ คือ

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} s, s \in \mathbb{R}$$

จากทฤษฎีบทว่าด้วยคำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้น จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 1^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

โดยค่าคงที่ คือ c_1, c_2 สามารถหาได้ระบบสมการข้างต้น หากได้มีการกำหนดค่าตั้งต้น x_0, y_0 ไว้ในข้อ (2) ระบบสมการผลต่างเชิงเส้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

โดยมีค่าเฉพาะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์คือ λ ที่ทำให้

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ซึ่งมีสมการเฉพาะคือ $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ หรือ $(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$ ค่าเฉพาะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์จึงเท่ากับ $\lambda_1 = 1$ และ $\lambda_2 = -2$ จากค่าเฉพาะแรกคือ $\lambda_1 = 1$ จะได้เวคเตอร์เฉพาะคือ

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการ $v_1 + 2v_2 = 0$ และหากให้ v_2 คือตัวแปรอิสระจะได้เวคเตอร์เฉพาะในรูป

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} s, s \in \mathbb{R}$$

จากค่าเฉพาะค่าที่สองคือ $\lambda_2 = -2$ จะได้เวคเตอร์เฉพาะคือ

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการ $v_1 = v_2$ และหากให้ v_2 คือ ตัวแปรอิสระจะได้เวคเตอร์เฉพาะในรูป

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} s, s \in \mathbb{R}$$

จากทฤษฎีบทว่าด้วยคำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้น จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 1^n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(-2)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

โดยค่าคงที่คือ c_1, c_2 สามารถหาได้ระบบสมการข้างต้น หากได้มีการกำหนดค่าตั้งต้น x_0, y_0 ไว้ ในข้อสุดท้าย ระบบสมการผลต่างเชิงเส้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

ทั้งนี้มีข้อสังเกตว่า เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการผลต่างเชิงเส้นข้างต้น คือ เมตริกซ์ในข้อที่ (4) ของคำถามข้อแรก ซึ่งเมื่อนำผลลัพธ์เกี่ยวกับค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะ ที่คำนวณไว้ได้ก่อนนี้แล้ว มาใช้ประกอบกับทฤษฎีบทว่าด้วยคำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้น จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = c_2 1^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 2^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

โดยค่าคงที่ คือ c_2, c_3 สามารถหาได้ระบบสมการข้างต้น หากได้มีการกำหนดค่าตั้งต้น x_0, y_0, z_0 ไว้

5. จากเมตริกซ์มาร์คอฟในข้อ (1) คือ

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

โดยผลแห่งทฤษฎีบทที่ว่า ค่าเฉพาะค่าหนึ่งของเมตริกซ์มาร์คอฟจะเท่ากับ 1 และจากทฤษฎีบทที่ว่า ผลรวมของค่าเฉพาะทั้งหมดของเมตริกซ์จะเท่ากับเทรส ดังนี้ ค่าเฉพาะอีกค่าหนึ่งจึงเท่ากับ -0.2 และโดยที่ $\lim_{n\to\infty}(-0.2)^n = 0$ พจน์ใดๆ ของคำตอบของระบบสมการผลต่างเชิงเส้นที่คูณด้วยค่าเฉพาะที่ต่ำกว่า 1 จึงมีค่าเข้าสู่ 0 ที่ดุลยภาพ ดังนี้ ดุลยภาพระยะยาวของความน่าจะ

เป็นจึงเท่ากับ

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_k \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{u}_1$$

เมื่อ $\pi_1, \ldots, \pi_k$ คือ ความน่าจะเป็นของสถานะที่เป็นไปได้ทั้งหมดทั้งสิ้น k ประการ $\boldsymbol{u}_1$ คือเวคเตอร์เฉพาะของค่าเฉพาะที่เท่ากับ 1 ของเมตริกซ์มาร์คอฟ และ c_1 คือ ค่าคงที่ ที่ใช้ปรับให้ค่าของ $\boldsymbol{u}_1$ สอดคล้องกับคุณสมบัติของความน่าจะเป็นที่ว่า $\sum_{i=1}^{k} \pi_i = 1$ ดังนั้น จากเมตริกซ์มาร์คอฟข้างต้น สำหรับค่าเฉพาะคือ $\lambda_1 = 1$ จะได้เวคเตอร์เฉพาะคือ

$$\begin{pmatrix} -0.6 & 0.6 \\ 0.6 & -0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงเส้น $v_1 = v_2$ ซึ่งให้เวคเตอร์เฉพาะในรูป

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} s, s \in \mathbb{R}$$

ในกรณีนี้เมื่อได้ใช้ c_1 ปรับให้ค่าภายในเวคเตอร์เฉพาะรวมกับเท่ากับ 1 แล้วจะได้ดุลยภาพระยะยาวของความน่าจะเป็นคือ

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

ในข้อที่ (2) โดยที่เวคเตอร์เฉพาะ ของค่าเฉพาะของเมตริกซ์ที่เท่ากับ 1 คือ

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 0.1 \\ 0.5 & -0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

สอดคล้องกับสมการเชิงเส้น $5v_1 - v_2 = 0$ ซึ่งหากให้ v_2 เป็นตัวแปรอิสระจะได้เวคเตอร์เฉพาะในรูป

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} s, s \in \mathbb{R}$$

ในกรณีนี้ ค่า c_1 ที่ทำให้ผลรวมของค่าในเวคเตอร์เฉพาะเท่ากับ 1 คือ $\frac{1}{6}$ ซึ่งให้ ดุลยภาพระยะยาว

ของความน่าจะเป็นคือ

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 5/6 \end{pmatrix}$$

ในข้อที่ (3) เวคเตอร์เฉพาะของค่าเฉพาะของเมตริกซ์ที่เท่ากับ 1 คือ

$$\begin{pmatrix} p-1 & 1-q \\ 1-p & q-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้น

$$(p-1)v_1 + (1-q)v_2 = 0$$
$$(1-p)v_1 + (q-1)v_2 = 0$$

จากระบบสมการข้างต้น จะเห็นได้ว่าสมการแรกและสมการที่สองไม่เป็นอิสระระหว่างกัน เนื่องจากสมการที่สองจะเท่ากับ -1 คูณกับสมการแรก ซึ่งคำตอบของระบบสมการที่ได้จากสมการใดสมการหนึ่งจะเท่ากับ

$$v_1 = \left(\frac{1-q}{1-p}\right) v_2$$

จากค่าคงที่ c_1 จะสามารถปรับให้ผลรวมของค่าในเวคเตอร์เฉพาะเท่ากับ 1 ได้ กล่าวคือ $v_1 = 1 - v_2$ ซึ่งให้ดุลยภาพระยะยาวของความน่าจะเป็นคือ

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{1+s} \\ \frac{1}{1+s} \end{pmatrix}$$

เมื่อ

$$s = \left(\frac{1-q}{1-p}\right)$$

คำตอบที่ได้ข้างต้น สามารถใช้ตรวจสอบคำตอบที่ได้จากคำถามสองข้อแรก โดยในข้อที่ (1) ที่ $p = q = 0.4$ จะได้ $s = 1$ ซึ่งให้ดุลยภาพระยะยาวคือ $\pi_1 = \pi_2 = 0.5$ เสมอ โดยดุลยภาพระยะยาวที่เท่ากันนี้จะเกิดขึ้นเสมอในทุกกรณีที่ $p = q$ และในข้อที่ (2) ที่ $p = 0.5$ และ $q = 0.9$ จะได้ $s = 0.2$ ซึ่งให้คำตอบคือ $\pi_1 = 1/6$ และ $\pi_2 = 5/6$ ตรงกับคำตอบที่ได้ก่อนนี้

6. หากนำสมการสุดท้าย $s_t = i_t$ ไปแทนในสมการแรก จะได้ว่า $i_t = ay_t$ และเมื่อนำไปแทนใน

สมการที่สอง จะได้ว่า

$$ay_t = by_t - by_{t-1}$$

กล่าวคือ

$$y_t = \frac{b}{b-a} y_{t-1}$$

ซึ่งหากแทนค่าซ้ำกันเรื่อยๆ จะได้คำตอบของระบบสมการ คือ

$$y_t = \left(\frac{b}{b-a}\right)^t y_0$$

ทั้งนี้ เงื่อนไข $b > a$ เป็นเงื่อนไขจำเป็น ที่ทำให้คำตอบของระบบสมการ คือ รายได้ประชาชาติมีค่าเป็นบวก และจากการพิจารณาคำตอบของระบบสมการ โดยที่

$$\frac{dy_t}{da} = \frac{b}{(b-a)^2} A > 0; \frac{dy_t}{db} = \frac{-a}{(b-a)^2} A < 0$$

เมื่อ $A = t\left(\frac{b}{b-a}\right)^{t-1} y_0 > 0$ ระดับรายได้ประชาชาติในตัวแบบนี้ จึงเพิ่มขึ้นตามสัดส่วนการออม ต่อรายได้ประชาชาติในแต่ละปี (a) แต่ลดลงตามสัดส่วนการลงทุนต่อส่วนต่างรายได้ประชาชาติ (b) ผลลัพธ์ที่อาจค้านกับสามัญสำนึกเช่นนี้ ส่วนหนึ่งเป็นรูปแบบความสัมพันธ์อย่างง่ายในตัวแบบ ที่ไม่ได้พิจารณาผลกระทบจากการลงทุน ที่มีต่อรายได้ประชาชาติแต่อย่างใด

บทที่ 4 เรขาคณิตของเวคเตอร์

1. จาก $\boldsymbol{u}_1 = (1,2)$,$\boldsymbol{u}_2 = (1,2,3)$,$\boldsymbol{u}_3 = (1,2,4)$,$\boldsymbol{u}_4 = (3,4)$ ดังนั้น $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$,$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2$ และ $\parallel \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \parallel$ หาค่าไม่ได้เนื่องจากขนาดของ $\boldsymbol{u}_1$ และ $\boldsymbol{u}_2$ ไม่เท่ากัน $2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_4 = 2(1,2) + (3,4) = (5,8)$ $2(\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3) = 2(1(1) + 2(2) + 3(4)) = 34$ และ

$$\parallel \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 \parallel = \sqrt{(1-1)^2 + (2-2)^2 + (3-4)^2} = 1$$

2. จากข้อกำหนดในโจทย์ที่ให้เส้นตรงใน $\mathbb{R}^2$ ลากผ่านจุดสองจุดคือ $(1,0)$ และ $(3,2)$ จะได้สมการที่อธิบายเส้นตรงนี้ในรูป

$$x_2 = a + bx_1$$

เมื่อ a คือจุดตัดแกน x_2 ซึ่งอยู่ในระนาบแนวตั้ง และ b คือความชันของเส้นตรง จากสูตรของความ

ชันของเส้นตรงจะได้ว่า

$$b = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{2-0}{3-1} = \frac{2}{3}$$

การหาค่า a สามารถทำได้โดยการแทนค่า $(1, 0)$ หรือ $(3, 2)$ และค่า b ที่หาได้ลงในสมการที่อธิบายเส้นตรงข้างต้น เช่น หากใช้ค่า $(1, 0)$ จะได้

$$0 = a + \frac{2}{3}(1) \text{ หรือ } a = -\frac{2}{3}$$

สำหรับการเขียนสมการที่อธิบายเส้นตรงเดียวกัน ในรูปของจุดที่เส้นตรงลากผ่านหนึ่งจุด $\boldsymbol{x}_0$ และทิศทางที่เส้นตรงชี้ไปคือ $\boldsymbol{v}$ นั้น สิ่งเดียวที่จำเป็นต้องคำนวณจากข้อมูลในโจทย์ คือ การหาว่าเส้นตรงซึ่งลากผ่านจุด $(1, 0)$ และ $(3, 2)$ ชี้ไปในทิศทางเดียวกับเวคเตอร์ $\boldsymbol{v}$ ใดจากจุดกำเนิด $(0, 0)$ ในการนี้จากค่าความชันที่หาได้ข้างต้น จะได้ว่าเส้นตรงที่ลากจากจุดกำเนิดซึ่งมีความชัน คือ $\frac{2}{3}$ นั้น จะทาบไปกับเวคเตอร์จากจุดกำเนิด $\boldsymbol{v} = (1, \frac{2}{3})$ ซึ่งให้สมการอธิบายเส้นตรง ในรูปของจุดที่เส้นตรงลากผ่านหนึ่งจุด $\boldsymbol{x}_0$ และทิศทางที่เส้นตรงชี้ไปคือ $\boldsymbol{v}$ เท่ากับ

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v} = (1, 0) + t(1, \frac{2}{3}) = (3, 2) + t(1, \frac{2}{3})$$

เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ คือ ค่าพารามิเตอร์ที่สามารถใช้ขยาย ย่อ หรือกลับทิศทางของเส้นตรงดังกล่าว จากสมการข้างต้นจะเห็นได้ว่า หากให้ $\boldsymbol{x}_0 = (1, 0)$ จะได้ว่า $\boldsymbol{x}(0) = (1, 0) + 0(1, \frac{2}{3})$ และหากให้ $\boldsymbol{x}_0 = (3, 2)$ จะได้ว่า $\boldsymbol{x}(0) = (3, 2) + 0(1, \frac{2}{3})$ ในการพิจารณาว่าจุด $(5, 4)$ อยู่บนเส้นตรงนี้หรือไม่นั้น สามารถทำได้โดยการหาค่า t ที่ทำให้

$$(5, 4) = (1, 0) + t(1, \frac{2}{3})$$

ซึ่งจากการคำนวณโดยใช้ค่าในพิกัดแรก จะได้ว่า $5 = 1 + t$ หรือ $t = 4$ แต่จากการคำนวณโดยใช้ค่าในพิกัดหลัง จะได้ว่า $4 = \frac{2t}{3}$ หรือ $t = 6$ จึงสรุปได้ว่าจุด $(5, 4)$ ไม่ได้อยู่บนเส้นตรงนี้ และสำหรับส่วนสุดท้ายของคำถาม คือ หากต้องการให้จุด $(-1, s)$ อยู่บนเส้นตรงนี้ s จะต้องมีค่าเป็นเท่าใดนั้น หากนำ $(-1, s)$ ไปแทนที่ในสมการกำหนดเส้นตรงจะได้ว่า

$$(-1, s) = (1, 0) + t(1, \frac{2}{3})$$

จากค่าในพิกัดแรกจะได้ว่า $t = -2$ จากนั้นเมื่อนำ $t = -2$ ไปแทนค่าในพิกัดหลังจะได้ว่า

$s = -\frac{4}{3}$ อนึ่ง ในการหาเวคเตอร์ $\boldsymbol{v}$ นั้น สามารถพิจารณาได้โดยตรง จากข้อเท็จจริงเกี่ยวกับการลบกันของเวคเตอร์ที่ว่า เส้นตรงที่ลากผ่านจุด $\boldsymbol{x}_0$ และ $\boldsymbol{x}_1$ จะชี้ไปในทิศทางเดียวกับเวคเตอร์ $(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)$ ดังนั้น ในกรณีนี้จะได้สมการที่อธิบายเส้นตรงที่ลากผ่านจุด $\boldsymbol{x}_0 = (1,0)$ และ $\boldsymbol{x}_1 = (3,2)$ เท่ากับ

$$\boldsymbol{x}(t) = (1,0) + t(3-1, 2-0) = (1,0) + t(3,2)$$

ซึ่งเทียบเคียงกันได้กับ $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v} = (1,0) + t(1, \frac{2}{3})$

3. การอธิบายเส้นตรงใน $\mathbb{R}^3$ หรือใน $\mathbb{R}^n$ เมื่อ $n > 2$ ด้วยสมการในลักษณะจุดตัดแกนและความชันนั้น เป็นสิ่งที่ทำได้ยากกว่าการอธิบายเส้นตรงใน $\mathbb{R}^2$ ด้วยวิธีการเดียวกัน เนื่องจากมีประเด็นเพิ่มเติมให้ต้องกำหนด เกี่ยวกับแกนที่จะกำหนดจุดตัด และนิยามเกี่ยวกับความชันในมิติที่มากกว่า 2 อย่างไรก็ตาม การอธิบายเส้นตรงในมิติใดๆ ด้วยวิธีกำหนดจุดหนึ่งจุดที่เส้นตรงลากผ่าน และทิศทางของเส้นตรง จะสามารถขยายแนวคิดจากเส้นตรงใน $\mathbb{R}^2$ ได้โดยง่าย โดยสำหรับคำถามข้อนี้ จากโจทย์ที่กำหนดให้เส้นตรงใน $\mathbb{R}^3$ ลากผ่านจุดสองจุดคือ $\boldsymbol{x}_0 = (1,1,2)$ และ $\boldsymbol{x}_1 = (3,2,1)$ จะได้สมการที่กำหนดเส้นตรงดังกล่าว คือ

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) = (1,1,2) + t(2,1,-1)$$

เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ และหากต้องการให้จุด $(r, 0, s)$ อยู่บนเส้นตรงนี้ จากพิกัดที่สอง จะได้ว่า $0 = 1 + t$ หรือ $t = -1$ และเมื่อแทนค่า $t = -1$ จะได้ว่าจากพิกัดแรก $r = 1 - 2 = -1$ และจากพิกัดที่สามจะได้ว่า $s = 2 + 2 = 4$

4. จากข้อ 2 จะได้สมการที่อธิบายเส้นตรง ที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดคือ $\boldsymbol{x}_0 = (1,0)$ และ $\boldsymbol{x}_1 = (3,2)$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\ell(t) = t\boldsymbol{x}_0 + (1-t)\boldsymbol{x}_1 = t(1,0) + (1-t)(3,2)$$

เมื่อ $0 \le t \le 1$ โดยมีจุดกึ่งกลางซึ่งหาได้จากการกำหนดให้ $t = \frac{1}{2}$ เท่ากับ

$$p(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1,0) + \frac{1}{2}(3,2) = (2,1)$$

จากข้อ 3 จะได้สมการที่อธิบายเส้นตรง ที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดคือ $\boldsymbol{x}_0 = (1,1,2)$ และ $\boldsymbol{x}_1 =$

$(3, 2, 1)$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\ell(t) = t\boldsymbol{x}_0 + (1-t)\boldsymbol{x}_1 = t(1, 1, 2) + (1-t)(3, 2, 1)$$

เมื่อ $0 \leq t \leq 1$ โดยมีจุดกึ่งกลางซึ่งหาได้จากการกำหนดให้ $t = \frac{1}{2}$ เท่ากับ

$$p(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1, 1, 2) + \frac{1}{2}(3, 2, 1) = (2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$$

5. จากข้อเท็จจริงที่ว่าเส้นตรงใน $\mathbb{R}^2$ ที่อยู่ในรูป $x_2 = ax_1 + b$ คือเส้นตรงที่ผ่านจุด $\boldsymbol{x}_0 = (0, b)$ ซึ่งชี้ไปในทิศทาง $\boldsymbol{v} = (1, a)$ ดังนั้น (1) $x_2 = x_1 - 1$ ซึ่งเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0, -1)$ และชี้ไปในทิศทาง $(1, 1)$ จึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูป $\boldsymbol{x}(t) = (0, -1) + t(1, 1)$ และ (2) $2x_1 + 3x_2 = 4$ ซึ่งเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0, \frac{4}{3})$ และชี้ไปในทิศทาง $(1, -\frac{2}{3})$ จึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูป $\boldsymbol{x}(t) = (0, \frac{4}{3}) + t(1, -\frac{2}{3})$

6. ในข้อ (1) จะได้ว่า $x_1 = 4 - t$ หรือ $t = 4 - x_1$ และ $x_2 = 3 + 3t$ หรือ $3t = x_2 - 3$ ซึ่งเมื่อนำค่า t ที่ได้จากทั้งสองสมการมาเท่ากันจะได้ว่า $12 - 3x_1 = x_2 - 3$ หรือสมการอธิบายเส้นตรงในรูปพิกัด (x_1, x_2) โดยที่ $3x_1 + x_2 = 15$ ในข้อ (2) จะได้ว่า $x_1 = 3t$ และ $x_2 = 5$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ ซึ่งให้เส้นตรง ที่ขนานไปกับระนาบแนวนอน ที่มีจุดตัดแกนตั้งที่ $x_2 = 5$ หรือสมการอธิบายเส้นตรงในรูปพิกัด (x_1, x_2) โดยที่ $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = 5$ ในข้อ (3) จะได้ว่า $x_1 = 1 - t$, $x_2 = 1 + t$ และ $x_3 = 2$ จากสองสมการแรกจะได้ว่า $1 - x_1 = x_2 - 1$ หรือ $x_1 + x_2 = 2$ ซึ่งให้สมการอธิบายเส้นตรงในรูปพิกัด (x_1, x_2, x_3) โดยที่ $x_1 + x_2 = 2, x_3 = 2$

7. จากข้อเท็จจริงที่ว่า หากเส้นตรงสองเส้นที่อธิบายได้ด้วยสมการ $\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{v}$ ตัดกันที่จุด $\boldsymbol{x}_2$ ดังนั้นจะต้องมีค่า $s, t \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $\boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{v}$

(1) สมมติให้ $\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{x}(t)$ ดังนั้น $(1, 2, 1) + s(-6, 10, 2) = (-1, 3, 1) + t(2, -8, -2)$ หรือ

$$\begin{aligned} 1 - 6s &= -1 + 2t \\ 2 + 10s &= 3 - 8t \\ 1 + 2s &= 1 - 2t \end{aligned}$$

ซึ่งอยู่ในรูปผลคูณของเมตริกซ์คือ

$$\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 10 & 8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยายของระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น สามารถลดรูปให้อยู่ในรูปการจัดแถวแบบเรียงลำดับคือ

$$\left(\begin{array}{rr|r} -6 & -2 & -2 \\ 10 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ซึ่งให้คำตอบคือ $s = \frac{1}{2}$ และ $t = -\frac{1}{2}$ และโดยที่มีค่า s, t ที่สอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น เส้นตรงทั้งสองจึงตัดกันหนึ่งจุดโดยการหาจุดตัด สามารถทำได้โดยการแทนค่า $s = \frac{1}{2}$ ลงใน $\boldsymbol{x}(s)$ หรือ $t = -\frac{1}{2}$ ลงใน $\boldsymbol{x}(t)$ ข้างต้น ซึ่งจะให้จุดตัดเท่ากับ $(-2, 7, 2)$

(2) สมมติให้ $\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{x}(t)$ ดังนั้น $(1, 2, -1) + s(-2, 4, 6) = (0, 1, 3) + t(4, 1, 0)$ ซึ่งเป็นระบบสมการเชิงเส้น 3 สมการ 2 ตัวแปรที่มีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยาย ของระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น ซึ่งสามารถลดรูปให้อยู่ในรูปการจัดแถวแบบเรียงลำดับ คือ

$$\left(\begin{array}{rr|r} -2 & -4 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} -2 & -4 & -1 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & -12 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

และโดยที่อันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ น้อยกว่าอันดับของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยาย ระบบสมการข้างต้นจึงไม่มีคำตอบ กล่าวคือ เส้นตรงทั้งสองเส้นจะไม่ตัดกันที่จุดใดๆ

(3) สมมติให้ $\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{x}(t)$ ดังนั้น $(4, -1, 5) + s(2, 0, 2) = (2, -7, 12) + t(0, -4, 6)$ ซึ่งเป็นระบบสมการเชิงเส้น 3 สมการ 2 ตัวแปรที่มีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยาย ของระบบสมการ

เชิงเส้นข้างต้น ซึ่งสามารถลดรูปให้อยู่ในรูปการจัดแถวแบบเรียงลำดับคือ

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 2 & -6 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ระบบสมการข้างต้นมีคำตอบคือ $s = -1$ และ $t = -\frac{3}{2}$ ซึ่งเมื่อนำไปแทนค่าใน $\boldsymbol{x}(s)$ หรือ $\boldsymbol{x}(t)$ แล้วแต่กรณีจะให้จุดตัดคือ $(2, -1, 3)$

8. การเขียนสมการอธิบายระนาบ จากสมการที่ไม่เป็นพาราเมตริกซ์ในรูป $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ ให้อยู่ในรูป $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$ สามารถทำได้ โดยการกำหนดจุด 3 จุด จากสมการคือ $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_n$ เป็นขั้นตอนแรก จากนั้นจึงเขียนสมการอธิบายระนาบ ให้อยู่ในรูป $\boldsymbol{x}(s,t) = \boldsymbol{x}_0 + s(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0)$ ซึ่งจะให้ระนาบที่ตัดผ่านจุด $\boldsymbol{x}_0$ ซึ่งแผ่ออกไปในทิศทาง $(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)$ และ $(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0)$ จากจุด $\boldsymbol{x}_0$ ในข้อที่ (1) สามารถกำหนดจุด 3 จุดบนระนาบจาก $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ได้โดยง่ายคือ $\boldsymbol{x}_0 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{x}_1 = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{x}_2 = (0, 0, 1)$ ดังนั้นจะได้สมการอธิบายระนาบในรูป $\boldsymbol{x}(s,t) = \boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$ คือ

$$\boldsymbol{x}(s,t) = (1, 0, 0) + s(-1, 1, 0) + t(-1, 0, 1)$$

ในข้อที่ (2) จากสมการ $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -6$ สามารถกำหนดจุดทั้งสามจุดบนระนาบได้เท่ากับ $\boldsymbol{x}_0 = (-6, 0, 0)$, $\boldsymbol{x}_1 = (0, -3, 0)$, $\boldsymbol{x}_2 = (0, 0, 2)$ ซึ่งให้สมการอธิบายระนาบในรูป $\boldsymbol{x}(s,t) = \boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$ คือ

$$\boldsymbol{x}(s,t) = (-6, 0, 0) + s(6, -3, 0) + t(6, 0, 2)$$

9. การเขียนสมการอธิบายระนาบ จากสมการพาราเมตริกซ์ในรูป $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$ ให้อยู่ในรูป $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ สามารถทำได้โดยการหาค่า s และ t จากแต่ละค่า x_1, x_2, x_3 ที่กำหนดได้จากสมการ จากนั้นจึงใช้ความสัมพันธ์ที่ได้ระหว่าง x_1, x_2, x_3 กำหนดขึ้นเป็นสมการ $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ ในท้ายที่สุด จากข้อ (1) $\boldsymbol{x}(s,t) = (1, 2, 1) + s(1, 1, 1) + t(-1, 1, 2)$

สามารถเขียนในรูประบบสมการเชิงเส้น คือ

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 + s - t \\
x_2 &= 2 + s + t \\
x_3 &= 1 + s + 2t
\end{aligned}
$$

ซึ่งหากจัดเรียงความสัมพันธ์ใหม่ให้ s และ t เป็นตัวแปรจะได้

$$
\begin{aligned}
s - t &= x_1 - 1 \\
s + t &= x_2 - 2 \\
s + 2t &= x_3 - 1
\end{aligned}
$$

หรือ

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix}
$$

ในกระบวนการแก้ระบบสมการเชิงเส้นเพื่อหาคำตอบ จะได้เมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยายซึ่งในรูป

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x_1 - 1 \\ 1 & 1 & x_2 - 2 \\ 1 & 2 & x_3 - 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x_1 - 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\left(-x_1 + x_2 - 1\right) \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}\left(-x_1 + x_3\right) \end{array}\right)
$$

จากความสัมพันธ์ในสองแถวล่างซึ่งต่างมีค่าเท่ากับ 1 จะได้ว่า

$$
\frac{-x_1 + x_2 - 1}{2} = \frac{-x_1 + x_3}{3}
$$

หรือสมการอธิบายระนาบแบบไม่ใช่พาราเมตริกซ์ ที่อยู่ในรูป $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ คือ

$$
-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3
$$

ในข้อ (2) จากสมการอธิบายระนาบแบบพาราเมตริกซ์ ที่ประกอบด้วย 4 ตัวแปรซึ่งอยู่ในรูป $\boldsymbol{x}(s,t) = (1,2,1,0) + s(1,1,1,-1) + t(-1,1,2,1)$ สมการดังกล่าวสามารถเขียนในรูปของระบบ

สมการเชิงเส้นคือ

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 + s - t \\
x_2 &= 2 + s + t \\
x_3 &= 1 + s + 2t \\
x_4 &= -s + t
\end{aligned}
$$

ทั้งนี้หากเปรียบกับข้อ (1) จะสามารถสังเกตได้ว่า ระบบสมการเชิงเส้นในข้อ (2) มีสมการสามแถวแรก เหมือนกับระบบสมการในข้อ (1) ทุกประการ ซึ่งหากจัดเรียงความสัมพันธ์ใหม่ให้ s และ t เป็นตัวแปรจะได้

$$
\begin{aligned}
s - t &= x_1 - 1 \\
s + t &= x_2 - 2 \\
s + 2t &= x_3 - 1 \\
-s + t &= x_4
\end{aligned}
$$

หรือ

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 - 1 \\ x_4 \end{pmatrix}
$$

ในกระบวนการแก้ระบบสมการเชิงเส้นเพื่อหาคำตอบ จะได้เมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยายซึ่งในรูป

$$
\left(\begin{array}{rr|c} 1 & -1 & x_1 - 1 \\ 1 & 1 & x_2 - 2 \\ 1 & 2 & x_3 - 1 \\ -1 & 1 & x_4 - 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|c} 1 & -1 & x_1 - 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\left(-x_1 + x_2 - 1\right) \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}\left(-x_1 + x_3\right) \\ 0 & 0 & x_1 + x_4 - 1 \end{array}\right)
$$

จากความสัมพันธ์ในสองแถวล่างซึ่งต่างมีค่าเท่ากับ 1 จะได้ว่า

$$
\frac{-x_1 + x_2 - 1}{2} = \frac{-x_1 + x_3}{3}
$$

หรือ

$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3$$

ซึ่งหากนำเอาความสัมพันธ์ในแถวล่างสุดบวกเพิ่มเข้าไป จะได้สมการอธิบายระนาบแบบไม่ใช่พาราเมตริกซ์ ที่อยู่ในรูป $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ คือ

$$3x_2 - 2x_3 + x_4 = 4$$

โดยในกรณีนี้ $a_1 = 0$

10. จากข้อเท็จจริงที่ว่าระนาบบนใดๆ ในรูป $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - b = 0$ และ $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n - d = 0$ จะตัดกันก็ต่อเมื่อ $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - b = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n - d$ ดังนั้น จากข้อ (1) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$ และ $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4$ จะตัดกันก็ต่อเมื่อ $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_1 - 2x_2 - 3x_3$ หรือ $2x_2 + 3x_3 = 0$ ในกรณีนี้ระนาบสองระนาบ ดังที่กำหนดด้วยสมการทั้ง 2 สมการจะตัดกันเป็นเส้นตรง ที่เป็นไปตามสมการ $2x_2 + 3x_3 = 0$ ในข้อ (2) หากนำเอา 2 คูณเข้าด้วยสมการแรกจะได้ว่า $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 8$ ในกรณีนี้ระนาบทั้งสองจะไม่มีจุดตัดใดๆ ข้อสรุปนี้สามารถพิสูจน์โดยง่าย ด้วยการพิสูจน์แบบย้อนแย้ง เนื่องจากหากระนาบทั้งสองตัดกันแล้ว เมื่อนำสมการแรกที่ถูกคูณด้วย 2 มาเท่ากับสมการที่สองแล้วจะได้ว่า $8 = 10$ ซึ่งเป็นผลที่ย้อนแย้งกับความเป็นจริง

11. จุดตัดของระนาบ $x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$ และ $x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$ คือ คำตอบของระบบสมการ 2 สมการและ 3 ตัวแปร ซึ่งมีเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบขยายคือ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

หากให้ x_3 คือตัวแปรอิสระคือ $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $x_2 = 1 - 3x_3$ และ $x_1 = 1 + 5x_3$ คำตอบของระบบสมการข้างต้น คือ สมการกำหนดเส้นตรงที่เป็นจุดตัดของทั้งสองระนาบ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

12. ในข้อ (1) โดยที่ระนาบที่ตัดผ่านจุด $\boldsymbol{x}_0$ ซึ่งมีเวคเตอร์ปกติคือ $\boldsymbol{n}$ จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขคือ $0 = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ หรือ $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}_0$ ซึ่งอยู่ในรูป $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ ดังนั้น สมการ

กำหนดระนาบที่ตัดผ่านจุด $\boldsymbol{x}_0 = (1,2,1)$ และมีเวคเตอร์ปกติคือ $\boldsymbol{n} = (2,1,2)$ จึงเท่ากับ $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$ ในข้อ (2) การหาสมการกำหนดระนาบที่ตัดผ่านจุด $\boldsymbol{x}_0 = (-1,0,1)$ และตั้งฉากกับเส้น $\boldsymbol{x}(t) = (-1,3,1) + t(1,-1,1)$ นั้น โดยที่โจทย์ไม่ได้ให้เวคเตอร์ปกติมาก่อน จึงจำเป็นต้องหาเวคเตอร์ปกติให้ได้ก่อน ซึ่งสามารถทำได้โดยการกำหนดจุด 2 จุดซึ่งเส้นตรงนี้ลากผ่าน และจากข้อเท็จจริงที่ว่า จุดแต่ละจุดสามารถตีความอีกนัยหนึ่ง คือ เวคเตอร์จากจุดกำเนิด ส่วนต่างของเวคเตอร์จากจุดกำเนิดสองเส้น จึงเท่ากับเส้นตรงที่ลากจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งบนเส้นตรง ซึ่งเท่ากับเวคเตอร์ปกติในกรณีนี้ ดังนั้น สำหรับเส้นตรง $\boldsymbol{x}(t) = (-1,3,1) + t(1,-1,1)$ หากให้ $t = 0$ จะได้ $\boldsymbol{x}(0) = (-1,3,1)$ และหากให้ $t = 1$ จะได้ $\boldsymbol{x}(1) = (0,2,2)$ ส่วนต่างของเวคเตอร์ทั้งสองคือ $\boldsymbol{x}(1) - \boldsymbol{x}(0) = (1,-1,1)$ จึงเป็นเวคเตอร์ปกติในกรณีนี้ จากความสัมพันธ์ $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}_0$ เมื่อ $\boldsymbol{n} = (1,-1,1)$ และ $\boldsymbol{x}_0 = (-1,0,1)$ จึงได้สมการกำหนดระนาบคือ $x_1 - x_2 + x_3 = 1$ ในข้อ (3) จากสมการกำหนดระนาบคือ $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ ซึ่งจากเงื่อนไขที่ว่าระนาบนี้จะต้องตัดผ่าน $(\alpha,0,0)$,$(0,\beta,0)$,$(0,0,\gamma)$ จึงสรุปได้ว่า $a_1 = \frac{b}{\alpha}, a_2 = \frac{b}{\beta}, a_3 = \frac{b}{\gamma}$ เมื่อ $b \in \mathbb{R}$

13. เซต V เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ ก็ต่อเมื่อมีคุณสมบัติ 2 ประการ คือ ในประการแรก หากให้ $u, v \in V$ จะได้ว่า $(u + v) \in V$ และในประการที่สอง หากให้ $u \in V$ และ r คือค่าสเกลาร์ จะได้ว่า $ru \in V$

(1) เนื่องจาก $(x_1,0) + (x_2,0) = (x_1 + x_2, 0) \in \{(x,y)|y = 0\}$ และ $r(x_1,0) = (rx_2,0) \in \{(x,y)|y = 0\}$ ดังนั้นเซตในข้อนี้เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$

(2) เนื่องจาก $(a,y_1)+(a,y_2) = (2a, y_1+y_2) \notin \{(x,y)|x = a, a > 0\}$ และ $r(a,y_1) = (ra, ry_1) \notin \{(x,y)|x = a, a > 0\}$ ดังนั้นเซตในข้อนี้ไม่ใช่ปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$

(3) การพิสูจน์ในข้อนี้สามารถทำได้ง่าย โดยการยกตัวอย่างที่ทำให้คุณสมบัติข้อใดข้อหนึ่ง ของการเป็นปริภูมิย่อย ในปริภูมิแบบยูคลิเดียนไม่เป็นจริง เช่น สำหรับค่า $a = 1$ จะได้ว่า $(0,1)$ และ $(1,0)$ ต่างเป็นสมาชิกของเซตนี้ แต่ $(0,1) + (1,0) = (1,1)$ ไม่ใช่สมาชิกของเซตนี้ ซึ่งเป็นการฝืนคุณสมบัติข้อแรก จึงสามารถสรุปได้ว่าเซตในข้อนี้ ไม่ใช่ปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$

(4) จาก $\{(x,y)|ax + by = 0; a, b \neq 0\}$ ดังนั้น $y = -\frac{a}{b}x$ สำหรับ (x_1,y_1) และ (x_2,y_2) ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัตินี้ จะได้ว่า $y_1 + y_2 = -\frac{a}{b}(x_1 + x_2)$ และ $ry_1 = -\frac{a}{b}(rx_1)$ ซึ่งต่างก็สอดคล้องกับคุณสมบัตินี้เช่นกัน ดังนั้นเซตในข้อนี้เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$

(5) จาก $\{(x,y)|ax + by = c; a, b, c \neq 0\}$ ดังนั้น $y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$ สำหรับ (x_1,y_1) และ

(x_2, y_2) ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัตินี้ จะเห็นได้ว่า $y_1 + y_2 = \frac{2c}{b} - \frac{a}{b}(x_1 + x_2)$ อีกทั้ง $ry_1 = \frac{rc}{b} - \frac{a}{b}(rx_1)$ ซึ่งไม่สอดคล้องกับคุณสมบัตินี้หาก $c \neq 0$ ดังนั้นเซตในข้อนี้จึงไม่ใช่ปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$

14. การหาฐานของปริภูมิแถวของเมตริกซ์ สามารถทำได้โดยการลดรูปเมตริกซ์ ให้อยู่ในรูปการจัดแถวแบบเรียงลำดับ จากนั้นจึงนับเอาเฉพาะแต่แถว ที่ไม่ได้มีทุกค่าเป็นศูนย์ เข้าเป็นฐานของปริภูมิแถวของเมตริกซ์นั้น อนึ่ง หากได้พิจารณาคุณสมบัติของฐานของปริภูมิใดๆ ว่าพึงมีคุณ-สมบัติสองประการ คือ ส่วนผสมเชิงเส้นของฐานจะต้องสร้างปริภูมินั้นได้ และจะต้องไม่มีแถวใดในฐานที่ไม่เป็นอิสระระหว่างกัน การลดรูปเมตริกซ์ให้อยู่ในรูปการจัดแถวแบบเรียงลำดับ จึงถือเป็นการตัดเอาแถวที่ไม่เป็นอิสระระหว่างกันออก ซึ่งนำไปสู่ผลลัพธ์สุดท้าย คือ แถวที่เหลืออยู่ที่ประกอบกันเป็นฐานของปริภูมิแถวของเมตริกซ์

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ฐานของปริภูมิแถวจึงเท่ากับ $(1, 2)$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ฐานของปริภูมิแถวจึงเท่ากับ $(1, 2)$ และ $2, 5)$

(3) $\begin{pmatrix} a & b \\ 2a & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c - 2b \end{pmatrix}$ ฐานของปริภูมิแถวจึงเท่ากับ (a, b) หาก $c - 2b = 0$ และเท่ากับ (a, b) และ $(0, c - 2b)$ หาก $c - 2b \neq 0$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ ฐานของปริภูมิแถวจึงเท่ากับ $(1, 2, 3)$ และ $(0, -1, -6)$

15. การหาฐานของปริภูมิคอลัมน์ของเมตริกซ์ สามารถทำได้โดยการลดรูปเมตริกซ์ให้อยู่ในรูปการจัดแถวแบบเรียงลำดับ จากนั้นจึงนับเอาเฉพาะแต่คอลัมน์ที่มีจุดหมุน

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ฐานของปริภูมิคอลัมน์จึงเท่ากับ $(1, 2)$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ฐานของปริภูมิคอลัมน์จึงเท่ากับ $(1, 2)$ และ $(2, 5)$

(3) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b+1 & 2c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ฐานของปริภูมิคอลัมน์จึงเท่ากับ $(a, 2a)$ และ $(b, 2b+1)$

16. จากระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร 3 สมการ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &= b_3 \end{aligned}$$

(1) สมการแต่ละสมการซึ่งเป็นสมการ 2 ตัวแปรข้างต้น เปรียบได้กันเส้นตรงในระนาบ 2 มิติ โดยมีสัมประสิทธิ์ a_{ij} และ b_i เมื่อ $i = 1, 2, 3$ และ $j = 1, 2$ เป็นตัวกำหนดความชันและจุดตัดของเส้นตรงแต่ละเส้น อย่างไรก็ดีหาก $a_{ij} = 0$ แต่ $b_i \neq 0$ นั้น ฝั่งซ้ายของสมการจะเท่ากับ 0 เสมอไม่ว่า x_1, x_2 จะเป็นค่าใดๆ ก็ตาม ซึ่งย่อมไม่เท่ากับฝั่งขวาคือ $b_i \neq 0$ กรณีดังกล่าวจึงเป็นกรณีที่สมการใดสมการหนึ่ง ไม่อาจแทนค่าด้วยเส้นตรงใดๆ ใน $\mathbb{R}^2$ ได้

(2) เส้นตรง 3 เส้นที่ขนานกันเปรียบได้กับเส้นตรง 3 เส้นที่มีความชันเท่ากัน แต่มีจุดตัดแกนต่างกัน กรณีนี้เกิดขึ้นหาก $a_{11} = sa_{21} = ta_{31}$ และ $a_{12} = sa_{22} = ta_{32}$ แต่ $b_1 \neq sb_2 \neq tb_3$ เมื่อ $s, t \in \mathbb{R}$ กรณีนี้จัดเป็นกรณีหนึ่ง ที่ระบบสมการไม่มีคำตอบ

(3) เส้นตรง 2 เส้นในระนาบ 2 มิติที่มีความชันต่างกัน จะตัดกันและตัดกันจุดเดียวเสมอ เงื่อนไขเกี่ยวกับความชันที่ต่างกันนั้น เปรียบได้กับตัวกำหนดของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่ไม่เท่ากับ 0 ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่ระบบสมการที่ประกอบด้วย 2 สมการและ 2 ตัวแปรจะมีคำตอบเพียงชุดเดียว จากระบบสมการข้างต้นซึ่งประกอบด้วย 3 สมการและ 2 ตัวแปร เงื่อนไขที่เส้นตรงทั้ง 3 เส้นมีความชันไม่เท่ากัน และตัดกันที่จุดเดียวกัน จึงสามารถจำแนกออกได้เป็นส่วนๆ คือ ก. เงื่อนไขที่เส้นตรงทั้ง 3 เส้นมีความชันไม่เท่ากัน ซึ่งเท่ากับการที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์จากการจับคู่แต่ละสมการเข้าด้วยกันจะต้องมีตัวกำหนดที่ไม่เท่ากับ 0 กล่าวคือ เงื่อนไขที่เส้นตรงจากสมการที่หนึ่งและที่สอง มีความชันไม่เท่ากันคือ $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ เงื่อนไขที่เส้นตรงจากสมการที่สองและที่สาม มีความชันไม่เท่ากันคือ $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \neq 0$ และเงื่อนไขที่เส้นตรงจากสมการที่หนึ่งและที่สาม มีความชันไม่เท่ากันคือ $a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} \neq 0$ ข. เงื่อนไขที่เส้นตรงทั้ง 3 เส้นไม่ได้ตัดกันที่จุดเดียวกัน ซึ่งเท่ากับกรณีอื่นๆ ที่นอกเหนือจากกรณีที่เส้นตรงทั้ง 3 เส้นตัดกันที่จุดเดียวกัน โดยจากนิยาม x_1 และ x_2 จะเป็นคำตอบของระบบสมการ ก็ต่อเมื่อหากนำ x_1 และ x_2 ไปแทนในแต่ละสมการจะทำให้สมการทุกสมการในระบบเป็นจริง ดังนั้น หากพิจารณาสมการที่หนึ่ง และสองของระบบ

สมการ คำตอบของระบบของสมการ จากกฎของคราเมร์จึงเท่ากับ

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}};$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}}$$

ซึ่งในกรณีที่เส้นตรงทั้งสามเส้น ตัดกันที่จุดเดียวกัน หากนำ x_1 และ x_2 ข้างต้นไปแทนค่าในสมการสุดท้าย จะต้องทำให้สมการสุดท้ายเป็นจริง เส้นตรงทั้งสามเส้นจึงไม่ได้ตัดกันที่จุดเดียวกันก็ต่อเมื่อ

$$a_{31}\left(\frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}}\right) + a_{32}\left(\frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}}\right) \neq b_3$$

(4) จากรายละเอียดในข้อ (3) เงื่อนไขที่ทำให้เส้นตรง 3 เส้นที่มีความชันไม่เท่ากัน ตัดกันที่จุดเดียวกัน คือ ก. เงื่อนไขที่เส้นตรงทั้ง 3 เส้นมีความชันไม่เท่ากัน คือ $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$; $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \neq 0$; $a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} \neq 0$ และ ข. เงื่อนไขที่เส้นตรงทั้ง 3 เส้นตัดกันที่จุดเดียวกัน คือ

$$a_{31}\left(\frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}}\right) + a_{32}\left(\frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}}\right) = b_3$$

(5) ในกรณีนี้อาจพิจารณากรณีเฉพาะที่สมการที่หนึ่ง และสองของระบบสมการ สร้างเส้นตรงที่ทาบกัน และสมการสุดท้ายสร้างเส้นตรงที่มีความชันไม่เท่ากัน กับเส้นตรงอีกสองเส้นแรก กล่าวคือ ก. เงื่อนไขที่สมการที่หนึ่ง และสองของระบบสมการสร้างเส้นตรงที่ทาบกัน เมื่อสมการที่สองเท่ากับค่าคงที่คูณกับสมการที่หนึ่ง หรือ $a_{11} = sa_{21}, a_{12} = sa_{22}, b_1 = sb_2$ และ ข. เงื่อนไขที่สมการที่สาม สร้างเส้นตรงที่มีความชันไม่เท่ากับเส้นตรงที่ถูกสร้างขึ้นจากสองสมการแรก คือ $a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} \neq 0$

(6) เงื่อนไขที่สร้างเส้นตรง 3 เส้นซึ่งทาบกันคือการที่สมการที่สอง และที่สามเกิดจากค่าคงที่คูณกับสมการที่หนึ่ง กล่าวคือ $a_{11} = sa_{12} = ta_{13}$; $a_{21} = sa_{22} = ta_{32}$; $b_1 = sb_2 = tb_3$ เมื่อ $s, t \in \mathbb{R}$

18. ในข้อนี้จะได้ตีความเวคเตอร์ในรูปของจุด ดังนั้น ในกรณีที่ (1) สมมติให้ $\boldsymbol{x}$ คือเวคเตอร์แสดงปริมาณสินค้าในตะกร้าอาหารทั้งหมด ในกรณีจะได้ว่า $\boldsymbol{x} = 10$ ซึ่งเป็นความสัมพันธ์แบบจุด (2) $\boldsymbol{x} = (10, 2, \ell)$ เมื่อ ℓ คือเงินที่เหลือจากการซื้อสินค้าทั้งหมด ความสัมพันธ์ในกรณีนี้จึงเป็นจุดในปริภูมิ 3 มิติ (3) สมมติให้ $\boldsymbol{x}$ และ $\boldsymbol{y}$ คือปริมาณสินค้าในตะกร้าของผู้บริโภครายที่หนึ่ง และสองตามลำดับ จะได้ว่า $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ เป็นความสัมพันธ์แบบจุด (4) สมมติให้ตะกร้าสินค้าประกอบด้วยสินค้าทั้งสิ้น k รายการ โดยมี x_i และ $p_i, i = 1, \ldots, k$ แทนปริมาณและราคาของสินค้า i ตามลำดับ ข้อความในข้อ (4) จึงสามารถแสดงในรูปสมการ คือ $p_1x_1 + \ldots + p_kx_k + \ell = m$ เมื่อ ℓ คือเงินที่เหลือจากการซื้อสินค้า และ m คือรายได้ของผู้บริโภค ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ในรูปของระนาบบน

ภาคผนวก ก คณิตศาสตร์เบื้องต้น

1. จาก $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}, C = \{1, 4, 5, 6\}$ และ $D = \{1\}$

(1) เนื่องจาก 3 เป็นสมาชิกตัวหนึ่งของ A ดังนั้น $3 \in A$ อย่างไรก็ตาม D ซึ่งมีสถานะเป็นเซตที่มีสมาชิกหนึ่งตัว คือ 1 ไม่ใช่สมาชิกของ A เนื่องจาก แม้ 1 จะเป็นสมาชิกตัวหนึ่งของ A แต่ $\{1\}$ ไม่ใช่สมาชิกตัวหนึ่งของ A สำหรับข้อนี้ หากเปลี่ยนให้ $D = 1$ และ $A = \{1, 2, 3\}$ ก็จะกล่าวได้ว่า $D \in A$ หรือหากให้ $D = \{1\}$ ดังเดิมแต่เปลี่ยนให้ $A = \{1, 2, 3, \{1\}\}$ ก็จะกล่าวได้ว่า $D \in A$ เช่นกัน ในประการต่อไป แม้เซตว่างคือ $\{\}$ จะเป็นเซตย่อยของทุกเซต แต่ไม่จำเป็นต้องเป็นสมาชิกของทุกเซต เว้นแต่เซตนั้นมีสมาชิกหนึ่งคือเซตว่าง ดังนั้น $\{\} \in A$ เป็นข้อความที่ผิด เนื่องจาก $A = \{1, 2, 3\}$ ซึ่งเป็นเซตที่ไม่มีสมาชิกใดเท่ากับเซตว่าง แต่ $\{\} \subset B$ เป็นข้อความที่ถูก จาก $A - B$ คือเซตที่มีสมาชิกคือสมาชิกที่อยู่ใน A ที่ไม่ได้อยู่ใน B ดังนั้น $A - B = \{1\} = D$ และเนื่องจากสมาชิกทุกตัวใน D เป็นสมาชิกใน C จึงสรุปได้ว่า $A - B \subset C$ ในประการสุดท้าย เนื่องจาก $B - A = \{4\}$ ซึ่งเป็นเซตที่มีสมาชิก 1 ตัว จำนวนสมาชิกของ $A - B$ จึงมากกว่าหรือเท่ากับจำนวนสมาชิกของ $B - A$

(2) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$;$C \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ดังนั้น $A \cap (C \cup B) = \{1, 2, 3\}$; $D - B = \{1\}$ ดังนั้น $\{1\} \times \{1, 2, 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$

2. สมมติให้ $\mathscr{U}$ คือ เซตของนายกรัฐมนตรีของไทยทั้งหมด ซึ่งอาจจำแนกออกเป็นเซตย่อยได้ตามเพศ คือ ผู้ที่เป็นเพศชาย (M) หรือไม่ใช่เพศชาย (M^c) ตามระดับการศึกษาสูงสุด คือ ปริญญาเอก (D) หรือไม่ใช่ปริญญาเอก (D^c) ตามสถานะว่าปัจจุบันยังคงมีชีวิตอยู่ (A) หรือเสียชีวิตไปแล้ว (A^c) และตามตำแหน่งในอดีตว่า เป็นรัฐมนตรีว่าการกระทรวงการคลังมาก่อน (F) เคยเป็นรัฐมนตรีว่าการกระทรวงมหาดไทยมาก่อน (I) หรือไม่เป็นรัฐมนตรีว่าการกระทรวงการคลัง หรือกระทรวงมหาดไทยมาก่อน $(F \cup I)^c$ จากการกำหนดเซตดังกล่าวจะได้ว่า

(1) หากนายกรัฐมนตรีที่เสียชีวิตไปแล้วทั้งหมด เป็นผู้ชาย ดังนั้น $A \subset M$

(2) หากนายกรัฐมนตรีที่เป็นผู้ชายบางคน จบการศึกษาสูงสุดระดับปริญญาเอก ดังนั้น $M \cap D \neq \{\}$

(3) หากนายกรัฐมนตรีทั้งหมดที่ไม่เคยเป็นรัฐมนตรีว่าการกระทรวงการคลัง หรือรัฐมนตรีว่าการกระทรวงมหาดไทยมาก่อน เป็นผู้ชาย ดังนั้น $(F \cup I)^c \subset M$

3. หากให้ $n(S)$ คือจำนวนสมาชิกของเซต S และหากให้ A, B, C แทนเซตของผู้ลงทุนในตลาดทองคำ ตลาดพันธบัตร และตลาดหลักทรัพย์ตามลำดับ จะได้ว่า จำนวนผู้ลงทุนในตลาดหลักทรัพย์ทั้งสามประเภท คือ $n(A \cap B \cap C) = 250$ จำนวนผู้ลงทุนในตลาดทองคำและตลาดพันธบัตรแต่ไม่ได้ลงทุนในตลาดหลักทรัพย์ คือ $n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) = 300$ จำนวนผู้ลงทุนในตลาดพันธบัตรและตลาดหลักทรัพย์ แต่ไม่ได้ลงทุนในตลาดทองคำ คือ $n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 150$ จำนวนผู้ลงทุนในตลาดทองคำและตลาดหลักทรัพย์ แต่ไม่ได้ลงทุนในตลาดพันธบัตร คือ $n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 50$ จำนวนผู้ลงทุนในตลาดทองคำอย่างเดียว คือ $n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 100$ จำนวนผู้ลงทุนในตลาดพันธบัตรอย่างเดียว คือ $n(B) - n(B \cap A) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 100$ และ จำนวนผู้ลงทุนในตลาดหลักทรัพย์อย่างเดียว คือ $n(C) - n(C \cap A) - n(A \cap B) + n(A \cap B \cap C) = 100$ ดังนี้ จะได้ว่า

(1) จำนวนผู้ลงทุนในตลาดทองคำ ซึ่งไม่ได้ลงทุนในตลาดพันธบัตร เท่ากับ

$$n(A) - n(A \cap B) = 700 - 550 = 150$$

(2) จากผลลัพธ์ที่ได้คำนวณข้างต้น จำนวนผู้ลงทุนในตลาดหลักทรัพย์เพียงตลาดเดียว คือ 100

(3) จากผลลัพธ์ที่ได้คำนวณข้างต้น จำนวนผู้ลงทุนในตลาดทองคำและตลาดหลักทรัพย์ แต่ไม่

ได้ลงทุนในตลาดพันธบัตรคือ 50

(4) จากคุณสมบัติของการยูเนียนของเซตที่ว่า $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ คุณสมบัติข้างต้น สามารถขยายไปสู่กรณีทั่วไป คือ การยูเนียนของเซต m เซต ได้ โดยในกรณีการยูเนียนของเซต 3 เซต จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

จากความสัมพันธ์ข้างต้น จำนวนผู้ลงทุนในตลาดใดตลาดหนึ่ง จากตลาดทองคำ ตลาดพันธบัตร หรือตลาดหลักทรัพย์จึงเท่ากับ

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= 700 + 800 + 750 - 550 - 400 - 300 + 250 \\ &= 1250 \end{aligned}$$

ซึ่งให้จำนวนผู้ลงทุน ที่ไม่ได้ลงทุนในตลาดใดตลาดหนึ่ง จากสามตลาดข้างต้นเท่ากับ 250

4. จาก $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= -c \\ x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \end{aligned}$$

และจากข้อเท็จจริงที่ว่า

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

หรือ

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

เมื่อนำทั้งสองสมการลบกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\\ x+\frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\\ x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{aligned}$$

ทั้งนี้มีข้อสังเกตว่า หากพิจารณารากที่เป็นทั้งจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน b^2-4ac จะมากกว่าหรือน้อยกว่า 0 ก็ได้ แต่ $a\neq 0$ เสมอ

5. การพิสูจน์อสมการของโคชีและชวาร์ซ (Cauchy-Schwarz inequality) ที่ว่า

$$(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2)$$

เมื่อ $a_1,\ldots,a_n$ และ $b_1,\ldots,b_n$ เป็นจำนวนจริงใดๆ เริ่มได้จากการสมมติให้

$$f(x)=(a_1x+b_1)^2+\ldots+(a_nx+b_n)^2$$

เมื่อ $a_1,\ldots,a_n$ และ $b_1,\ldots,b_n$ เป็นจำนวนจริงใดๆ จากฟังก์ชั่นข้างต้น สามารถสรุปได้โดยง่ายว่า โดยที่ $f(x)$ เป็นผลรวมของจำนวนกำลังสอง ซึ่งแต่ละจำนวนมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ดังนั้น $f(x)\ge 0$ จากนั้นเมื่อกระจายรูปกำลังสองของแต่ละจำนวนจะได้ว่า

$$\begin{aligned}f(x) &= a_1^2x^2+2a_1b_1x+b_1^2+\ldots+a_n^2x^2+2a_nb_nx+b_n^2\\ &= (a_1^2+\ldots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)x+(b_1^2+\ldots+b_n^2)\\ &= \alpha x^2+2\beta x+\gamma\end{aligned}$$

เมื่อ $\alpha\equiv a_1^2+\ldots+a_n^2; \beta\equiv a_1b_1+\ldots+a_nb_n; \gamma\equiv b_1^2+\ldots+b_n^2$ ทั้งนี้ สามารถสรุปอสมการที่ต้องการพิสูจน์ได้อีกครั้งหนึ่ง ในรูปของพารามิเตอร์ข้างต้นคือ

$$\beta^2\le\alpha\gamma$$

ในขั้นตอนต่อไป โดยที่คำตอบของ $f(x) = 0$ คือ

$$x = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma} = \frac{-\beta \pm 2\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\gamma}$$

ซึ่งมีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง 2 ค่าหาก $\beta^2 > \alpha\gamma$ แต่จะมีคำตอบเป็นจำนวนจริงค่าเดียว หาก $\beta^2 = \alpha\gamma$ และจะมีคำตอบเป็นเชิงซ้อน 2 ค่าหาก $\beta^2 < \alpha\gamma$ ดังนั้น การพิสูจน์อสมการที่ต้องการจึงเทียบได้กับการพิสูจน์ให้ได้ว่าคำตอบของ $f(x) = 0$ ไม่ได้มีคำตอบเป็นจำนวนจริง 2 ค่า ทั้งนี้โดยที่ได้เห็นเบื้องต้นแล้วว่า $f(x) \geq 0$ เสมอ อีกทั้งคำตอบของ $f(x) = 0$ จะหาได้ในกรณีเฉพาะที่ $a_1 = \ldots = a_n \equiv a$ และ $b_1 = \ldots = b_n \equiv b$ ซึ่งมีคำตอบคือ $x = -\frac{b}{a}$ เท่านั้น ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $\beta^2 < \alpha\gamma$ ซึ่งเท่ากับอสมการของโคชีและชวาร์ซ การพิสูจน์ที่ได้กล่าวมาแล้วนี้ สามารถแสดงให้เห็นภาพอย่างชัดเจนยิ่งขึ้นหากวาดกราฟของฟังก์ชั่น $f(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นพาราโบลาในระนาบสองมิติ ซึ่งมีแกนนอน คือ x และแกนตั้ง คือ $f(x)$ โดยรากของฟังก์ชั่นจะเท่ากับค่า x ที่ฟังก์ชั่น $f(x)$ ตัดกับแกนนอน อย่างไรก็ตาม โดยที่ $f(x) \geq 0$ เสมอ กราฟของฟังก์ชั่นดังกล่าว จึงอยู่ในรูปของพาราโบลาแบบหงายขึ้น ที่ต้องอยู่ในระดับไม่ต่ำกว่าแกนนอน โดยหากแตะแกนนอนจะมีคำตอบเพียงค่าเดียว ซึ่งเกิดขึ้นในกรณีที่ $\beta^2 = \alpha\gamma$ และหากอยู่พ้นแกนนอนจะมีคำตอบเป็นเชิงซ้อน 2 ค่าซึ่งเกิดขึ้นในกรณีที่ $\beta^2 < \alpha\gamma$

6. จากฟังก์ชั่น

$$f(x) = \ln(x+1)$$

หากขยาย $f(x)$ ด้วยวิธีการของเทเลอร์ที่ค่า $x = 0$ จะได้ค่าโดยประมาณคือ

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \ldots \\ &\approx 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots \\ &\approx \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \end{aligned}$$

ด้วยวิธีเดียวกันนี้ จากฟังก์ชั่น

$$g(x) = \frac{e^x}{\cos(x)}$$

จากนิยามของ e^x ที่ว่า

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

และจากฟังก์ชั่น $h(x) = \cos(x)$ ซึ่งหากขยายด้วยวิธีการของเทเลอร์ที่ค่า $x = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} h(x) = \cos(x) &\approx h(0) + \frac{1}{1!}h'(0)x + \frac{1}{2!}h''(0)x^2 + \dots \\ &\approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{aligned}$$

จากการประมาณการ $g(x)$ ด้วยวิธีการของเทเลอร์ที่ค่า $x = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} g(x) &\approx g(0) + \frac{1}{1!}g'(0)x + \frac{1}{2!}g''(0)x^2 + \frac{1}{3!}g'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}g''''(0)x^4 \\ &\approx \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 \dots \end{aligned}$$

เมื่อ $\beta_k = \frac{1}{k!}g^{(k)}(0)$ สำหรับค่า $k = 0, 1, 2, \dots$ ดังนั้นหากได้จัดเรียง $g(x) = \frac{e^x}{h(x)}$ ใหม่ให้อยู่ในรูป $e^x = g(x)h(x)$ จากนั้นจึงแทน $g(x)$ และ $h(x)$ ด้วยค่าที่ได้จากการประมาณการด้วยวิธีของเทเลอร์ข้างต้น จะได้ว่า

$$e^x \approx \left(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \dots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)$$

สำหรับประมาณการค่าของฟังก์ชั่นจนถึงอนุพันธ์ลำดับที่ 4 จะได้ว่า

$$e^x \approx \beta_0 + \beta_1 x + \left(\beta_2 - \frac{\beta_0}{2!}\right)x^2 + \left(\beta_3 - \frac{\beta_1}{2!}\right)x^3 + \left(\beta_4 - \frac{\beta_2}{2!} + \frac{\beta_0}{4!}\right)x^4 + \dots$$

ในการหาค่าคงที่ β_k สำหรับ $k = 0, \dots, 4$ สามารถนำค่า e^x ที่ได้จากการประมาณค่าข้างต้นมาเทียบนิยามของ e^x เป็นรายตัว กล่าวคือ จากนิยามของ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

ซึ่งให้ค่าของ β_k ในรูประบบสมการเชิงเส้นคือ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2!} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2!} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4!} & 0 & -\frac{1}{2!} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} \\ \frac{1}{1!} \\ \frac{1}{2!} \\ \frac{1}{3!} \\ \frac{1}{4!} \end{pmatrix}$$

ทั้งนี้ การแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง β_k ในรูปของเมตริกซ์ ที่ดูเหมือนจะค่อนข้างซับซ้อนนั้น เป็นไปโดยจุดประสงค์เพื่อต้องการแสดงรูปแบบของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ของระบบสมการเชิงเส้น ที่อาจต่อขยายไปได้เรื่อยๆ ในกรณี $k > 4$ อย่างไรก็ตาม ในการหาคำตอบของระบบสมการในกรณี $k = 4$ ดังข้างต้นนั้น สามารถทำได้โดยง่ายโดยวิธีการแทนค่า โดยจากสองสมการแรกจะได้ว่า $\beta_0 = \beta_1 = 1$ ดังนั้นจากสมการที่สามจึงได้ว่า $\beta_2 = 1$ และจากสมการที่สี่จึงได้ว่า $\beta_3 = \frac{2}{3}$ และจากสมการสุดท้ายจะได้ว่า $\beta_4 = \frac{1}{2}$ จากนั้นเมื่อแทนค่า β_k ทั้งหมด ในการประมาณค่าของ $g(x)$ ข้างต้น จะได้ว่า

$$g(x) \approx 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 \dots$$

ดังนั้นสำหรับการประมาณค่าของ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1.5)$ ด้วยผลข้างต้นที่อนุพันธ์ลำดับ 4 จะได้ค่าประมาณการคือ

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1.5) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} \approx 0.401$$

ซึ่งหากเทียบกับค่าของ $\ln(1.5) \approx 0.405$ จะเห็นได้ว่า ค่าที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธีการของเทเลอร์ ให้ผลค่อนข้างใกล้เคียงกัน และเช่นเดียวกันนี้ สำหรับการประมาณค่าของ $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{\cos(0.5)}$ ที่อนุพันธ์ลำดับ 4 จะได้ค่าประมาณการคือ

$$g\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{179}{96} \approx 1.865$$

ซึ่งใกล้เคียงกับค่าของ $\frac{\sqrt{e}}{\cos(0.5)} \approx 1.878$

7. การพิสูจน์ว่าหาก $f(x) = x^n$ ดังนั้น $f^{(n)}(x) = n!$ ในที่นี้ จะเป็นการพิสูจน์โดยการอุปนัย

เชิงคณิตศาสตร์ โดยสำหรับ $f(x) = x^n$ จะได้ว่า $f^{(1)}(x) = nx^{n-1}$ ดังนั้นหากให้

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$$

สำหรับ $k = 1, 2, \ldots$ เป็นจริงจะได้ว่า

$$f^{(k+1)} = n(n-1)\cdots(n-(k+1)+1)x^{n-(k+1)} = \frac{n!}{(n-(k+1))!}x^{n-(k+1)}$$

เป็นจริงด้วย เมื่อได้แสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ข้างต้นเป็นจริงในกรณีที่ $n = 1$ อีกทั้งยังได้แสดงให้เห็นว่า หากเป็นจริงในกรณี k แล้วจะเป็นจริงในกรณี $k+1$ แล้ว จึงอาจขยายผลลัพธ์จากความสัมพันธ์ข้างต้นไปได้เรื่อยๆ ในกรณีทั่วไป กล่าวคือ กรณีที่ $n = 1$ เป็นจริง กรณีที่ $n = 2$ เป็นจริง เช่นนี้ไปได้เรื่อยๆ จนถึงในกรณี n ทั่วไปกล่าวคือ

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} = n!$$

8. การหาอนุพันธ์ลำดับแรกและลำดับที่สองของ $f(x), g(x)$ และ $h(x)$ สามารถทำได้โดยตรงโดยใช้สูตรต่างๆ ทางอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้อง อันประกอบด้วยสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นที่อยู่ในรูปยกกำลัง เอกซ์โปเนนเชียล ล็อกการิธึม และสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นที่อยู่ในรูปผลบวก ผลต่าง ผลคูณ สัดส่วน หรือฟังก์ชั่นซ้อน ทั้งนี้ มีข้อสำคัญที่ควรพิจารณาคือ การจัดรูปของฟังก์ชั่นให้สะดวกต่อการใช้สูตรทางอนุพันธ์ต่างๆ นั้น อาจช่วยให้สามารถหาอนุพันธ์ได้ง่ายและแม่นยำขึ้น อาทิ สำหรับ

$$g(x) = x^{n+1}e^{x^{-5}}$$

นั้น เมื่อใช้สูตรทางอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้อง คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นที่อยู่ในรูปยกกำลัง ฟังก์ชั่นเอกซ์โปเนนเชียล ฟังก์ชั่นที่อยู่ในรูปของผลคูณ และฟังก์ชั่นซ้อนแล้ว จะได้ว่า

$$g'(x) = (n+1)x^n e^{x^{-5}} - 5x^{n-5}e^{x^{-5}}$$

จากอนุพันธ์ลำดับแรกข้างต้น การหาอนุพันธ์ลำดับที่สองคือ $g''(x)$ แม้จะสามารถทำได้โดยตรงจากการใช้สูตรทางอนุพันธ์เช่นเดิม แต่กล่าวได้ว่ามีภาระในการคำนวณเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่า ของ

การคำนวณหาอนุพันธ์ลำดับแรก อย่างไรก็ตาม หากได้จัดรูปอนุพันธ์ลำดับแรกเสียใหม่เป็น

$$g'(x) = (n+1)x^n e^{x^{-5}} - 5x^{n-5}e^{x^{-5}} = e^{x^{-5}}\left((n+1)x^n - 5x^{n-5}\right)$$

ก็สามารถลดภาระในการคำนวณไปได้ค่อนข้างมาก ทั้งนี้ จากโจทย์จะได้ว่าอนุพันธ์ลำดับแรกและลำดับที่สองของ $f(x)$ ได้แก่

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^n - \mathsf{ln}(x+e^x) \\
f'(x) &= nx^{n-1} - \left(\frac{1+e^x}{x+e^x}\right) \\
f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} - \left(\frac{e^x(x+e^x) - (1+e^x)^2}{(x+e^x)^2}\right) \\
&= n(n-1)x^{n-2} - \frac{e^x}{(x+e^x)} + \left(\frac{1+e^x}{x+e^x}\right)^2
\end{aligned}$$

และสำหรับ $g(x)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
g(x) &= x^{n+1}e^{x^{-5}} \\
g'(x) &= (n+1)x^n e^{x^{-5}} - 5x^{n-5}e^{x^{-5}} = e^{x^{-5}}\left((n+1)x^n - 5x^{n-5}\right) \\
g''(x) &= -5x^{-6}e^{x^{-5}}\left((n+1)x^n - 5x^{n-5}\right) + e^{x^{-5}}\left((n+1)nx^{n-1} - 5(n-5)x^{n-6}\right) \\
&= e^{x^{-5}}\left((n+1)nx^{n-1} + (-10n+20)x^{n-6} + 25x^{n-11}\right)
\end{aligned}$$

สำหรับ $h(x)$ นั้น การหา $h'(x)$ สามารถทำได้โดยตรง โดยใช้กฎอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นที่อยู่ในรูปเศษส่วน ทั้งนี้เมื่อหา $h'(x)$ ได้แล้ว การจัดผลให้อยู่รูปผลต่างของเศษส่วนสองกลุ่ม จะสะดวกแก่การหา $h''(x)$ มากกว่า

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{(4x+3)^4}{(2x+\mathsf{ln}(x)+e^x)^2} \\
h'(x) &= \frac{16(4x+3)^3(2x+\mathsf{ln}(x)+e^x)^2 - (4x+3)^4(2x+\mathsf{ln}(x)+e^x)(4+\frac{2}{x}+2e^x)}{(2x+\mathsf{ln}(x)+e^x)^4} \\
&= \frac{16(4x+3)^3}{(2x+\mathsf{ln}(x)+e^x)^2} - \frac{(4x+3)^4(4+\frac{2}{x}+2e^x)}{(2x+\mathsf{ln}(x)+e^x)^3}
\end{aligned}$$

9. สมมติให้ $\epsilon_{y|x}$ คือ ความยืดหยุ่นของ y ต่อการเปลี่ยนแปลงของ x สำหรับ $\ln(y) = \alpha + \beta\ln(x)$ จะได้ว่า

$$y = \exp(\alpha + \beta \ln(x))$$
$$\frac{dy}{dx} = \exp(\alpha + \beta \ln(x))\frac{\beta}{x}$$

ดังนั้น

$$\epsilon_{y|x} = \frac{dy/y}{dx/x} = \exp(\alpha + \beta \ln(x))\frac{\beta}{x} \cdot \frac{x}{\exp(\alpha + \beta \ln(x))} = \beta$$

10. สำหรับกรณีนี้ซึ่งต้องการพิสูจน์ว่า หากให้ $a > 1$ และ k เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

$$L \equiv \lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{a^x} = 0$$

ดังนั้นหากแปลงค่าข้างต้นด้วยฟังก์ชั่นลอกการิธึม จะได้ว่า

$$\ln(L) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{a^x}\right) = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^k}{a^x}\right) \to -\infty$$

การพิสูจน์ให้ได้ว่า $\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{a^x} = 0$ จึงทำได้โดยการพิสูจน์ว่า $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^k}{a^x}\right) \to -\infty$ ซึ่งเมื่อพิจารณา

$$\ln\left(\frac{x^k}{a^x}\right) = k\ln(x) - x\ln(k) = x\left(k\frac{\ln(x)}{x} - \ln(k)\right)$$

จากคุณสมบัติของลิมิต ที่ว่าลิมิตของผลคูณจะเท่ากับผลคูณของลิมิต ดังนั้นเมื่อพิจารณา

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

ซึ่งเมื่อใช้กฎของโลปิตาลจะได้

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

ดังนั้นลิมิตของค่าในวงเล็บที่สองจึงเท่ากับ

$$\mathsf{lim}_{x\to\infty}\left(k\frac{\mathsf{ln}(x)}{x}-\mathsf{ln}(k)\right)=-\mathsf{ln}(k)<0$$

จากเงื่อนไขที่ว่า $k>1$ ซึ่งให้ผลสรุปสุดท้ายคือ

$$\mathsf{lim}_{x\to\infty}\mathsf{ln}\left(\frac{x^k}{a^x}\right)=\mathsf{lim}_{x\to\infty}x\left(k\frac{\mathsf{ln}(x)}{x}-\mathsf{ln}(k)\right)\to-\infty$$

หรือ $\mathsf{lim}_{x\to\infty}\frac{x^k}{a^x}=0$ ผลลัพธ์ที่ได้พิสูจน์ข้างต้นนี้ แสดงให้เห็นข้อสรุปที่สำคัญเกี่ยวกับลิมิตเรื่องหนึ่ง คือ การเปลี่ยนแปลง x^k ในที่สุดแล้วจะเปลี่ยนแปลงช้ากว่า a^x เสมอ เมื่อ x เพิ่มขึ้นเรื่อยจนเข้าสู่ค่าอนันต์ ค่าของตัวหารที่เพิ่มขึ้นมากกว่าค่าของตัวตั้ง ซึ่งส่งผลให้ค่าทั้งสองห่างกันเรื่อย ๆ จึงทำให้สัดส่วนของทั้งสองค่าเท่ากับศูนย์ในที่สุด

11. จาก $(a+bi)^{-1}=\frac{1}{a+bi}$ เมื่อนำเอาคอนจูเกตเชิงซ้อน $a-bi$ คูณทั้งเศษและส่วนจะได้

$$\begin{aligned}(a+bi)^{-1}&=\frac{a-bi}{(a+bi)\cdot(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}\\&=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\equiv A+Bi\end{aligned}$$

12. จากสูตรของออยเลอร์ $e^{a+bi}=e^a\cdot e^{bi}=e^a(\mathsf{cos}\ b+i\ \mathsf{sin}\ b)$ จึงได้ว่า $e^i=e^{0+1i}=\mathsf{cos}\ 1+i\ \mathsf{sin}\ 1$ และ $e^{\pi i}=\mathsf{cos}\ \pi+i\ \mathsf{sin}\ \pi=-1$

บรรณานุกรม

Aiton, E. J., & Lanas, C. C. (1985). *Leibniz: a biography*. Bristol and Boston: Hilger.

Althoen, S. C., & Mclaughlin, R. (1987). Gauss-Jordan reduction: A brief history. *The American mathematical monthly*, *94*(2), 130-142.

Arthur, R. T. (2014). *Leibniz*. John Wiley & Sons.

Belhoste, B. (2012). *Augustin-Louis Cauchy*: *A Biography*. Springer Science & Business Media.

Boyer, C. B. (1985). *A History of Mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

Burton, W. J. (1973). *Linear Algebra*. California: Holden-Day.

Cardano, G., Witmer, T. R., & Ore, O. (2007). *The rules of algebra*: *Ars Magna*. Courier Corporation.

Chiang, A. C., & Wainwright, K. (2005). *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. Singapore: McGraw-Hill.

Dhrymes, P. J. (2013). *Mathematics for econometrics*. New York: Springer.

Dorier, J. L. (1995). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia mathematica*, *22*(3), 227-261.

Dunnington, G. W., Gray, J., & Dohse, F. E. (2004). *Carl Friedrich Gauss: titan of science*. The Mathematical Association of America.

Enders, C. K. (2010). *Applied missing data analysis*. Guilford Publications.

Félix, S., & Portugal, P. (2017). Drug decriminalization and the price of illicit drugs. *International Journal of Drug Policy*, *39*, 121-129.

Ferreira, S. (2017). Portugal's radical drugs policy is working. Why hasn't the world copied it. *The Guardian*, 5.

Fraleigh, J. B., & Beauregard, R. A. (1990). *Linear Algebra*. Ontario: Addison-Wesley.

Gandolfo, G. (1971). *Economic dynamics*: *methods and models*. Elsevier.

Greene, W. H. (2000). *Econometric analysis*. New Jersey: Prentice Hall.

Greenwald, G. (2009). Drug decriminalization in Portugal: lessons for creating fair and successful drug policies. *Cato Institute Whitepaper Series*.

Grinstead, C. M., & Snell, J. L. (1997). *Introduction to probability*. American Mathematical Society.

Haeussler Jr, E. F., Paul, R. S., & Wood, R. J. (1990). *Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics, and the Social Sciences*. New Jersy: Pearson.

Hahn, R. (2005). *Pierre Simon Laplace, 1749-1827*: *a determined scientist*. Harvard University Press.

Hanck, C., Arnold, M., Gerber, A., & Schmelzer, M. (2021). *Introduction to Econometrics with R*. Universität Duisburg-Essen.

Hawkins, T. (1975). Cauchy and the spectral theory of matrices. *Historia mathematica*, *2*(1), 1-29.

Hughes, C. E., & Stevens, A. (2010). What can we learn from the Portuguese decriminalization of illicit drugs?. *The British Journal of Criminology*, *50*(6), 999-1022.

Iyavarakul, T. (2022). COVID testing as a quasi-public goods. Conference paper at the Conference on the Regional Innovation and Cooperation in Asia (RICA), Kyoto.

Iyavarakul, T. (2023). On the Portuguese model of drug decriminalization and the dynamics of demand for illicit drugs. Conference paper at the Conference on the Regional Innovation and Cooperation in Asia (RICA), Kyoto.

Iyavarakul, T. (2025). Has Thailand Succeeded in the War on Drugs? *NIDA Case Research Journal*, *17*(2).

Kleiber, C., & Zeileis, A. (2008). *Applied econometrics with R*. Springer.

Kleiner, I. (2007). *A history of abstract algebra*. Springer Science & Business Media.

Kolman, B., & Hill, D. (2014). *Elementary Linear Algebra*. Essex: Pearson.

Kosinski, A. A. (2001). Cramer's rule is due to Cramer. *Mathematics Magazine*, *74*(4), 310-312.

Leontief, W. (1974). Sructure of the world economy: Outline of a simple input-output formulation. *The American Economic Review*, *64*(6), 823-834.

Little, R. J., & Rubin, D. B. (2019). *Statistical analysis with missing data*. John Wiley & Sons.

Mankiw, N. G. (2021). *Principles of economics*. Cengage Learning.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., & Green, J. R. (1995). *Microeconomic theory*. New York: Oxford University Press.

Motz, L., & Weaver, J. H. (1993). *The Story of Mathematics*. New York: Avon Books.

National Research Council (1994). *Informing America's policy on illegal drugs: what we don't know keeps hurting us*. Washington, DC: National Academy Press.

Nicholson, W. K. (2013). *Linear Algebra with Applications*. McGraw-Hill.

Plante, J. (2018). Cubic Equations from an Analytic Point of View. *The American Mathematical Monthly*, *125*(9), 845-849.

Rabouin, D. (2010). What Descartes knew of mathematics in 1628. *Historia mathematica*, *37*(3), 428-459.

Racine, J., & Hyndman, R. (2002). *Using R to teach econometrics*. Wiley.

Shilov, G. E. (1977). *Linear Algebra*. Dover.

Shone, R. (2002). *Economic Dynamics*: *Phase diagrams and their economic application*. Cambridge University Press.

Simon, C. P., & Blume, L. (1994). *Mathematics for economists*. New York: Norton.

Stachurski, J. (2009). *Economic dynamics*: *theory and computation*. MIT Press.

Stevens, A. (2010). *Drugs, crime and public health: The political economy of drug policy*. Routledge.

Stewart, W. J. (2009). *Probability, Markov chains, queues, and simulation*: *the mathematical basis of performance modeling*. Princeton university press.

Stigler, S. M. (1977). An attack on Gauss, published by Legendre in 1820. *Historia Mathematica*, *4*(1), 31-35.

Stigler, S. M. (1981). Gauss and the invention of least squares. *The Annals of Statistics*, *9*(3) 465-474.

Sydsaeter, K., & Hammond, P. (1995). *Mathematics for Economic Analysis*. New Jersey: Prentice-Hall.

Unlu, A., Tammi, T., & Hakkarainen, P. (2020). *Drug decriminalization policy: literature review: models, implementation and outcomes*. Report 9/2020. Finnish Institute for Health and Welfare.

Venables, W. N., & Ripley, B. D. (2013). *Modern applied statistics with S-PLUS*. Springer.

Whittaker, E. (1949). Laplace. *The Mathematical Gazette*, *33*(303), 1-12.

Woods, J. B. (2011). A decade after drug decriminalization: what can the United States learn from the Portuguese model. *UDC/DCSL L. Rev.*, 15, 1.

Wooldridge, J. M. (2010). *Econometric analysis of cross section and panel data*. MIT press.

ดัชนีค้นคำ

ค

ง

จ

ช

ซ

ฌ

ล

ว

ส